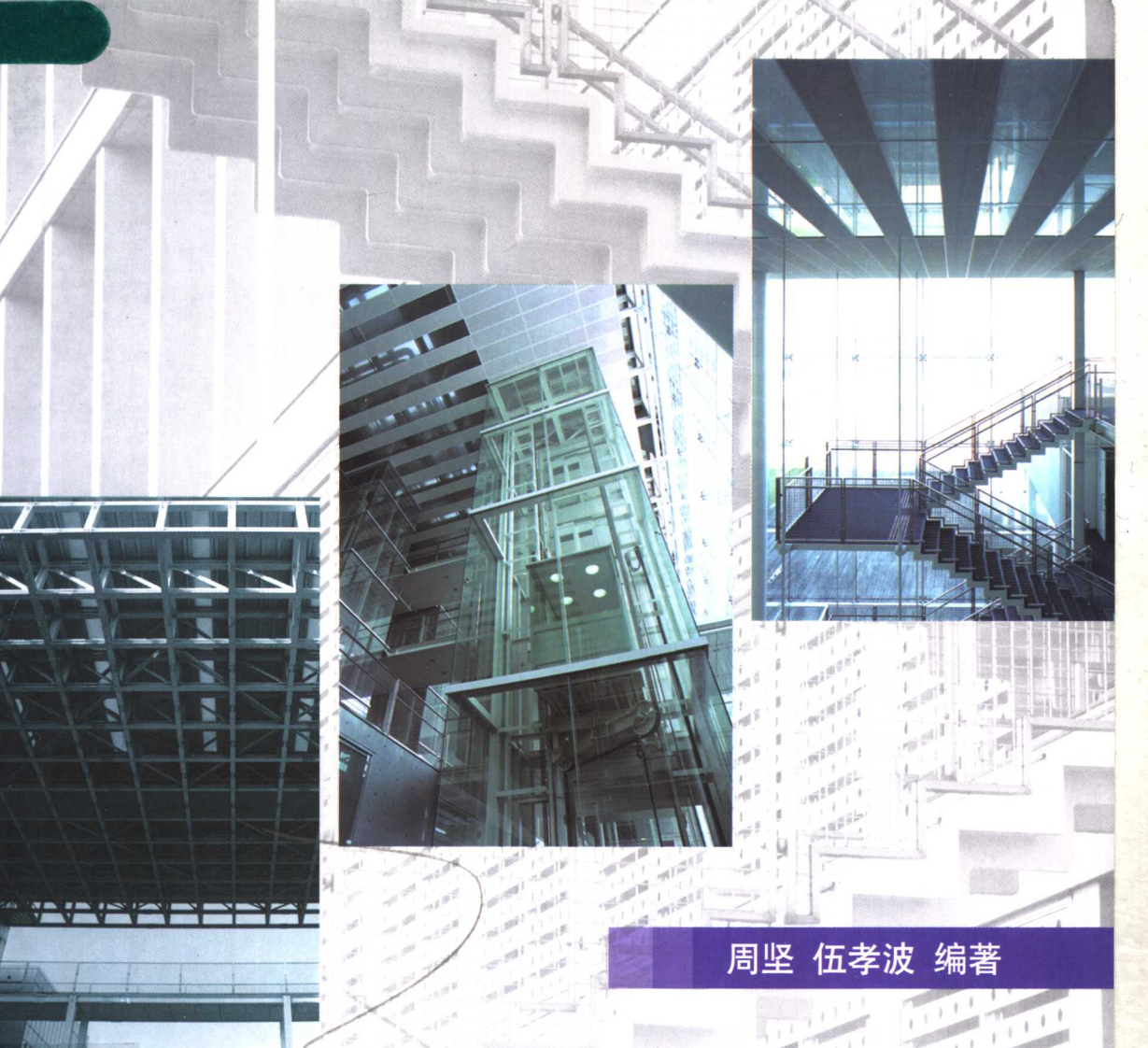




周坚 伍孝波 编著

复杂高层建筑 结构计算



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

TU973/57

2008

复杂高层建筑 结构计算

周坚 伍孝波 编著



中国电力出版社

www.cepp.com.cn

本书主要介绍了其他同类书籍较少涉及的框架结构的二阶分析、核心筒的扭转计算、复杂体型高层建筑空间协同工作体系弯扭耦联的简化分析、巨型框架结构的简化分析、悬挂结构的计算和高层建筑结构时程分析方法等内容。

本书可作为高等院校土木类结构专业研究生、高年级本科生教材,也可供有关工程技术人员和科研人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

