职工高等工业专科学校
高等职业技术教育
试用教材

线性代数

主　编　孟昭凤
副主编　杨志民　田明欣

机械工业出版社

职工高等工业专科学校
高等职业技术教育 试用教材

线性代数

主　编　孟昭凤
副主编　杨志民　田明欣
主　审　白富志　王天光

机械工业出版社

本书是受中国机械工程学会职工高等教育委员会的委托，按其教材编写出版委员会的具体要求和安排编写的教材，体现了高等职业技术教育特色和不同专业需要的特色。内容主要有行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型的基本知识和基本计算方法，作了系统的深入浅出的介绍；并配有较多的具有启发性的例题。每章后附有习题，书末有习题答案和提示。文字通俗易懂，便于自学。

本书是职工高校、高等职业技术学校理工科、经济管理等专业的教材或其它专业的教学参考书，也可作为各类工程技术人员的参考书或自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/孟昭凤主编－北京：机械工业出版社，1999.8（2000.8重印）

职工高等工业专科学校·高等职业技术教育试用教材

ISBN 7－111－06676－6

Ⅰ．线…　Ⅱ．孟　Ⅲ．线性代数－高等教育：技术教育－教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第65710号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

责任编辑：王世刚　吴小帆　版式设计：冉晓华　责任校对：孙志筠

封面设计：姚　毅　责任印制：付方敏

三河市宏达印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003年6月第1版第3次印刷

787mm×1092mm $1/_{16}$·7.75印张·183千字

定价：12.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前　言

为适应我国高等职业技术教育的蓬勃发展，加强教材的配套与建设，我们受中国机械工程学会职工高等教育委员会的委托，根据其教材编写出版委员会的具体要求和安排，以应用为目的，以必需、够用为度，编写了本教材。

在编写中，尽量考虑高等职业技术教育特点，力求使教材结构紧凑，语言简练，对于必要的基本理论、基本方法和基本技能、力求阐述详细、深入浅出，通俗易懂，便于自学。我们期望本书对职工高校和高等职业技术教育模块教学有所裨益。

为了使读者便于掌握一定的计算方法，提高技能，在每一章后都配有足够的习题，供教师与读者选用，习题以基本训练为主。

本书主编为孟昭凤、副主编为杨志民、田明欣，参加编写的还有潘学功、黄林静、主审为白富志、王天光。

在编写过程中，本书承蒙白富志教授指导编写，并审校全书，在此表示衷心感谢。

本书作为职工学校，高等职业技术院校的理工科专业、经济管理等专业的教材，也可作为其它专业的教学参考书或各类工程技术人员的自学用书。

由于编者水平有限，时间仓促，编写中的错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

1998.8.2

目　　录

第一章　行　列　式

在生产实践和科学研究中，一些变量之间的关系可以直接或近似用比较简单的一次式表达，这种用一次式表达的关系就是线性关系，或称线性函数。线性代数是研究线性函数的一个数学分支。在线性代数中，线性方程组是一个重要的部分。研究线性方程组首先需要重要工具——行列式。“数学是从人的需要中产生的”。行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的，它在数学本身或其它科学分支上，譬如物理学、力学等，都有广泛的应用。本章主要讨论以下三个问题。

1. 行列式的定义；
2. 行列式的基本性质及计算方法；
3. 克莱姆法则。

第一节　n 阶行列式

一、二阶、三阶行列式

先从二元线性方程组解的公式，引出二阶行列式的概念。

线性代数中，含两个未知量、两个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1、x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

式（1-2）是二元线性方程组的解的公式，为了便于记忆，引进二阶行列式的概念。

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，它表示两项的代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

二阶行列式所表示的两项代数和，可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角两个元素相乘取正号，从右上角到左下角两个元素相乘取负号，如下所示

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$-\qquad\qquad\qquad +$$

由于式（1－3）行列式中的元素就是二元线性方程组中未知量的系数，所以又称它为二元线性方程组的系数行列式，并用字母 D 表示，即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

如果将 D 中第一列的元素 a_{11}、a_{21} 换成常数项 b_1、b_2，则可得到另一个行列式，用字母 D_1 表示为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和 $b_1a_{22}-a_{12}b_2$，这即是式（1－2）中 x_1 表达式的分子。同理将 D 中第二列的元素 a_{12}、a_{22} 换成常数项 b_1、b_2，可得到另一个行列式，用字母 D_2 表示为

