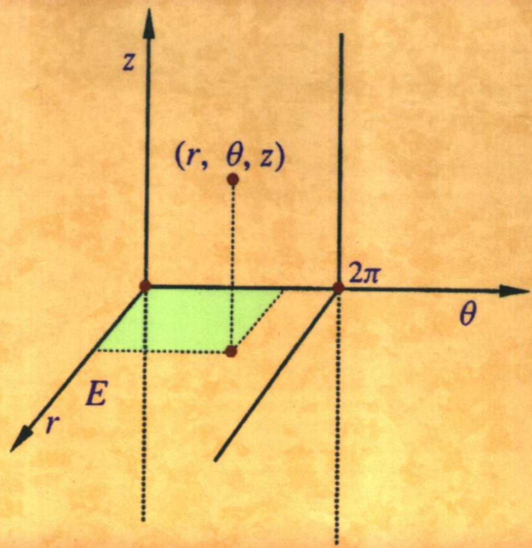
TURING 图灵数学·统计学丛书 16

ELSEVIER 爱思唯尔




# Problems in Real Analysis

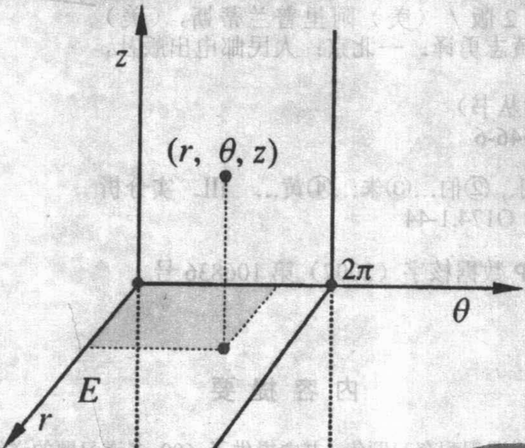
# 实分析习题集

（第 2 版）

［美］ Charalambos D. Aliprantis
Owen Burkinshaw 著
朱来义 黄志勇 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 16






# Problems in Real Analysis

# 实分析习题集

## （第2版）

Charalambos D. Aliprantis
Owen Burkinshaw 著
朱来义 黄志勇 译

人民邮电出版社
北京

**图书在版编目（CIP）数据**

实分析习题集：第 2 版 / （美）阿里普兰蒂斯，（美）伯金肖著；朱来义，黄志勇译．—北京：人民邮电出版社，2007.11
（图灵数学·统计学丛书）
ISBN 978-7-115-16546-6

Ⅰ．实…　Ⅱ．①阿…②伯…③朱…④黄…　Ⅲ．实分析高等学校—习题　Ⅳ．O174.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 106836 号

## 内容提要

本书是优秀的实分析课程配套习题集．书中提供了 600 多道习题的详细解答．内容涉及实分析基础、拓扑和连续、测度论、Lebesgue 积分、赋范空间与 $L_p$ 空间、Hilbert 空间等．书后附录中列出了习题中引用的定理、引理等，因此不需要参考原书也能运用这本习题集．

本书广受好评，可供数学专业本科生和研究生以及理工科专业研究生使用．

图灵数学·统计学丛书

**实分析习题集（第 2 版）**

◆ 著　[美] Charalambos D. Aliprantis　Owen Burkinshaw
译　朱来义　黄志勇
责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：20
字数：497 千字　2007 年 11 月第 1 版
印数：1–4 000 册　2007 年 11 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2007-2130 号

ISBN 978-7-115-16546-6/O1

定价：39.00 元

**读者服务热线：（010）88593802　印装质量热线：（010）67129223**

# 前　　言

本书包含了*Principles of Real Analysis*(Academic Press, 1998, the third edition)一书中609个习题的完整解答. 这些习题根据该书的编排分成了40节.

所有解答都是基于该书所讲内容, 并频繁引用了书中的结果. 例如，参考定理7.3和参考例28.4是指参考《实分析原理》第3版中的定理7.3和例28.4. 书后附录集中列出了习题中引用的定理、引理等.

本习题集只对那些"正确"使用它的学生有帮助. 也就是说, 学生只有在经过努力解题之后, 才应该查看习题解答. 若事先没有尝试解决这个问题, 学生就参考其解答, 这对自己将是极不负责任的. 得出一个不同于本书提供的解答, 对学生来说将是一种真正的挑战.

我们向所有对内容和习题提出建设性建议和指正的人表达最真诚的谢意. 特别感谢Y. 亚布拉莫维奇(Yuri Abramovich)教授在本习题集写作期间所做的贡献和所提的建议.

C. D. ALIPRANTIS 和 O. BURKINSHAW

1998年7月

于印第安纳西拉菲亚特

# 目 录

# 第 1 章　实分析基础

## 1. 初等集合论

**习题1.1**　证明下列集合论关系式:

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 和
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(2) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$和
$(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$;

(3) $A \backslash B = A \cap B^{c}$;

(4) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^{c} \subseteq A^{c}$;

(5) $(A \cup B)^{c} = A^{c} \cap B^{c}$和$(A \cap B)^{c} = A^{c} \cup B^{c}$.