复杂高层建筑结构计算/周坚,伍孝波编著. —北京:中国电力出版社,2008

ISBN 978-7-5083-5706-5

I. 复… II. ①周…②伍… III. 高层建筑-建筑结构-计算方法 IV. TU973

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 098245 号

中国电力出版社出版发行

北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>

策划编辑:梁 瑶 责任编辑:王 亮

责任印制:陈焊彬 责任校对:付珊珊

北京同江印刷厂印刷·各地新华书店经售

2008 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm 1/16 开本·18.25 印张·357 千字

定价:38.00 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

本社购书热线电话 (010-88386685)

前 言

现在,我国已成为西太平洋沿岸高层建筑发展的中心。其建造数量之多、发展速度之快、结构体系之复杂多变、建筑功能之完善,以及新体系、新技术、新材料的应用方面都是世界各国无法比拟的。其内在原因是我国国力增强和人多地少基本矛盾所致。同样由于这两个原因,我国高层建筑的各种新体系还会继续发展。20世纪90年代以来,我国高层建筑发展的特点是平面与立面的体形越来越复杂,建筑物的功能越来越综合与全面,结构形式也越来越多样化。高层建筑的发展要求计算理论和设计方法与之相适应。本书正是为适应这一要求而撰写的。在书中主要介绍了核心筒的扭转,复杂体型高层建筑空间协同工作体系弯扭耦联的简化分析,一类稳定、二类稳定及其二阶分析,钢结构考虑半刚节点的二阶分析和悬挂结构等。其中大部分是作者的部分研究成果。

本书依据《建筑结构荷载规范》(GB 50009—2001)和《高层建筑混凝土结构技术规程》(JGJ 3—2002, J 186—2002)新标准,介绍了高层建筑结构的计算理论和方法。其中,第1章介绍了框架结构的二阶分析;第2章详细介绍了芯筒结构的扭转计算;第3章介绍了复杂体型高层建筑的弯扭耦联计算;第4章介绍了巨型框架的简化分析方法;第5章介绍了悬挂结构的计算方法;第6章介绍了高层建筑结构地震反应时程分析。理论上说,借助于各种有限元,任何复杂结构都能计算。但如何帮助学生和技术人员了解不同结构形式的受力变形特点,掌握其力学性能,往往一些简化方法更能反映其本质。本书以介绍较为实用的简化方法为主,且只介绍杆系有限元。

作为一部学术著作,本书对一般设计所用公式大多都进行了推导,并重新计算了算例。本书力求概念清楚,深入浅出,联系实际,便于自学;但由于时间紧迫,水平有限,一定存在不少问题,望读者不吝赐教。

本书由周坚和伍孝波共同编写。其中,第1~4章由周坚编写,第5、6章由伍孝波编写;书中部分算例和插图由宋春霞、陈峥和王媛媛绘制。

编 者

目 录

前言

第 1 章 框架结构的二阶分析	1
1.1 钢筋混凝土框架	1
1.2 钢框架结构	2
1.3 基本假定	2
1.4 单元刚度矩阵	3
1.4.1 杆端弯矩与杆端位移之间的关系	3
1.4.2 节点位移与杆端力的关系、单元刚度系数	5
1.5 考虑轴力后的等效节点荷载	7
1.5.1 等效杆端固端力	7
1.5.2 等效节点固端力	8
第 2 章 芯筒结构的扭转计算	10
2.1 芯筒结构受力变形特点与计算方法	10
2.2 芯筒的自由扭转	11
2.3 开口截面芯筒的约束扭转——符拉索夫理论	12
2.4 主扇性极点、主扇性零点与主扇性几何特征	15
2.4.1 主扇性极点和主扇性零点应满足的条件	15
2.4.2 扇性极点与扇性零点改变时扇性面积 ω 的变换公式	16
2.4.3 主扇性极点和主扇性零点	17
2.4.4 截面的主扇性特征	19
2.5 约束扭转切应力、开口芯筒的广义应力——双力矩与弯扭力矩	26
2.5.1 约束扭转切应力	26
2.5.2 双力矩	27
2.5.3 弯扭力矩	29
2.5.4 截面上的总扭矩	30
2.6 扭转角的微分方程及其解，开口芯筒约束扭转时的广义位移与内力	30
2.7 开口芯筒约束扭转的初参数解法	32
2.7.1 在初始状态向量作用下的芯筒	32
2.7.2 在两种状态向量作用下的芯筒	34
2.7.3 在多个状态向量作用下的芯筒	35