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和 $a_{11}b_2-b_1a_{21}$，这即是式（1－2）中 x_2 表达式的分子。

因此，二元线性方程组解的公式又可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1-2'}$$

其中 $D\neq 0$。

含三个未知量、三个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-4}$$

仍用加减消元法，即可求得方程组（1－4）的解的公式，当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}b_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases} \tag{1-5}$$

式（1－5）是三元线性方程组解的公式。为了便于记忆，引进三阶行列式的概念。

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

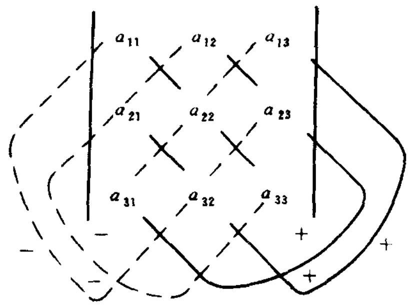
为三阶行列式，它表示 6 项的代数和，即

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-6}$$

三阶行列式所表示的6项代数和，也可用对角线法则记忆：从左上角到右下角三个元素相乘取正号，从右上角到左下角三个元素相乘取负号，如下所示



由于式（1-6）行列式中的元素就是三元方程组中未知量的系数，所以称它为三元线性方程组的系数行列式，也用字母 D 表示

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理将 D 中第一列、第二列、第三列的元素分别换成常数项 b_1、b_2、b_3，可以得到另外三个三阶行列式，分别记为 D_1、D_2、D_3，于是有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

按照三阶行列式的定义，它们表示6项的代数和，分别是式（1-5）中 x_1、x_2、x_3 的表达式的分子，系数行列式 D 是分母，于是三元线性方程组解的公式又可写为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

式中，$D \neq 0$，D_1、D_2、D_3 都是三阶行列式。

例1-1 计算下列行列式的值：

(1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$ (2) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解 (1) $D = 1 \times 6 - 5 \times (-1) = 11$

(2) $D = 1\times2\times3 + 2\times1\times3 + 3\times2\times1 - 3\times2\times3 - 2\times2\times2 - 1\times1\times1$

$= 4 + 6 + 6 - 18 - 8 - 1 = -11$

例 1－2 用三阶行列式解三元线性方程组：

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=-4\\6x_1-2x_2+3x_3=-1\\5x_1-3x_2+2x_3=-3\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}4&-3&2\\6&-2&3\\5&-3&2\end{vmatrix}=4\times(-2)\times2+(-3)\times3\times5+2\times6\times(-3)$

$$-2\times(-2)\times5-(-3)\times6\times2-4\times3\times(-3)$$

$$=-16-45-36+20+36+36=-5\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-4&-3&2\\-1&-2&3\\-3&-3&2\end{vmatrix}=-5\qquad D_2=\begin{vmatrix}4&-4&2\\6&-1&3\\5&-3&2\end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}4&-3&-4\\6&-2&-1\\5&-3&-3\end{vmatrix}=5$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-5}{-5}=1\qquad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-10}{-5}=2\qquad x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{5}{-5}=-1$

为方程组的解。

二、*n* 阶行列式

为了讨论问题方便，补充定义一阶行列式为

$$|a_{11}|=a_{11} \tag{1-7}$$

注意：一阶行列式$|a_{11}|$等于 a_{11} 自身，其值可正可负，所以上面的符号不是绝对值符号。二阶、三阶行列式可以表述如下：

二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}|$$

它的规律是：把此行列式第一行的各元素乘以该元素所在行和列后剩下的一阶行列式，然后在各乘积前面冠以正负相间的符号，最后求其代数和。

三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

它的规律是：把该行列式的第一行诸元素乘以该元素所在行和列划去后剩下的二阶行列式，前面冠以正、负相间的符号，最后再求它们的代数和。

由于上述行列式的表达式的每一项都以行列式第一行的一个元素为其因子，因此称此行列式按第一行展开。

根据以上分析，可以按照规律用一阶行列式定义二阶行列式，用二阶行列式定义三阶行列式。运用此规律，定义四阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

反复运用此规律，可以定义 $n-1$ 阶行列式。所以，在已知二阶，三阶，…，$n-1$ 阶行列式的基础上从而定义并计算 n 阶行列式，这种定义的方法称为递归定义法。

定义 1－1　一阶行列式为

$$|a_{11}| = a_{11}$$

设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\cdots a_{2n} \\ a_{32}\cdots a_{3n} \\ \vdots \\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{33}\cdots a_{3n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32}\cdots a_{3n-1} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn-1} \end{vmatrix} \qquad (1-8)$$