还有, 对于任何函数$f: X \to Y$, 证明下列结论:

(6) $f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i)$;

(7) $f(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} f(A_i)$;

(8) $f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

(9) $f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

(10) $f^{-1}(B^{c}) = [f^{-1}(B)]^{c}$

**解**　(1) 我们只证明第一个公式. 我们有

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \quad \text{并且} \quad x \in C \\
&\Leftrightarrow [x \in A \quad \text{或者} \quad x \in B] \quad \text{并且} \quad x \in C \\
&\Leftrightarrow [x \in A \quad \text{并且} \quad x \in C] \quad \text{或者} \quad [x \in B \quad \text{并且} \quad x \in C] \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap C \quad \text{或者} \quad x \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).
\end{aligned}$$

(2) 我们仍然只证明第一个公式. 注意到

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \backslash C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \quad \text{并且} \quad x \notin C \\
&\Leftrightarrow [x \in A \quad \text{或者} \quad x \in B] \quad \text{并且} \quad x \notin C \\
&\Leftrightarrow [x \in A \quad \text{并且} \quad x \notin C] \quad \text{或者} \quad [x \in B \quad \text{并且} \quad x \notin C] \\
&\Leftrightarrow x \in A \backslash C \quad \text{或者} \quad x \in B \backslash C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \backslash C) \cup (B \backslash C).
\end{aligned}$$

(3) 注意到

$$\begin{aligned} x \in A\backslash B &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{并且} \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \text{并且} \quad x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c. \end{aligned}$$

(4) 假设$A \subseteq B$. 那么, $x \in B^c$ 意味着$x \notin B$, 从而$x \notin A$(即$x \in A^c$), 因此$B^c \subseteq A^c$. 另一方面, 假如$B^c \subseteq A^c$ 成立, 那么(由前一个情形) 我们有$A = (A^c)^c \subseteq (B^c)^c = B$.

(5) 注意到

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \; &\Leftrightarrow x \notin A \quad \text{或者} \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \quad \text{或者} \quad x \in B^c \; \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B &\Leftrightarrow x \notin A \quad \text{并且} \quad x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \quad \text{并且} \quad x \in B^c \; \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

(6) 我们有

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists \quad x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ 使得} \quad y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得} \quad x \in A_i \text{ 并且} \quad y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得} \quad y \in f(A_i) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i). \end{aligned}$$

(7) 从包含关系$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq f(A_j)$ 对每一个$j$都成立, 我们知道

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

(8) 我们有

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得} \quad f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \exists \quad i \in I \text{ 使得} \quad x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

(9) 注意到

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \text{ 对一切} i \in I, \quad f(x) \in B_i \\ &\Leftrightarrow \text{ 对一切} i \in I, \quad x \in f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

(10) 注意到

$$x \in f^{-1}(B^{c}) \Leftrightarrow f(x) \in B^{c} \Leftrightarrow f(x) \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in [f^{-1}(B)]^{c}.$$

**习题1.2** 对两个集合$A$和$B$, 证明下列结论是等价的:

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A \cup B = B$;

(c) $A \cap B = A$.

**解** (a) $\Rightarrow$ (b) $B \subseteq A \cup B$ 显然成立. 另一方面, 若$x \in A \cup B$, 那么$x \in A$ 或者$x \in B$, 因此无论哪一种情况下都有$x \in B$. 这就意味着$A \cup B \subseteq B$, 因此$A \cup B = B$. (b)$\Rightarrow$(c) 由上一题的(1), 我们有

$$A \cap B = A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A.$$

(c) $\Rightarrow$ (a)显然, $A = A \cap B \subseteq B$.

**习题1.3** 对任何3个集合$A$, $B$和$C$, 证明$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$[1] 成立.

**解** 首先注意到, 对任何3个集合$X$, $Y$ 和$Z$, 我们有

$$X\Delta Y \setminus Z = [X \setminus (Y \cup Z)] \cup [Y \setminus (X \cup Z)]$$

和

$$Z \setminus (X\Delta Y) = [Z \setminus (X \cup Y)] \cup [X \cap Y \cap Z)].$$

比方说, 要证明第一个等式, 注意到

$$\begin{aligned}
x \in X\Delta Y \setminus Z \quad &\Leftrightarrow [x \in X \setminus Y \quad \text{或者} \quad x \in Y \setminus X] \text{ 并且} x \notin Z \\
&\Leftrightarrow [x \in X, x \notin Y, \text{并且} \quad x \notin Z] \quad \text{或者} \quad [x \in Y, x \notin X, \quad \text{并且} \quad x \notin Z] \\
&\Leftrightarrow x \in [X \setminus (Y \cup Z)] \cup [Y \setminus (X \cup Z)].
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C &= [(A\Delta B) \setminus C] \cup [C \setminus (A\Delta B)] \\
&= [A \setminus (B \cup C)] \cup [B \setminus (A \cup C)] \cup [C \setminus (A \cup B)] \cup [A \cap B \cap C] \\
&= \{[A \setminus (B \cup C)] \cup (A \cap B \cap C)\} \cup \{[B \setminus (C \cup A)] \cup [C \setminus (B \cup A)]\} \\
&= [A \setminus (B\Delta C)] \cup [(B\Delta C) \setminus A] \\
&= A\Delta(B\Delta C).
\end{aligned}$$

1. $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. ——译者注

**习题1.4**　给出一个函数示例$f: X \to Y$和$X$ 的两个子集$A$ 和$B$, 使得$f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$.

**解**　定义$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$ 为$f(0)=f(1)=0$. 如果$A=\{0\}$, $B=\{1\}$, 那么$f(A\cap B)=\varnothing \neq \{0\}=f(A)\cap f(B)$.