2.7.4 变厚度开口芯筒约束扭转计算	35
2.8 芯筒约束扭转的边界条件	36
2.9 变厚度开口芯筒约束扭转的传递矩阵法	39
2.10 开口芯筒的有限元解法	45
2.10.1 约束扭转问题	45
2.10.2 一般空间问题	46
2.11 带有连梁的芯筒约束扭转的计算	49
2.11.1 传统的结构力学解法	49
2.11.2 带有连梁芯筒的传递矩阵法	56
2.11.3 带连梁芯筒的连续化解法 I	62
2.11.4 带连梁芯筒的连续化解法 II	63
2.12 芯筒结构的稳定与二阶分析	80
2.12.1 开口芯筒的稳定	80
2.12.2 带连梁芯筒的稳定	89
2.12.3 芯筒结构的二阶分析	89
2.12.4 只由自重引起的稳定	89
第3章 复杂体形高层建筑的计算	95
3.1 复杂体形高层建筑的受力变形特点与计算方法	95
3.2 三维空间协同工作体系弯扭耦联简化计算	95
3.2.1 基本方程的建立	96
3.2.2 基本方程的解	101
3.2.3 三种典型荷载作用下的计算公式和图表	102
3.2.4 计算步骤与算例	112
3.3 三维空间协同工作作用的弯扭耦联振动计算	118
3.3.1 自由振动方程	118
3.3.2 自振频率和振型的计算公式	120
3.3.3 计算步骤和算例	122
3.4 变刚度和带有收进的高层建筑弯扭耦联简化计算	126
3.4.1 引言	126
3.4.2 单元分析	126
3.4.3 各构件的位移与内力计算	131
3.5 复杂体形高层建筑考虑楼板平面内的变形的计算	136
3.5.1 基本平衡微分方程	137
3.5.2 边界条件和连续条件	142
3.6 复杂体形高层建筑考虑楼板变形时的振动计算	145
3.6.1 基本假设和计算模型	145
3.6.2 振动平衡方程	146
3.6.3 常微分方程特征值问题及其变换	147

3.6.4	用 COLSYS 求解步骤与算例	150
3.7	高层建筑空间协同工作体系的荷载分配与刚度中心	153
3.7.1	整体坐标系下第 i 个抗侧力构件的力与位移关系	153
3.7.2	分配系数矩阵	154
3.7.3	整体结构的刚度中心	155
3.8	高层建筑空间协同工作体系的一类稳定分析	158
3.8.1	局部坐标系下各构件的稳定微分方程	159
3.8.2	整体坐标系下整体结构的稳定微分方程	161
3.8.3	用 <i>Galerkin</i> 法求最小临界荷载	162
3.8.4	结论	165
3.9	高层建筑空间协同工作体系的二类稳定与二阶分析	166
3.9.1	基本假定	166
3.9.2	荷载分配	166
3.9.3	单个抗侧力结构在局部坐标系下的第二类稳定与二阶分析微分方程	167
3.9.4	整体结构的第二类稳定及二阶分析微分方程	170
3.9.5	第二类稳定问题的最小临界荷载与失稳形式	171
3.9.6	二阶分析时的位移与内力	175
3.9.7	结论	179
第 4 章	巨型框架的简化计算	180
4.1	巨型框架的受力特点与计算方法	180
4.2	平面巨型框架简化分析	181
4.2.1	基本假定	181
4.2.2	巨型框架梁单元的计算	181
4.2.3	巨型框架柱单元的计算	192
4.2.4	算例	196
4.3	空间巨型框架结构的计算	198
4.3.1	巨型梁单元的刚度方程	198
4.3.2	整体分析和算例	199
4.3.3	算例	199
4.3.4	讨论和结论	200
4.4	空间巨型框架结构的稳定计算	201
4.4.1	巨型压杆柱的几何非线性单元刚度矩阵	201
4.4.2	稳定问题的整体分析	203
4.4.3	算例	204
4.4.4	讨论和结论	205
4.5	空间巨型框架结构的动力计算	206
4.5.1	整体结构的运动方程	206
4.5.2	频率和振型计算与算例	207

第 5 章 悬挂结构的计算	210
5.1 悬挂结构的受力变形特点与计算方法	210
5.2 芯筒大梁式悬挂结构的动力计算	212
5.2.1 单吊杆悬挂结构的力学模型、振动方程与振动特性	212
5.2.2 双吊杆悬挂结构的力学模型、振动方程与振动特性	220
5.3 地震反应分析	232
5.3.1 单吊杆模型地震反应分析	232
5.3.2 双吊杆模型地震反应分析	233
5.4 芯筒大梁式悬挂结构的地震反应控制	235
5.4.1 力学模型与基本假定	235
5.4.2 公式推导	236
5.4.3 讨论	244
5.5 芯筒大梁式悬挂结构的三道抗震防线计算	245
5.5.1 悬挂结构的三道抗震防线设计概述	245
5.5.2 第一道抗震防线分析计算	246
5.5.3 第二道抗震防线分析计算	249
5.5.4 第三道抗震防线分析计算	250
第 6 章 高层建筑结构地震反应弹塑性时程分析	255
6.1 时程分析法概述	255
6.2 构件恢复力特性计算模型	257
6.2.1 恢复力模型	257
6.2.2 钢筋混凝土恢复力特性的特征参数	259
6.3 结构的振动模型及刚度矩阵	261
6.3.1 层模型	261
6.3.2 杆模型	266
6.3.3 杆系-层模型	271
6.4 结构的质量矩阵和阻尼矩阵	272
6.4.1 质量矩阵	272
6.4.2 阻尼矩阵	273
6.5 地震波的选取与调整	274
6.6 地震反应方程的数值积分法	276
6.6.1 Wilson- θ 法	276
6.6.2 Newmark- β 法	279
参考文献	282