式（1－8）左端的行列式常记为 D。

n 阶行列式有 n 行 n 列，共有 n^2 个元素，a_{ij} 是行列式中对应第 i 行第 j 列的元素，元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 称为行列式的主对角元素，它们所在的直线称为主对角线。

由 n 阶行列式的定义，利用数学归纳法不难证明：

（1）n 阶行列式有 n！项；

（2）n 阶行列式每一项的形式为

$$\pm a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n} \qquad (1-9)$$

其中　j_1，j_2，…，j_n 是 1，2，…，n 的一种排列。式（1－9）给出的乘积是 D 中属于不同行不同列的 n 个元素的乘积。

为了叙述和表达方便，引进余子式和代数余子式的概念。

把 n 阶行列式中某一元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划去后，所剩下的元素按原来次序所构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘上 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

元素 a_{22}的余子式

$$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而 a_{23}的代数余子式

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

利用余子式和代数余子式的记号，三阶行列式按第一行展开式可以记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}$$

四阶行列式按第一行展开式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{4}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}A_{1j}$$

一般，对于 n 阶行列式按第一行展开式可表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

由此可见，一个 n 阶行列式等于它的第一行各元素与其代数余子式的乘积之和。

例 1－3 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

解 根据四阶行列式的定义

$$D=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}+1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}+0(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$=2\ (20-14-2)\ -\ (60+7-28-6)\ -0+\ (-6+4-1)$

$=8-33-3=-28$

例 1－4 计算下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}\cdots & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由定义依次按第一行展开，可得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0\cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33}\cdots & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0\cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44}\cdots & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n3} & a_{n4}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{k=1}^{n}a_{kk}$$

以上是利用行列式第一行的诸元素与其代数余子式的乘积之和来定义行列式。此定义通常称为行列式按第一行元素的展开式。如果改用按第一列元素展开，也有相同结论。即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+\ (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} \tag{1-10}$$

证 采用数学归纳法。

$n=2$，结论显然正确。设结论对 $n-1$ 阶行列式成立，证明它对 n 阶行列式也成立。

设 $M\ \binom{i\ \ j}{s\ \ t}$ 表示划去 D 的第 i、第 j 两行与第 s、第 t 两列后所剩的 $n-2$ 阶行列式。

首先，按行列式的定义有

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\cdots+\ (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$=a_{11}M_{11}-\sum_{j=2}^{n}\ (-1)^{j}a_{1j}M_{1j} \tag{1-11}$$

式中，M_{1j}（$j\geqslant 2$）是划去 D 的第 1 行第 j 列所得到的 $n-1$ 阶行列式，按归纳假设，它可按第一列展开

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21}\cdots a_{2j-1} & a_{2j+1}\cdots a_{2n} \\ a_{31}\cdots a_{3j-1} & a_{3j+1}\cdots a_{3n} \\ \vdots & \\ a_{n1}\cdots a_{nj-1} & a_{nj+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{21}M_{11}^{*}-a_{31}M_{21}^{*}+\cdots+\ (-1)^{n}a_{n1}M_{n1}^{*}$$

式中的 M_{k-11}^{*}（$k=2$，3，…，n）是划去 M_{1j}的第 $k-1$ 行第 1 列所得到的 $n-2$ 阶行列式，

它恰好是划去 D 的第 1、k 两行与第 1、j 两列所得到的 $n-2$ 阶行列式，故有

$$M_{k-11}^{*}=M\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & j\end{pmatrix}\qquad (k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

于是

$$M_{1j}=a_{21}M\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & j\end{pmatrix}-a_{31}M\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & j\end{pmatrix}+\cdots+(-1)^{n}a_{n1}M\begin{pmatrix}1 & n\\ 1 & j\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}M\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & j\end{pmatrix}$$

代入式（1－11），得

$$D=a_{11}M_{11}-\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}\left[\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}M\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & j\end{pmatrix}\right]$$

$$=a_{11}M_{11}-\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}(-1)^{j+k}a_{1j}a_{k1}M\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & j\end{pmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}\left[\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}M\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & j\end{pmatrix}\right]$$

把 M_{k1} 按第一行元素展开时，有

$$M_{k1}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n}\\ \vdots & \\ a_{k-12} & a_{k-13}\cdots a_{k-1n}\\ a_{k+12} & a_{k+13}\cdots a_{k+1n}\\ \vdots & \\ a_{n2} & a_{n3}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}M\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & j\end{pmatrix}$$

