高等学校数学及其应用系列丛书

数学建模

沈继红 施久玉 高振滨 张晓威◎编著

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

数学建模

沈继红　施久玉
高振滨　张晓威　编著

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书内容包括初等模型、微分方程模型、数学规划模型、对策和决策模型、图论及网络分析模型、概率统计模型、灰色系统理论及其应用、Mathematica软件简介、综合实习题。各节附有思考题，各章附有习题。

本书可作为高等院校数学建模（模型）课程的教材，也可供高年级学生、研究生、教师及科学技术工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/沈继红等编著.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.11

ISBN 978-7-81133-067-0

Ⅰ.数… Ⅱ.沈… Ⅲ.数学模型 Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第161945号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 850mm×1 168mm 1/32
印　　张 11.5
字　　数 300千字
版　　次 2007年11月第1版
印　　次 2007年11月第1次印刷
定　　价 19.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

最近几十年,随着各种科学技术尤其是计算机技术的发展,数学正以其神奇的魅力进入各种领域。它的功效显著,其解决问题的卓越能力甚至使它渗透到一些非物理领域。数学作为一种“技术”,日益受到人们的重视。

在新的形式下,大学的数学教学也面临着改革。为了使大学毕业生尽快地适应工作岗位,能够较好地解决各种实际问题,大学数学课程的设置不能仅仅只教学生一些数学定理和方法,更重要的是要教会他们怎样运用手中的数学武器去解决实际问题,这便是开设数学建模这门课程的目的。作为一门新兴的学科,数学建模正日益焕发出其独特的魅力。

本书是在多年总结数学建模实践教学基础上编写的。本书在编写过程中力求简练明了,使读者易于从实际问题的建模及解决中抓住主要的思想。应该指出的是,培养一种“建模”的数学思维往往要比学会几门课程有用得多。另外,本书注重数学知识的应用性与趣味性的结合,书中所选问题既实际又有趣味性,诸如核战争问题、气功问题及清理“三角债”问题等,从而增加了数学的实用性,使之比较容易地被读者接受。本书共分十章,在编排上,基本上采取按专业方向分类的方法分列各章,在每节后附思考题,在每章后附习题。使用本书的读者应具有高等数学、线性代数、常微分方程及概率统计方面的知识。

为了使读者能够体验或检验亲自动手解决实际问题的能力,我们还特别撰写了综合实习题,其内容全部是日常生活中的实际题目。相信这样做会帮助读者在学完本书后能够在应用知识的能力上有一个切实的提高。

本书编入了编者们在最近一个阶段研究的一些科研成果,如

围棋模型、图论模型及 Mathematica 软件开发等，衷心希望本书的出版会给数学教学注入一份活力。

由于编写时间仓促，作者水平有限，书中尚存许多不足和错误，望广大读者批评指正。

编著者

2007 年 10 月

目　　录

第一章　数学建模(模型)概述

我们以及我们这个世界太需要数学了，但我们往往视而不见。自人类萌发了认识自然之念、幻想着改造自然之时，数学便一直成为人们手中的有力武器。牛顿的万有引力定律、伽利略发明的望远镜让世界震惊，其关键的理论工具竟是数学。然而，社会的发展使数学日益脱离自然的轨道，逐渐发展成高深莫测的“专项技巧”。数学被神化，同时，又被束之高阁。

近半个世纪以来，数学的形象有了很大的变化。数学已不再单纯是数学家和少数物理学家、天文学家、力学家等人手中的神秘武器，它越来越深入地应用到各行各业之中，几乎在人类社会生活的每个角落都在展示它的无穷威力。这一点尤其表现在生物、政治、经济以及军事等数学应用的非传统领域。数学不再仅仅作为一种工具和手段，而日益成为一种“技术”参与到实际问题中。近年来，随着计算机的不断发展，数学的应用更得到突飞猛进的发展。

利用数学方法解决实际问题时，首先要进行的工作是建立数学模型，然后才能在此模型的基础上对实际问题进行理论求解、分析和研究。需要指出的是，虽然数学在解决实际问题时会起到关键的作用，但数学模型的建立却要符合实际的情况。如果建立的模型本身与实际问题相差甚远，那么，即使在理论分析中采用怎样巧妙的数学处理，所得到的结果也会与实际情况不符。因此，建立一个较好的数学模型乃是解决实际问题的关键之一。

§1.1 数学模型概念

或许我们对客观实际中的模型并不陌生。敌对双方在某地区作战时，都务必要有这个地区的主体作战地形模型；在采煤开矿或打井时，我们需要描绘本地区地质结构的地质图；出差或旅游到外地，总要买一张注明城市中各种地名及交通路线的交通图；编计算机程序，往往要先画框图。我们看到，这些图都能简单又很明了地说明我们所需要的事物的特性，从而帮助我们顺利地解决各种实际问题。