第 1 章 框架结构的二阶分析

一阶分析忽略杆件轴力对弯曲变形的影响，但高层建筑上部结构的巨大重力有时对整体结构受力变形造成不利影响，设计时必须予以考虑。

1.1 钢筋混凝土框架

钢筋混凝土框架因构件尺寸较大，《高层建筑混凝土结构技术规程》（以下简称《高规》）规定，当满足

$$D_i \geq 20 \sum_{j=1}^n G_j / h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-1)$$

时可不考虑重力二阶效应的不利影响。

式中 D_i ——第 i 楼层的弹性等效侧向刚度，可取该层剪力与层间位移的比值；

G_j —— j 楼层重力荷载设计值；

h_i —— i 楼层层高。

上式说明，当第 i 层的等效侧移刚度不小于作用在该层的 20 倍的重力荷载集度时，就可以不考虑二阶效应。

当不满足以上条件时，可采用弹性方法计算；这将在本章钢框架部分介绍，但钢筋混凝土框架节点都是全刚节点。《高规》也指出，也可按照一阶分析的方法将结果乘以增大系数的方法近似计算。结构第 i 层位移增大系数 F_{1i} 和构件弯矩和剪力增大系数 F_{2i} 可按式 (1-2) 和式 (1-3) 计算

$$F_{1i} = \frac{1}{1 - \sum_{j=i}^n G_j / (D_i h_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-2)$$

$$F_{2i} = \frac{1}{1 - 2 \sum_{j=1}^n G_j / (D_i h_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-3)$$

同时要满足框架结构稳定性要求

$$D_i \geq 10 \sum_{j=i}^n G_j / h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-4)$$

1.2 钢框架结构

随着我国钢产量的提高,高层建筑中钢框架结构将越来越多。钢结构由于强度高、刚度小、变形大,结构的最大位移和层间位移将控制设计,因此只进行一阶分析是不够的。特别是对高层钢结构,下部若干层柱所承受的巨大轴力对弯曲变形的影响是不可忽略的。有时一、二阶分析的结果能相差1~2倍。此外,钢结构的计算值与实测值也有差异,一般计算值的位移偏小而杆端弯矩偏大,分析表明这与节点完全刚性假定有关,于是人们提出了半刚节点的概念。

以下各节采用经典理论导出二阶分析单元刚度矩阵,并考虑了半刚节点与杆件弯曲对轴向刚度的影响。计算了带有数字的算例,说明进行二阶分析、必须考虑半刚节点与杆件弯曲对轴向刚度的影响。

1.3 基本假定

(1) 各杆为等截面的直杆。

(2) 各杆截面双轴对称,轴力、剪力过截面形心(剪切中心),忽略扭转变形和截面翘曲的影响。

(3) 杆件限定在弹性范围内。

(4) 杆件两端半刚节点的抗弯刚度分别为 k_a 、 k_b (k_a 、 k_b 在 $0\sim\infty$ 之间变化,当 $k_a=k_b=0$ 时,即抗弯刚度为0,为铰接;当 $k_a=k_b=\infty$ 时,为完全刚接。在其中的数值反映其刚接的程度)。引入它们与杆件线刚度之比,记 $R_a=k_a/i$, $R_b=k_b/i$ ($i=EI/L$),则 R_a 、 R_b 为无量纲量,它们也在 $0\sim\infty$ 之间取值。引入固结系数的概念:

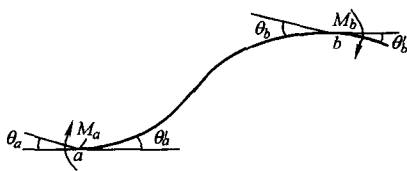


图 1-1 节点 a、b 的转角和弯矩

$$\left. \begin{aligned} \rho_a &= \frac{1}{1 + \frac{3}{R_a}} \\ \rho_b &= \frac{1}{1 + \frac{3}{R_b}} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