代入 D 的展开式，得

$$D=a_{11}M_{11}-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}a_{k1}M_{k1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}$$

上述推导说明：n 阶行列式也等于第一列诸元素与其代数余子式乘积之和。

例 1－5 计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ 0 & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \\ 0 & 0\ \cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

解 行列式依次按第 1 列展开，得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n}\\ 0 & a_{33}\cdots a_{3n}\\ \vdots & \\ 0 & 0\ \cdots a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34}\cdots a_{3n}\\ 0 & a_{44}\cdots a_{4n}\\ \vdots & \\ 0 & 0\ \cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{k=1}^{n}a_{kk}$$

第二节　行列式的性质

根据行列式定义，只能计算某些特殊的行列式。对一般行列式，随着行列式阶数 n 的

增大，用定义计算行列式，其计算量相当大，比较困难。通过研究行列式的性质，可将一般行列式化成特殊行列式进行计算。

为了便于讨论行列式的性质，首先引进转置行列式的概念。

交换行列式 D 的行与列所得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D'。

设 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$ 则 $$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

D 与 D' 中的元素有如下关系：

(1) D 中主对角线上的元素在 D' 中仍为主对角线上的元素；

(2) D 中的第 i 行第 j 列元素与 D' 中的第 j 行第 i 列元素相等。

n 阶行列式有如下重要性质：

性质 1－1 行列式转置后其值不变。即 $D=D'$。

证 用数学归纳法。

当 $n=2$ 时，显然有 $D=D'$。

设性质 1－1 对 $n-1$ 阶行列式成立，现证明对 n 阶行列式也成立。

将 D' 按第一列元素展开

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31}\cdots a_{n1} \\ \vdots & \\ a_{2j-1} & a_{3j-1}\cdots a_{nj-1} \\ a_{2j+1} & a_{3j+1}\cdots a_{nj+1} \\ \vdots & \\ a_{2n} & a_{3n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\begin{vmatrix} a_{21}\cdots a_{2j-1} & a_{2j+1}\cdots a_{2n} \\ a_{31}\cdots a_{3j-1} & a_{3j+1}\cdots a_{3n} \\ \vdots & \\ a_{n1}\cdots a_{nj-1} & a_{nj+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j}=D$$

从第二个等号到第三个等号的变化利用了归纳假设：性质 1－1 对 $n-1$ 阶行列式成立，所以和号中出现 $n-1$ 阶行列式转置后的值不变。

性质 1－1 说明：行列式的行与列处于平等地位。如果证明行列式关于行有某种性质，则对列的相应性质也随之成立。

性质 1－2 交换行列式的两行（列），行列式的值变号。

证 用数学归纳法。对于二阶行列式，性质 1－2 显然成立。设性质 1－2 对 $n-1$ 阶行列式成立，证明它对 n 阶行列式也成立。

下面分两种情况予以证明：

(1) 考察交换相邻两行的情况。设 n 阶行列式 D 的 i、$i+1$ 两行互换后变成 $\widetilde{D}$，证明

$D=-\widetilde{D}$。将 D 与 $\widetilde{D}$ 的 s 行 t 列元素的余子式分别记为 M_{st} 与 $\widetilde{M}_{st}$，由归纳假设得

$$\widetilde{M}_{st}=-M_{st} \qquad (s\neq i,\ i+1)$$

$$M_{it}=M_{i+1\ t} \qquad \widetilde{M}_{i+1\ t}=M_{it}$$

性质 1－2 对 $n-1$ 阶行列式 M_{st}（$s\neq i$，$i+1$）成立。M_{st} 中两行（D 的第 i，$i+1$ 两行）互换变为 $\widetilde{M}_{st}$，所以两者差一个符号。

把 $\widetilde{D}$ 按第一列展开，注意 D 的第 i 行第 1 列元素为 $a_{i+1\ 1}$，第 $i+1$ 行第 1 列元素为 a_{i1}，因此有

$$\begin{aligned}
\widetilde{D} &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,i+1}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}\widetilde{M}_{k1}+(-1)^{i+1}a_{i+1\ 1}\widetilde{M}_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i1}\widetilde{M}_{i+1\ 1}\\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,i+1}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}(-M_{k1})+(-1)^{i+1}a_{i+1\ 1}M_{i+1\ 1}+(-1)^{i+2}a_{i1}M_{i1}\\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,i+1}}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}(-M_{k1})+(-1)^{i+1}a_{i1}(-M_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i+1\ 1}(-M_{i+1\ 1})\\
&= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}=-D
\end{aligned}$$