**习题1.5**　对于函数$f: X \to Y$, 证明下列3个命题是等价的:

(a) $f$ 是一对一的;

(b) 对所有的$A, B \in \mathcal{P}(X)$[1], $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 成立;

(c) 对$X$的任何两个互不相交的子集$A$和$B$, 有$f(A)\cap f(B)=\varnothing$.

**解**　(a) $\Rightarrow$ (b) 若$y \in f(A)\cap f(B)$, 则存在$a \in A$ 和$b \in B$使得$y=f(a)=f(b)$. 因为$f$ 是一对一的, 所以$a=b \in A\cap B$, 从而$y \in f(A\cap B)$. 因此$f(A)\cap f(B) \subseteq f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) 显然.

(c) $\Rightarrow$ (a) 设$f(a)=f(b)$. 若$a \neq b$, 那么两个集合$A=\{a\}$ 和$B=\{b\}$ 满足$A\cap B=\varnothing$, 然而$f(A)\cap f(B)=\{f(a)\} \neq \varnothing$.

**习题1.6**　设$f: X \to Y$ 是一个函数. 证明$f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ 对所有的$A \subseteq Y$ 成立, $B \subseteq f^{-1}(f(B))$ 对所有的$B \subseteq X$ 成立.

**解**　显然, $x \in f^{-1}(A)$ 当且仅当$f(x) \in A$. 因此, $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$. 同样, $x \in f^{-1}(f(B))$ 当且仅当$f(x) \in f(B)$, 从而$B \subseteq f^{-1}(f(B))$ 成立.

**习题1.7**　证明函数$f: X \to Y$ 是到上的, 当且仅当$f(f^{-1}(B))=B$ 对所有的$B \subseteq Y$ 成立.

**解**　假设$f$ 是到上的, 而且$B \subseteq Y$. 若$b \in B$, 那么存在$a \in X$ 使得$f(a)=b$; 显然, $a \in f^{-1}(B)$. 从而, $b=f(a) \in f(f^{-1}(B))$, 因此$B \subseteq f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ 成立.

反之, 注意到关系式$f(f^{-1}(\{b\}))=\{b\}$ 蕴涵着对一切$b \in Y$, $f^{-1}(\{b\}) \neq \varnothing$, 因此$f$ 是到上的.

**习题1.8**　设$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. 如果$A \subseteq Z$,证明

$$(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

**解**　注意到

$$x \in (g\circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow g(f(x)) \in A \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

**习题1.9**　证明函数的复合满足结合律. 即证明如果$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} V$, 那么$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

**解**　注意到, 对一切$x \in X$ 有

$$[(h\circ g)\circ f](x)=h\circ g(f(x))=h(g(f(x)))=h((g\circ f)(x))=[h\circ(g\circ f)](x).$$

因此, $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

1. $\mathcal{P}(X)$ 表示由$X$的所有子集构成的集族. ——译者注

**习题1.10** 设$f : X \to Y$. 定义$X$ 上的关系$\mathcal{R}$为: 当$f(x_1) = f(x_2)$ 时, 称为$x_1 \mathcal{R} x_2$. 证明$X$ 上的关系$\mathcal{R}$是一个等价关系.

**解** 必须证明关系$\mathcal{R}$是自反的、对称的和可递的.

自反性: 注意到$f(x) = f(x)$ 蕴涵着对一切$x \in X$, $x\mathcal{R}x$.

对称性: 设$x_1 \mathcal{R} x_2$. 那么, $f(x_1) = f(x_2)$ 或者$f(x_2) = f(x_1)$, 因此$x_2 \mathcal{R} x_1$.

可递性: 若$x_1 \mathcal{R} x_2$, 并且$x_2 \mathcal{R} x_3$, 那么$f(x_1) = f(x_2)$ 和$f(x_2) = f(x_3)$ 都成立. 由此可得$f(x_1) = f(x_3)$, 从而$x_1 \mathcal{R} x_3$.

**习题1.11** 如果$X$ 和$Y$是集合, 证明

$$\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y) \text{和} \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y).$$

**解** (a) 注意到

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) &\Leftrightarrow A \subseteq X \text{ 且 } A \subseteq Y \\ &\Leftrightarrow A \subseteq X \cap Y \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X \cap Y). \end{aligned}$$

(b) 显然,

$$A \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \Rightarrow A \subseteq X \text{或} A \subseteq Y \Rightarrow A \subseteq X \cup Y \Rightarrow A \in \mathcal{P}(X \cup Y).$$

如果$X$ 和$Y$ 是两个互不相交的非空集合, 那么$X \cup Y \notin \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$, 因此等式不总是成立.

## 2. 可数和不可数集

**习题2.1** 证明所有有理数构成的集合是可数的.

**解** 设$\mathbb{Q}$是有理数构成的集, 并且设$\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$. 那么由$f(m,n) = m/n$定义的函数$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$是到上的. 由定理2.7和定理2.5可得出结论.