ρ_a 、 ρ_b 也为无量纲量,在 $[0, 1]$ 之间变化。当 $\rho_a=\rho_b=0$ 时,即铰结;当 $R_a=R_b=\infty$ 时, $\rho_a=\rho_b=1$ 。

设节点 a、b 的转角分别为 θ_a 、 θ_b ,杆 ab 的杆端 a 和杆端 b 的转角分别为 θ'_a 和 θ'_b ,杆端弯矩分别为 M_a 和 M_b ,如图 1-1 所示。则

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_a &= \theta'_a + \frac{M_a}{k_a} = \theta'_a + \xi_a M_a \\ \theta_b &= \theta'_b + \frac{M_b}{k_b} = \theta'_b + \xi_b M_b \end{aligned} \right. \quad (1-6)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} \xi_a &= \frac{1}{k_a} = \frac{1-\rho_a}{3\rho_a i} \\ \xi_b &= \frac{1}{k_b} = \frac{1-\rho_b}{3\rho_b i} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

1.4 单元刚度矩阵

1.4.1 杆端弯矩与杆端位移之间的关系

(1) 当 P 为压力时

由图 1-2 可以看出

$$M(x) = -M_A - V_A x + P v \quad (1-8)$$

由物理方程

$$EI v'' = -M(x) \quad (1-9)$$

代入式 (1-8) 后整理为

$$EI v'' + P v = M_A + V_A x \quad (1-10)$$

对上式求二阶导数, 并注意剪力与分布荷载集度的关系, 有二阶分析时杆件单元的微分方程为

$$EI v^{(4)} + P v'' = q(x) \quad (1-11)$$

式中 EI ——单元的抗弯刚度;

v ——单元的横向挠度;

P ——轴向压力;

$q(x)$ ——横向力集度。

对上式两边同除以 EI , 并令

$$k^2 = \frac{P}{EI} l^2 \quad (1-12)$$

上式变为

$$v^{(4)} + k^2 v'' = \frac{q(x)}{EI} \quad (1-13)$$

其齐次方程的解为

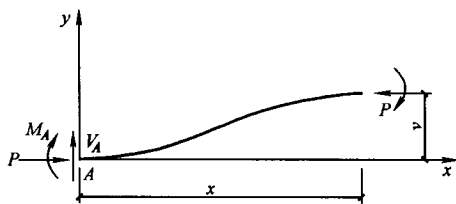


图 1-2

$$v(x) = C_1 \sin \frac{k}{l}x + C_2 \cos \frac{k}{l}x + C_3x + C_4 \quad (1-14)$$

求一阶导数

$$v'(x) = \frac{k}{l}C_1 \cos \frac{k}{l}x - \frac{k}{l}C_2 \sin \frac{k}{l}x + C_3 \quad (1-15)$$

当 $x=0$ 时,

$$v(0) = v_A = C_2 + C_4 \quad (1-16)$$

$$v'(0) = \theta_A = \frac{k}{l}C_1 + C_3 \quad (1-17)$$

$$\text{当 } x=l \text{ 时, } v(l) = v_B = C_1 \sin k + C_2 \cos k + C_3l + C_4 \quad (1-18)$$

$$v'(l) = \theta_B = \frac{k}{l}C_1 \cos k - \frac{k}{l}C_2 \sin k + C_3 \quad (1-19)$$

将式 (1-16) ~ 式 (1-19) 联立, 解出 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 , 代入式 (1-14) 后, 再按 v_A 、 v_B 、 θ_A 、 θ_B 合并同类项, 即可求得用杆端位移与转角表示的一般解。再对所得的 $v(x)$ 求二阶导数, 并按式 (1-9) 求得 $M(x)$, 以及用有限元中杆端力的正负号规定, 可得

$$M_a = \frac{k}{\tan k} \times \frac{\tan k - k}{2 \tan \frac{k}{2} - k} \times i\theta'_a + \frac{k}{\sin k} \times \frac{k - \sin k}{2 \tan \frac{k}{2} - k} \times i\theta'_b - \frac{k^2 \tan \frac{k}{2}}{2 \tan \frac{k}{2} - k} \times \frac{i}{l} (v_b - v_a)$$

令

$$r = \frac{k}{\sin k} \times \frac{k - \sin k}{2 \tan \frac{k}{2} - k}, \quad s = \frac{k}{\tan k} \times \frac{\tan k - k}{2 \tan \frac{k}{2} - k}, \quad t = \frac{k^2 \tan \frac{k}{2}}{2 \tan \frac{k}{2} - k}$$