（2）考察交换任意两行时，性质 1－2 也成立。设 $\widetilde{D}$ 是由交换 D 的第 i 行与第 j 行而成。而交换 D 的第 i 行与第 j 行可依次互换相邻两行得到：将 D 的第 i 行与相邻行经过 $j-i$ 次相邻交换，然后将第 j 行与相邻行经过反方向的 $j-i-1$ 次相邻交换。共经过 $2(j-i)-1$ 次相邻交换，行列式 D 变了 $2(j-i)-1$ 次符号，相当于乘 $(-1)^{2(i-j)-1}=-1$，即 $\widetilde{D}=(-1)^{2(i-j)-1}=-D$。故互换任意两行，行列式的值变号。由性质 1－1，相应的性质对列也成立。

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列交换 i，j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$

推论 1－1 行列式中如有两行（列）的元素相同，则行列式的值为零。

证 设 D 中的第 i 行与第 j 行元素相同，则交换第 i 行与第 j 行时行列式的值不变；由性质 1－2，它们相差一个符号，即 $D=-D$，则 $2D=0$，故 $D=0$。

性质 1－3 将行列式某一行（列）的每个元素都乘以同一个数 k，等于用 k 乘这个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2}\cdots ka_{in}\\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in}\\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}$$

证 由性质 1－2 和行列式按第一行展开定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2}\cdots ka_{in} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2}\cdots a_{i-1\,n} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} ka_{ij}M_{ij} = (-1)^{i-1}k\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij}M_{ij}$$

$$= (-1)^{i-1}k \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2}\cdots a_{i-1\,n} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

第一个等号是因为 i 行经过相邻行 $i-1$ 次互换到第一行，故改变 $i-1$ 次符号，乘$(-1)^{i-1}$；第五个等号是第一行经过相邻行 $i-1$ 次互换到第 i 行，也改变 $i-1$ 次符号。M_{ij}是原行列式第 i 行各元素的余子式。（第 i 行乘以 k，记作 $r_i \times k$）

推论 1－2 一个行列式中如有一行（列）元素全为零，则行列式的值为零。

性质 1－4 行列式中如有两行（列）对应元素成比例，则行列式的值为零。

证 设行列式中第 j 行元素为第 i 行对应元素的 k 倍，按性质 1－3 从第 j 行提出公因子 k 后，第 j 行与第 i 行的对应元素相同，由推论 1－1 知，行列式的值为零。

性质 1－5 如果行列式中某行（列）的每个元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和。这两个行列式分别用两个加数之一作为该行（列）的元素，其余各行（列）都与原行列式相同。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2}\cdots b_{in}+c_{in} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2}\cdots b_{in} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ c_{i1} & c_{i2}\cdots c_{in} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 类似性质 1－3 的证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2}\cdots b_{in}+c_{in} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2}\cdots b_{in}+c_{in} & & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (b_{ij}+c_{ij}) M_{ij}$$

$$= (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}b_{ij}M_{ij} + (-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}c_{ij}M_{ij}$$

$$= (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} b_{i1} & b_{i2} \cdots & b_{in} \\ a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} \cdots & a_{i-1\,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} c_{i1} & c_{i2} \cdots & c_{in} \\ a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} \cdots & a_{i-1\,n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2} \cdots b_{in} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ c_{i1} & c_{i2} \cdots c_{in} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证毕。

性质 1-6 把行列式某一行（列）的元素同乘以数 k，对应地加到另一行（列）上去，行列式的值不变。即当 $i \neq j$ 时，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} \cdots a_{jn} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 利用性质 1-5，可将左端拆成两个行列式之和，再利用性质 1-4 便可得到右端，即

$$左端 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} \cdots a_{jn} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{nn} \\ \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \vdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} \cdots ka_{in} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} \cdots a_{jn} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = 右端$$

（例如以数 k 乘第 i 行加到第 j 列上，记作 $r_j + kr_i$）

利用行列式性质可简化行列式的计算。基本思路是根据性质把行列式化为上三角行列式，它等于变换后的上三角行列式主对角线元素的乘积。这样，行列式的值就非常容易计算。

例 1-6 计算行列式