**习题2.2** 证明一个可数集的所有有限子集构成的集合是可数的.

**解** 我们可以假设$A = \{p_1, p_2, \cdots\}$是所有素数构成的集合. 设$\mathcal{F}$ 表示$A$ 的所有有限子集构成的族. 定义$f : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$为: 对一切$F \in \mathcal{F}$, $f(F) = F$ 中元素的积. 那么$f$ 是一对一的, 并且由定理2.5 可得出结论.

**习题2.3** 证明至多可数个有限集的并是一个至多可数的集.

**解** 这可由定理2.6立即得到.

**习题2.4** 设$A$ 是一个不可数集, 并且$B$ 是$A$ 的一个可数子集. 证明$A$ 与$A \backslash B$ 是对等的.

**解**　设$B=\{b_1,b_2,\cdots\}$. 因为$A$是不可数的, 所以$A\backslash B$仍然是不可数的. 设$C=\{c_1,c_2,\cdots\}$是$A\backslash B$的一个可数子集. 定义$f:A\backslash B\to A$为:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{如果 } x\notin C; \\ c_{n+1}, & \text{如果 } x=c_{2n+1}(n=0,1,2,\cdots); \\ b_n, & \text{如果 } x=c_{2n}(n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

那么$f$是一对一的并且是到上的, 因此$A\approx A\backslash B$.

**习题2.5**　*设$f:A\to B$是两个集合之间的一个满射(到上的). 证明下列结论:*

(a) *$B$的势$\leqslant A$的势.*

(b) *若$A$是可数的, 则$B$是至多可数的.*

**解**　(a) 考虑族$\{f^{-1}(b):b\in B\}$. 显然, 这是$A$的一个互不相交的子集族. 由选择公理知, 存在$A$的一个子集$C$使得对每一个$b\in B$, $C\cap f^{-1}(b)$恰好由$A$的一个元素构成. 观察到$f:C\to B$是一一的和到上的, 这就得到了结论.

(b) 由(a)立刻得到.

**习题2.6**　*证明两个非空集合$A$和$B$是对等的, 当且仅当存在一个$A$到$B$上的函数和一个$B$到$A$上的函数.*

**解**　若$A$和$B$是对等的, 那么存在一个函数$f:A\to B$是一一的和到上的. 显然, $f^{-1}:B\to A$是一个满射的函数.

反之, 假设存在一个$A$到$B$上的函数和一个$B$到$A$上的函数. 由上一题可得, $B$的势小于等于$A$的势而且$A$的势小于等于$B$的势. 因此, 利用Schröder-Bernstein定理[1]可推得, $A$和$B$是对等的.

**习题2.7**　*证明: 如果有限集$X$有$n$个元素, 那么它的幂集$\mathcal{P}(X)$有$2^n$个元素.*

**解**　我们将对$n$使用数学归纳法. 假设$\{1,2,\cdots,n\}$有$2^n$个子集, 那么集合$\{1,2,\cdots,n,n+1\}$的子集包括:

(a) $\{1,2,\cdots,n\}$的子集, 总共是$2^n$个;

(b) 形如$A\cup\{n+1\}$的子集, 总共也是$2^n$个, 其中, $A$是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集.

因此, $\{1,2,\cdots,n,n+1\}$的子集的个数是$2^n+2^n=2^{n+1}$.

直接证明如下. 注意到$\{1,2,\cdots,n\}$的含有$k$个元素($0\leqslant k\leqslant n$)的子集的个数恰好是$\binom{n}{k}$. 因此$\{1,2,\cdots,n\}$的子集的总数是

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n,$$

1. Schröder-Bernstein定理: 若$A$与$B$的某个子集对等, 并且$B$与$A$的某个子集也对等, 那么$A$与$B$对等.
——译者注

其中最后一个等式由二项式定理得到.

**习题2.8**　证明所有取值为0或1 的数列构成的集合是不可数的.

**解**　对于$\mathbb{N}$的每个子集$A$ 定义数列$f(A)=\{x_n\}$ 为: 若$n\in A$ 则$x_n=1$, 若$n\notin A$ 则$x_n=0$. 那么$f$ 定义了一个从$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 到所有取值为0或1 的数列构成的集合上的函数. 因为$f$ 显然是一一的并且是到上的, 所以由定理2.8可得到结论.

**习题2.9**　如果$2=\{0,1\}$, 那么对任何集合$X$ 证明$2^X\approx\mathcal{P}(X)$.[1]

**解**　定义$f:\mathcal{P}(X)\to 2^X$ 为$A\mapsto f_A$, 其中, 若$x\in A$ 则$f_A(x)=1$, 若$x\notin A$ 则$f_A(x)=0$. 注意到, $f$ 是一一的并且是到上的. 因此, $2^X\approx\mathcal{P}(X)$.