则

$$M_a = si\theta'_a + ri\theta'_b - t \frac{i}{l} (v_b - v_a) \quad (1-20)$$

同理

$$M_b = ri\theta'_a + si\theta'_b - t \frac{i}{l} (v_b - v_a) \quad (1-21)$$

式中 M_a 、 M_b —— ab 杆 a 端的弯矩和 b 端的弯矩, 以顺时针为正;

θ'_a 、 θ'_b —— ab 杆 a 端的转角和 b 端的转角, 以顺时针为正;

v_a 、 v_b —— a 端和 b 端的横向位移, 与横向坐标轴一致为正;

i ——线刚度, $i = \frac{EI}{l}$;

l —— ab 杆杆长;

$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \times l$ ——特征长度。

(2) 当 P 为拉力时

二阶分析时杆件单元的微分方程为

$$EIv_k^{(4)} - Pv_k'' = q(x)$$

与前述方法一样, 可得 M_a 和 M_b 如同式 (1-20)、式 (1-21) 的形式, 但

其中

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{k^2 \cosh k - k \sinh k}{2 - 2 \cosh k + k \sinh k} \\ r &= \frac{k \sinh k - k^2}{2 - 2 \cosh k + k \sinh k} \\ t &= \frac{k^2 (1 - \cosh k)}{2 - 2 \cosh k + k \sinh k} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

1.4.2 节点位移与杆端力的关系、单元刚度系数

假定节点的线位移与杆端的线位移相等。由式 (1-6) 解出 θ'_a 、 θ'_b ，代入式 (1-20)、式 (1-21)，得

$$\left. \begin{aligned} M_a &= si(\theta'_a - \xi_a M_a) + ri(\theta'_b - \xi_b M_b) - t \frac{i}{l} (v_b - v_a) \\ M_b &= ri(\theta'_a - \xi_a M_a) + si(\theta'_b - \xi_b M_b) - t \frac{i}{l} (v_b - v_a) \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

设杆件 ab 所构成的单元节点位移向量和对应的杆端力向量按

$$\begin{aligned} \{u_a \quad v_a \quad \theta_a \quad u_b \quad v_b \quad \theta_b\}^T \\ \{N_a \quad V_a \quad M_a \quad N_b \quad V_b \quad M_b\}^T \end{aligned} \quad (1-24)$$

排列，则某一节点位移等于 1，而其他节点位移等于 0 时的 6 个杆端力就是该分量所对应的局部坐标系单元刚度矩阵中一列的元素。

(1) 当 $u_a = 1$ ，其余位移为零时

$$k_{11}^e = -k_{41}^e = s_1 \frac{EA}{l} \quad (1-25)$$

其中， s_1 为杆件横向弯曲对轴向刚度的修正系数。文献 [4] 建议

$$s_1 = \frac{1}{1 + (H_y + H_z)EA / (4P^3 l^2)} \quad (1-26)$$

当 P 为压力时

$$\begin{aligned} H_y &= k(M_{ya}^2 + M_{yb}^2) \left(\frac{1}{\tan k} + \frac{k}{\sin^2 k} \right) - 2(M_{ya} + M_{yb})^2 + \frac{2kM_{ya}M_{yb} \left(1 + \frac{k}{\tan k} \right)}{\sin k} \\ H_z &= \bar{k}(M_{za}^2 + M_{zb}^2) \left(\frac{1}{\tan \bar{k}} + \frac{\bar{k}}{\sin^2 \bar{k}} \right) - 2(M_{za} + M_{zb})^2 + \frac{2\bar{k}M_{za}M_{zb} \left(1 + \frac{\bar{k}}{\tan \bar{k}} \right)}{\sin \bar{k}} \end{aligned} \quad (1-27)$$

这里 $\bar{k} = \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \times l$ 。

当 P 为拉力时

$$H_y = k(M_{ya}^2 + M_{yb}^2) \left(\frac{1}{\tanh k} + \frac{k}{\sinh^2 k} \right) - 2(M_{ya} + M_{yb})^2 + \frac{2kM_{ya}M_{yb} \left(1 + \frac{k}{\tanh k} \right)}{\sinh k}$$

$$H_z = \bar{k}(M_{za}^2 + M_{zb}^2) \left(\frac{1}{\tanh \bar{k}} + \frac{\bar{k}}{\sinh^2 \bar{k}} \right) - 2(M_{za} + M_{zb})^2 + \frac{2\bar{k}M_{za}M_{zb} \left(1 + \frac{\bar{k}}{\tanh \bar{k}} \right)}{\sinh \bar{k}}$$
(1-28)

$$k_{21}^e = k_{31}^e = k_{51}^e = k_{61}^e = 0 \quad (1-29)$$

(2) 当 $v_a = 1$, 其他分量都等于 0 时, $M_a = k_{32}^e$, $M_b = k_{62}^e$

由式 (1-20)、式 (1-21) 得

$$\left. \begin{aligned} k_{32}^e &= -si\xi_a k_{32}^e - ri\xi_b k_{62}^e + t \frac{i}{l} \\ k_{62}^e &= -ri\xi_a k_{32}^e - si\xi_b k_{62}^e + t \frac{i}{l} \end{aligned} \right\}$$

求解可得

$$\left. \begin{aligned} k_{32}^e &= \frac{ti(1 + si\xi_b - ri\xi_a)}{l[(1 + si\xi_a)(1 + si\xi_b) - (ri)^2 \xi_a \xi_b]} \\ k_{62}^e &= \frac{ti(1 + si\xi_a - ri\xi_b)}{l[(1 + si\xi_a)(1 + si\xi_b) - (ri)^2 \xi_a \xi_b]} \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

由图 1-3 静力平衡条件可得

$$V_a = k_{22}^e = \frac{M_a + M_b + Pl}{l} = \frac{M_{32}^e + M_{62}^e + P}{l} = -V_b = -k_{52}^e \quad (1-31)$$



图 1-3 静力平衡条件

(3) 当 $\theta_a = 1$, 其余分量都等于 0。

$$M_a = k_{33}^e, \quad M_b = k_{63}^e.$$

由式 (1-23) 可得

$$\left. \begin{aligned} k_{33}^e &= si(1 - \xi_a k_{33}^e) - ri\xi_b k_{63}^e \\ k_{63}^e &= ri(1 - \xi_a k_{33}^e) - si\xi_b k_{63}^e \end{aligned} \right\}$$

求解可得

$$\left. \begin{aligned} k_{33}^e &= \frac{1 + si\xi_b - (ri)^2}{(1 + si\xi_a)(1 + si\xi_b) - (ri)^2 \xi_a \xi_b} \\ k_{63}^e &= \frac{ri}{(1 + si\xi_a)(1 + si\xi_b) - (ri)^2 \xi_a \xi_b} \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

由图 1-4 所示单元静力平衡条件可得

$$V_a = k_{23}^e = -\frac{M_a + M_b}{l} = -\frac{k_{33}^e + k_{63}^e}{l} = -k_{53}^e \quad (1-33)$$

同理可求得

$$k_{44}^e = k_{11}^e, \quad k_{55}^e = k_{22}^e, \quad k_{65}^e = k_{32}^e, \quad k_{66}^e = k_{33}^e \quad (1-34)$$



图 1-4 单元静力平衡条件

二阶分析杆件单元刚度矩阵也具有对称性，其他元素都可求出。

1.5 考虑轴力后的等效节点荷载

1.5.1 等效杆端固端力

(1) 集中荷载：设集中荷载 G 作用在距 a 、 b 端分别为 αl 、 βl 处，当 P 为压力时

$$\left. \begin{aligned} M'_{fa} &= -\eta_a Gl \\ M'_{fb} &= \eta_b Gl \end{aligned} \right\} \quad (1-35)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \eta_a &= \frac{\alpha(1 - \cos k) - (1 - \cos \alpha k) \left(\frac{\sin k}{k} - \cos k \right) + \left(\frac{1 - \cos \alpha k}{k} - \sin k \right) \sin \alpha k}{2 - 2 \cos k - k \sin k} \\ \eta_b &= \frac{\beta(1 - \cos k) - (1 - \cos \beta k) \left(\frac{\sin k}{k} - \cos k \right) + \left(\frac{1 - \cos \beta k}{k} - \sin k \right) \sin \beta k}{2 - 2 \cos k - k \sin k} \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

当 P 为拉力时

$$\left. \begin{aligned} M'_{fa} &= -\eta_a Gl \\ M'_{fb} &= \eta_b Gl \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \eta_a &= \frac{\alpha(1 - \cosh k) - (1 - \cosh \alpha k) \left(\frac{\sinh k}{k} - \cosh k \right) + \left(\frac{1 - \cosh \alpha k}{k} - \sinh k \right) \sinh \alpha k}{2 - 2 \cosh k - k \sinh k} \\ \eta_b &= \frac{\beta(1 - \cosh k) - (1 - \cosh \beta k) \left(\frac{\sinh k}{k} - \cosh k \right) + \left(\frac{1 - \cosh \beta k}{k} - \sinh k \right) \sinh \beta k}{2 - 2 \cosh k - k \sinh k} \end{aligned} \right\} \quad (1-38)$$

(2) 均布荷载。

当 P 为压力时

$$M'_{fa} = -M'_{fb} = -\frac{ql^2}{2k^2} \times \frac{k^2(1 + \cos k) + 4(1 + \cos k) - 4k \sin k}{2 - 2 \cos k - k \sin k} \quad (1-39)$$