**习题2.10**　如果一个复数是一个(非零)整系数多项式的根, 则称之为一个**代数数**. 证明所有代数数构成的集合是可数的.

**解**　设$\mathcal{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$. 固定$n\geqslant 1$. 因为每一个多项式$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 由$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 唯一确定, 容易看到次数$\leqslant n$ 的整系数多项式与可数集$\mathcal{Z}^{n+1}\backslash\{(0,0,\cdots 0)\}$ 一一对应. 设$\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是所有这些多项式的一个排列. 由代数学基本定理知道, 集合$A_k=\{x\in\mathcal{C}:p_k(x)=0\}$ 是一个有限集. 因此, 所有次数$\leqslant n$ 的多项式$\{p_1,p_2,\cdots\}$ 的零点构成的集合恰好是集合$R_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, 这是一个可数集(由定理2.6). 注意到, 代数数全体构成的集合就是$\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n$, 作为可数个可数集的并, 它本身是可数的(参见定理2.6).

**习题2.11**　对于任意的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , 证明集合

$$A=\{a\in\mathbb{R}:\lim_{x\to a}f(x)\text{存在},\text{并且}\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)\}$$

是至多可数的.

**解**　设$\mathcal{I}$ 表示$\mathbb{R}$ 的以有理数为端点的开子区间全体构成的集合, 并且注意到$\mathcal{I}$ 是一个可数集. 此外, 设$\mathbb{Q}$ 表示$\mathbb{R}$ 的有理数全体构成的可数集.

对每个有理数$r$, 设

$$A_r=\{a\in A:\text{或者}f(a)<r<\lim_{x\to a}f(x),\text{或者}\lim_{x\to a}f(x)<r<f(a)\},$$

显然成立$A=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}A_r$. 因此, 为了证明$A$ 是至多可数的, 只要证明每一个$A_r$ 是至多可数的.

所以, 固定$r\in\mathbb{Q}$ 并且$a\in A_r$, 假设(不失一般性)$f(a)<r<\lim_{x\to a}f(x)$, 那么存在$\delta>0$ 使得当$a-\delta<y<a+\delta$ 并且$y\neq a$ 时$f(y)>r$. 然后, 取一个以有理数为端点的开区间$I_a$ (即,

1. 设$I$是一个指标集, $\{A_i\}_{i\in I}$是一个集族,它的笛卡儿乘积(Cartesian product)$\prod_{i\in I}A_i$定义为

$$\prod_{i\in I}A_i=\{f|f:I\to\cup_{i\in I}A_i,\text{满足}:f(i)\in A_i,i\in I\}.$$

特别是, 若对一切$i\in I$有$A_i=A$, 则记$\prod_{i\in I}A_i$为$A^I$. 这里的$2^X$就是定义在$X$上取值在$\{0,1\}$内的函数全体$\{0,1\}^X$. ——译者注

$I_a \in \mathcal{I}$ )使得$a \in I_a$ 并且$I_a \subseteq (a-\delta, a+\delta)$. 因为对一切$y \in I_a$ 并且$y \neq a$ 有$f(y) > r$ 成立, 所以对一切$y \in I_a \backslash \{a\}$ 有$y \notin A_r$. 特别是$A_r \cap I_a = \{a\}$.

这样我们就建立了一个从$A_r$ 到$\mathcal{I}$ 内的映射$a \mapsto I_a$ (由于对一切$a \in A_r$, $A_r \cap I_a = \{a\}$ ), 它还是一对一的. 由此可得$A_r$ 是至多可数的, 从而$A$也是至多可数的.

**习题2.12**　通过下列命题证明实数全体构成的集合是不可数的:

(a) $(0,1) \approx \mathbb{R}$;

(b) $(0,1)$ 是不可数的.

**解**　(a) 由公式$f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ 定义的函数$f: (0,1) \to \mathbb{R}$ 是一一的并且是到上的.

(b) 如果$(0,1)$ 是可数的, 那么设$\{x_1, x_2, \cdots\}$ 是$(0,1)$ 内的数的一个排列. 对每一个$n$ 由十进制表示记为$x_n = 0.d_{n1}d_{n2}\cdots$, 其中$d_{ij}$ 是$0, 1, \cdots$, 或9. 那么, 考虑$(0,1)$ 内的实数$y$, 它的十进制表示为$y = 0.y_1y_2\cdots$, 且满足: 当$d_{nn} \neq 1$ 时$y_n = 1$; 当$d_{nn} = 1$ 时$y_n = 2$. 易证对一切$n$ 有$y \neq x_n$ (如何证? ), 这就产生了矛盾. 因此区间$(0,1)$ 是一个不可数集.

**习题2.13**　用数学归纳法证明下列结论:

(a) 若$a \geqslant -1$, 那么对$n = 1, 2, \cdots$, 有$(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (Bernoulli不等式);

(b) 若$0 < a < 1$, 那么对$n = 1, 2, \cdots$, 有$1 + 3^n a > (1+a)^n$;

(c) 对$n = 1, 2, \cdots$, 有$\cos(n\pi) = (-1)^n$.

**解**　(a) 设$a \geqslant -1$. 不等式显然对$n = 1$ 正确; 事实上, 这是一个等式. 由归纳法步骤, 假设$(1+a)^n \geqslant 1 + na$ 对某个$n$ 成立. 因为假设$1 + a \geqslant 0$[1] 正确, 所以

$$
\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2 \\
&= 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a,
\end{aligned}
$$

这就是$n$ 取值$n+1$ 时所需要的不等式. 这就完成了归纳.