当 P 为拉力时

$$M'_{fa} = -M'_{fb} = -\frac{ql^2}{2k^2} \cdot \frac{k^2(1+\cosh k) - 4(1-\cosh k) - 2k(\sinh k + \cosh k)}{2 - 2\cosh k - k\sinh k} \quad (1-40)$$

1.5.2 等效节点固端力

所谓节点固端力就是节点的转角和线位移均为零时的固端力。对于半刚节点, 设节点 a 、 b 的固端弯矩分别为 M_{fa} 、 M_{fb} , 由前面已知二节点的抗弯刚度分别为 k_a 和 k_b , 故在节点固端弯矩作用下节点 a 、 b 的转角分别为 $M_{fa}/k_a = \theta_a$, $M_{fb}/k_b = \theta_b$; 于是 θ_a 和 a 端产生的弯矩为 $si\theta_a = siM_{fa}/k_a$, θ_b 在 b 端产生的弯矩为 $ri\theta_b = riM_{fb}/k_b$, 根据节点 a 的弯矩平衡条件

$$M_{fa} + \frac{si}{k_a}M_{fa} + \frac{ri}{k_b}M_{fb} = M'_{fa}$$

即 $(1 + \xi_a si)M_{fa} + \xi_b ri M_{fb} = M'_{fa} \quad (1-41)$

同理在 b 端有

$$(1 + \xi_b si)M_{fb} + \xi_a ri M_{fa} = M'_{fb} \quad (1-42)$$

将以上二式联立可求得

$$\left. \begin{aligned} M_{fa} &= \frac{M'_{fa}(1 + \xi_b si) - M'_{fb}\xi_b ri}{(1 + \xi_a si)(1 + \xi_b si) - \xi_a \xi_b r^2 i^2} \\ M_{fb} &= \frac{M'_{fb}(1 + \xi_a si) - M'_{fa}\xi_a ri}{(1 + \xi_a si)(1 + \xi_b si) - \xi_a \xi_b r^2 i^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

单元节点固端剪力可由平衡条件 $\sum M_a = 0$ 或 $\sum M_b = 0$ 由静力法求得。单元等效节点荷载为固端的反号, 不再赘述。

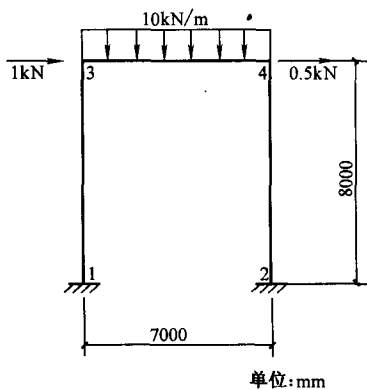


图 1-5 计算简图

例 1-1 一单层钢框架如图 1-5 所示。柱高 8m, 截面采用 I32a 工字钢。先用一阶分析求出各杆的轴力与弯矩后, 再进行二阶分析。

解: 表 1-1 给出了一阶分析, 考虑半刚节点与杆件弯曲对轴向刚度影响以及不考虑杆件弯曲对轴向刚度影响 ($s_1 = 1.0$) 的二阶分析时节点 3 的侧移 (最大侧移)。可以看出: 有时一、二阶分析的结果最大侧移能相差 1~2 倍, 说明进行二阶分析, 考虑半刚结点与杆件弯曲对轴向刚度的影响是必要的; 在本例中是否考虑杆件弯曲对轴向刚度的影响对最大侧移影响不大。

表 1-2 给出了一、二阶分析时不同节点刚度 (k_a) 对杆件 34 杆端 3 弯矩的影响。

表 1-1 一、二阶分析节点 3 侧移 u (单位: m)

$k_a/(kN \cdot m)$		1.32E4	1.32E6	1.32E8	1.32E14	1.32E30	一阶分析
二阶分析	考虑横向弯矩对轴向刚度影响	0.16486E-1	0.75256E-2	0.74332E-2	0.74323E-2	0.74323E-2	0.73260E-2
	不考虑横向弯矩对轴向刚度影响	0.16486E-1	0.75174E-2	0.74249E-2	0.74241E-2	0.74241E-2	

表 1-2 一、二阶分析杆件 34 杆端 3 弯矩 M (单位: $kN \cdot m$)

$k_a/(kN \cdot m)$		1.32E4	1.32E6	1.32E8	1.32E14	1.32E30	一阶分析
二阶分析	考虑横向弯矩对轴向刚度影响	0.60061E2	0.62342E2	0.62336E2	0.62336E2	0.62336E2	0.19485E2
	不考虑横向弯矩对轴向刚度影响	0.60057E2	0.62333E2	0.62327E2	0.62327E2	0.62327E2	