(b) 假设$0 < a < 1$. 因为$1 + 3a > 1 + a$, 所以所要的不等式对$n = 1$ 正确. 由归纳法步骤, 假设$1 + 3^n a > (1+a)^n$, 那么, 考虑到$0 < a < 1$, 我们知道

$$
\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n < (1+a)(1+3^n a) \\
&= 1 + 3^n a + a + 3^n a^2 = 1 + (3^n + 3^n a + 1)a \\
&< 1 + (3^n + 3^n + 3^n)a = 1 + 3 \times 3^n a = 1 + 3^{n+1} a,
\end{aligned}
$$

当用 $n+1$ 代替 $n$ 时所需的不等式正确. 由数学归纳法原理知, 对每一个自然数 $n$ 不等式正确.

(c) 对于$n = 1$, 有$\cos(1 \cdot \pi) = \cos \pi = -1 = (-1)^1$. 假设$\cos(n\pi) = (-1)^n$, 那么利用三角公式$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, 可以看到

$$
\begin{aligned}
\cos[(n+1)\pi] &= \cos(n\pi + \pi) = \cos(n\pi)\cos\pi - \sin(n\pi)\sin\pi \\
&= (-1)^n(-1) - \sin(n\pi) \cdot 0 = (-1)^{n+1},
\end{aligned}
$$

---

1. 原书中是$1 + a > 0$. ——译者注

归纳法完成.

**习题2.14** 证明良序原理(the Well-Ordering Principle)蕴涵着数学归纳法原理(the Principle of Mathematical Induction).

**解** 设$S \subseteq \mathbb{N}$ 满足:

(a) $1 \in S$ ;

(b) 当$n \in S$ 时有$n+1 \in S$.

我们必须证明$S = \mathbb{N}$, 或者等价地证明$\mathbb{N} \backslash S = \varnothing$.

为此, 我们用反证法, 假设$\mathbb{N} \backslash S \neq \varnothing$. 那么, 由良序原理, $n = \min(\mathbb{N} \backslash S)$ 存在. 显然, $1 < n \in \mathbb{N} \backslash S$. 因此, $n-1 \in S$, 从而$n = (n-1)+1 \in S$, 矛盾. 所以, $\mathbb{N} \backslash S = \varnothing$ 或者$S = \mathbb{N}$.

**习题2.15** 证明数学归纳法原理蕴涵着良序原理.

**解** 假设数学归纳法原理正确. 考虑$\mathbb{N}$ 的具有如下性质的自然数$n$ 全体构成的子集$S$ : 只要$\mathbb{N}$ 的非空子集$A$ 含有一个自然数$m \leqslant n$, 那么$A$ 有一个极小元素. 为了证明良序原理, 我们需要证明$S = \mathbb{N}$.

为此, 注意到$1 \in S$. 假设$n \in S$, 还要假设$\mathbb{N}$ 的一个非空子集$A$ 含有某个自然数$m \leqslant n+1$. 如果$A$ 含有一个自然数$k < n+1$, 那么$A$ 也含有一个自然数(也就是$k$ 本身)小于或等于$n$, 从而由$n \in S$ 知道$A$ 必然有一个极小元素. 另一方面, 如果$A$ 不含任何严格小于$n+1$ 的自然数, 那么$n+1 \in A$, 这种情形下$n+1$ 是$A$ 的极小元素. 因此, $n+1 \in S$, 从而由数学归纳法原理的正确性, 我们推得$S = \mathbb{N}$.

# 3. 实数

**习题3.1** 如果$a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$, 证明$a \vee b = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ 和$a \wedge b = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

**解** 交换$a, b$, 所有的表示式的值都不改变, 因此我们可以假设$a \geqslant b$.这样就有,

$$\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = a = a \vee b,$$

和

$$\frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \frac{1}{2}[a+b-(a-b)] = b = a \wedge b.$$

**习题3.2** 证明对所有的$a, b \in \mathbb{R}$, $||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$.

**解** 由$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ 和$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, 可以得到

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|.$$

所以, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

用$a-b$替换$a$, 我们得到$|a|\leqslant|a-b|+|b|$, 从而$|a|-|b|\leqslant|a-b|$. 交换$a$和$b$得到$-(|a|-|b|)\leqslant|a-b|$, 因此$||a|-|b||\leqslant|a-b|$也成立.

**习题3.3**　证明实数$\sqrt{2}$和$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数.

**解**　由反证法, 假设$\sqrt{2}=m/n, m,n\in\mathbb{N}$. 我们可以假设$m$和$n$除了1以外没有正的公因子. 平方可以得到$m^2=2n^2$. 这就推出$m$是偶的, 即, 对某个$k\in\mathbb{N}$, $m=2k$ (否则$m=2k+1$可推得$m^2$是奇的, 矛盾). 结果是$4k^2=2n^2$, 或者$n^2=2k^2$, 这又推得$n$是偶的, 即, 对某个$\ell\in\mathbb{N}$, $n=2\ell$.那么, $m$和$n$就有公因子2, 矛盾.因此, $\sqrt{2}$不是有理数. (这个简单证明是Eudoxus给出的.)

利用一个精彩的不同证明, 我们可以建立如下的一般性的结果:

• 一个自然数$k$的平方根$\sqrt{k}$是有理数当且仅当$k$是一个完全平方数, 即, 对某个$p\in\mathbb{N}$, $k=p^2$.

如果$k=p^2$, 显然$\sqrt{k}=p\in\mathbb{N}$为有理数. 反过来, 如果$\sqrt{k}$是有理数, 那么$\sqrt{k}$是多项式$p(x)=x^2-k$的一个有理根. 而该多项式的正有理根形如$m/n$, 其中$m\in\mathbb{N}$是$k$的一个因子, $n\in\mathbb{N}$是1的一个因子. 因此, $\sqrt{k}=m\in\mathbb{N}$, 这就得到$k=m^2$.

为了看出$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数, 由反证法假设$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r>0$是一个有理数.那么$\sqrt{3}=r-\sqrt{2}$, 平方可得$3=r^2-2r\sqrt{2}+2$. 这就得到$\sqrt{2}=(r^2-1)/2r$是一个有理数, 与我们前面的结论矛盾.因此, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$是一个无理数.

**习题3.4**　证明任何两个不同的实数之间存在一个无理数.

**解**　设$a<b$. 取一个有理数$r$使得$a<r<b$, 然后取某个$n$使得$0<\sqrt{2}/n<b-r$. 注意到无理数$x=r+\sqrt{2}/n$满足$a<x<b$.

另一解法: 注意到开区间$(a,b)$是不可数的, 而所有有理数构成的集合是可数的.

**习题3.5**　本习题将在实数的公理化基础框架内(逐步)引入熟知的减法过程.

(a) 证明元素0是唯一确定的, 即, 证明如果对所有的$x\in\mathbb{R}$和某一个$0^*\in\mathbb{R}$, $x+0^*=x$, 那么$0^*=0$.

(b) 证明**加法的消去律**成立, 即, 证明$x+a=x+b$可推得$a=b$.

(c) 用加法的消去律证明对所有的$a\in\mathbb{R}$, $0\cdot a=0$.

(d) 证明对一切实数$a$实数$-a$是唯一满足方程$a+x=0$的实数. (实数$-a$称为$a$的**负数**.)

(e) 证明对任何两个给定的实数$a$和$b$, 方程$a+x=b$有唯一解, 也就是$x=b+(-a)$. 实数$\mathbb{R}$的减法运算$-$现在定义为$a-b=a+(-b)$; 实数$a-b$叫做$b$与$a$的**差**.

(f) 对任何实数$a$和$b$证明$-(-a)=a$和$-(a+b)=-a-b$.

**解**　(a) 假设还有另外一个元素$0^*\in\mathbb{R}$满足对所有的$x\in\mathbb{R}$, $0^*+x=x+0^*=x$. 设$x=0$, 我们得到$0^*+0=0$. 又对所有的$y\in\mathbb{R}$, $0+y=y+0=y$也成立, 让$y=0^*$得到$0^*=0^*+0=0$.

(b) 设$x+a=x+b$. 由公理5知道存在某个$z\in\mathbb{R}$使得$z+x=x+z=0$. 所以,

$$a=0+a=(z+x)+a=z+(x+a)=z+(x+b)=(z+x)+b=0+b=b.$$

(c) 显然

$$0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a,$$

所以由加法的消去律得到对每一个$a \in \mathbb{R}$, $0 \cdot a = 0$.

(d) 假设$a + x = 0$.因为$a + (-a) = 0$, 我们看到$a + x = a + (-a)$, 所以, 由上面(b)中建立的加法消去律得到, $x = -a$($a$的负数).

(e) 如果$a + z = a + y = b$, 由加法的消去律我们得到$z = y$.因此, 给定$a$ 和$b$, 方程$a + x = b$至多有一个解$x \in \mathbb{R}$. 因为,

$$a + [b + (-a)] = (a + b) + (-a) = (-a) + (a + b) = [(-a) + a)] + b = 0 + b = b,$$

我们看到方程$a + x = b$ 的唯一解是$x = b + (-a)$. 我们用$b - a$ 表示这个数称之为$a$ 与$b$ 的减法.

(f) 仔细观察方程$a + (-a) = (-a) + a = 0$ 立即得到$-(-a) = a$. 而且, 由

$$a + b + (-a - b) = a + b + [-a + (-b)] = [(a + b) + (-a)] + (-b) = b + (-b) = 0,$$

我们容易得到$-(a + b) = -a - b$.

**习题3.6** 本习题将在实数的公理化基础框架内(逐步)引入熟知的除法过程.

(a) 证明元素1 是唯一确定的, 即, 证明如果对所有的$x \in \mathbb{R}$ 和某一个$1^* \in \mathbb{R}$, $1^* \cdot x = x$, 那么$1^* = 1$.

(b) 证明乘法的**消去律**成立, 即, 证明$x \cdot a = x \cdot b$并且$x \neq 0$ 可推得$a = b$.

(c) 证明对一切实数$a \neq 0$ 实数$a^{-1}$ 是唯一满足方程$x \cdot a = 1$ 的实数.实数$x = a^{-1}$ 称为$a$的**逆**(或$a$ 的**倒数**).

(d) 证明对任何两个给定的实数$a$ 和$b$ 并且$a \neq 0$, 方程$ax = b$ 有唯一解, 也就是$x = a^{-1}b$. 实数$\mathbb{R}$ 的**除法**运算$\div$ (或者/ )现在定义为$b \div a = a^{-1}b$ ; 通常, 实数$b \div a$ 也表示为$b/a$ 或$\frac{b}{a}$.

(e) 对任何两个非零的$a, b \in \mathbb{R}$,证明$(a^{-1})^{-1} = a$ 和$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

(f) 对一切$a$, 证明$\frac{a}{1} = a$; 对一切$b \neq 0$, 证明$\frac{0}{b} = 0$; 并且对一切$a \neq 0$, 证明$\frac{a}{a} = 1$.

**解** (a) 假设某个实数$1^*$ 满足对一切$x \in \mathbb{R}$, $1^* \cdot x = x \cdot 1^* = x$.特别是, 设$x = 1$, 我们得到$1^* \cdot 1 = 1$. 因为对一切$y \in \mathbb{R}$, $y \cdot 1 = y$, 让$y = 1^*$ 得到$1^* = 1^* \cdot 1 = 1$. 所以, 1 是对一切$x \in \mathbb{R}$满足$r \cdot x = x$ 的唯一实数$r$.

(b) 假设$x \cdot a = x \cdot b$ 并且$x \neq 0$, 由公理7存在一个实数$y \in \mathbb{R}$ 使得$y \cdot x = 1$. 现在可以看到,

$$a = 1 \cdot a = (yx)a = y(xa) = y(xb) = (yx)b = 1 \cdot b = b.$$

(c) 如果$ax = ay = 1$ 并且$a \neq 0$, 那么由(b), 我们一定有$x = y$. 这就证得$a$ 的倒数$a^{-1}$ 是唯一确定的.

(d) 为了证明$a \neq 0$ 时方程$ax = b$ 至多有一个解$x$, 注意到, 如果$ax = ay = b$, 那么由乘法的消去律, 我们得到$x = y$. 另外, 注意到

$$a \cdot (a^{-1}b) = (a \cdot a^{-1})b = 1 \cdot b = b.$$

以上证得$a\neq 0$时方程$ax=b$有唯一解$x=a^{-1}b$.

(e) 如果$a\neq 0$, 那么方程$a\cdot a^{-1}=1$已经说明$(a^{-1})^{-1}=a$. 另外, 由

$$(ab)\cdot(b^{-1}a^{-1})=a(b\cdot b^{-1})a^{-1}=a\cdot 1\cdot a^{-1}=1,$$

我们容易得到$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

(f) 由$1\cdot a=a$, 我们得到对一切$a\in\mathbb{R}$, $\frac{a}{1}=a$. 方程$b\cdot 0=0$含有对一切$b\neq 0$, $\frac{0}{b}=0$. 从$a\cdot 1=a$我们立刻得到对所有的$a\neq 0$, $\frac{a}{a}=1$.

**习题3.7** 用实数公理和前两题建立的性质建立如下熟知的实数性质.

(i) **零乘积原则**: $ab=0$当且仅当$a=0$或$b=0$.

(ii) **符号乘积原则**: 对所有的$a,b\in\mathbb{R}$, $(-a)b=a(-b)=-(ab)$, 而且, $(-a)(-b)=ab$.

(iii) **分数乘积原则**: 对于$b,d\neq 0$和任意实数$a,c$我们有

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

特别地, 若$\frac{a}{b}\neq 0$, 那么$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

(iv) **除法的消去律**: 如果$a\neq 0$而且$x\neq 0$, 那么对一切实数$b$, $\frac{bx}{ax}=\frac{b}{a}$.

(v) **分数除法原则**: 除以一个分数等于乘以它的倒数, 即, 只要分数$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$确定, 我们就有

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

**解** (i) 从前面的习题我们已经知道, 对一切$b\in\mathbb{R}$, $0\cdot b=0$.另一方面, 如果$ab=0(=a\cdot 0)$并且$a\neq 0$, 那么由乘法的消去律就证得$b=0$.

(ii) 显然,

$$ab+(-a)b=[a+(-a)]b=0\cdot b=0\text{且}ab+a(-b)=a[b+(-b)]=a\cdot 0=0,$$

从而$-(ab)=(-a)b=a(-b)$.这就推得

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-[-(ab)]=ab.$$

(iii) 如果$b,d\neq 0$, 那么

$$bd\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)=\left(b\cdot\frac{a}{b}\right)\cdot\left(d\cdot\frac{c}{d}\right)=ac,$$

这就证得$\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. 因为$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$, 我们看到$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

(iv) 如果$c=\frac{b}{a}$, 那么$ac=b$, 从而对一切$x\neq 0$, $(ax)c=bx$, 这就证得$c=\frac{b}{a}=\frac{bx}{ax}$.

(v) 注意到恒等式

$$\frac{c}{d}\cdot\frac{ad}{bc}=\frac{adc}{dbc}=\frac{a}{b}$$

保证了$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

**习题3.8** 本题证明了本质上只存在一个满足1.3节叙述的11个公理的实数集. 为了看清这一点, 设$\mathbb{R}$是一个实数集(即, 满足课本中1.3节叙述的全部11个公理的对象的全体).

(a) 证明$1>0$;