模型在我们的生活中也是无处不在的。进入科技展厅，我们会看到水电站模型、人造卫星模型；游逛魔幻城，我们会面对各种几乎逼真的模拟物惊诧万分；为了留念，我们会同美丽的风景一起留在照片上。还有各种动物或飞机、汽车等儿童玩具，这些以不同方式被缩小了的客观事物都是我们生活中极平常的模型。

一般地说，模型是我们所研究的客观事物有关属性的模拟，它应当具有事物中我们关心和需要的主要特性。

当然，数学模型较以上实物模型或形象模型复杂和抽象得多，它是运用数学的语言和工具，对部分现实世界的信息（现象、数据等）加以翻译、归纳的产物。数学模型经过演绎、求解以及推断，给出数学上的分析、预报、决策或控制，再经过翻译和解释，回到现实世界中。最后，这些推论或结果必须经受实际的检验，完成实践——理论——实践这一循环（如图 1－1）。如果检验的结果是正确或基本正确的，即可用来指导实际，否则，要重新考虑翻译、归纳的过程，修改数学模型。

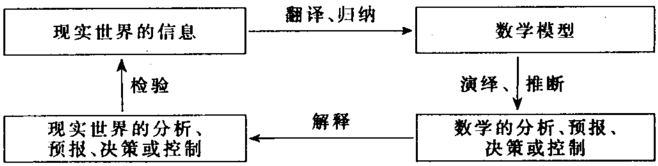

图 1-1

作为一种数学思考方法，数学模型是对现实的对象通过心智活动构造出的一种能抓住其重要而且有用的（常常是形象化的或者是符号的）表示。更具体地，它是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制。

§1.2 一个简单的数学模型实例

一辆汽车在拐弯时急刹车，结果冲到路边的沟里（见图 1-2）。交通警察立即赶到了事故现场。司机申辩说，当他进入弯道时刹车失灵。他还一口咬定，进入弯道时其车速为 40 英里/小时（该路的速度上限，约合 17.92 米/秒）。警察验车时证实该车的制动器在事故发生时的确失灵，然而，司机所说的车速是否真实呢？

现在，让我们帮警察来计算一下司机所报车速的真实性。

连接刹车痕迹的初始点和终点，用 x 表示沿连线汽车横向走出的距离，用 y 表示竖直的距离（如图 1-3）。表 1-1 给出了外侧刹车痕迹的有关值。

表 1-1　　　　单位：米

x	0	3	6	9	12	15	16.64	18	21	24	27	30	33.27
y	0	1.19	2.15	2.82	3.28	3.53	3.55	3.54	3.31	2.89	2.22	1.29	0

经过勘测还发现，该车并没有偏离它行驶的转弯曲线，也就是说车头一直指向切线方向。可以假设，该车的重心是沿一个半径为 r 的圆做圆周运动。假定摩擦力作用在汽车速度的法线方向上，设汽车的速度 v 是个常数。显然，摩擦力提供了向心力，设摩擦系数为 μ，则

$$\mu m g = m\frac{v^2}{r} \qquad (1-1)$$

其中 m 为汽车质量。由上式易得

$$v = \sqrt{\mu g r}$$

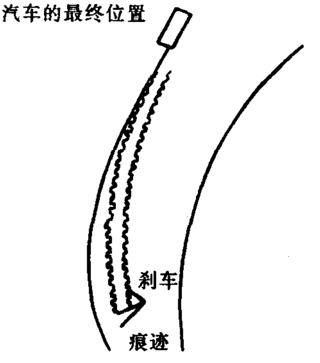

图 1－2

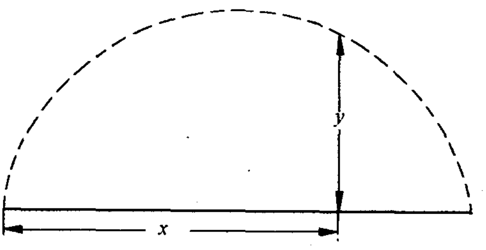

图 1－3

如何计算圆周半径 r？假设已知弦的长度为 c，弓形的高度为 h（见图 1－4），由勾股定理知

$$r^2 = (r-h)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

由表 1－1 代入近似的数据 $c=33.27$ 和 $h=3.55$，得

$$r = 40.75 \text{ 米}$$

根据实际路面与汽车轮胎的情况，可以测出摩擦系数 μ。实际测试得到

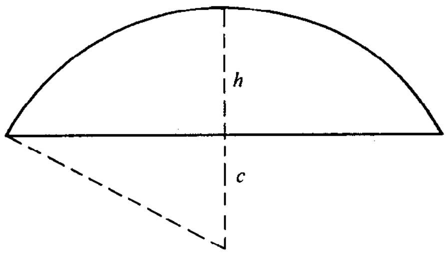

图 1－4

$$\mu g = 8.175 \text{ 米 / 秒}^2$$

将此结果代入(1－1)式，得到

$$v \approx 18.25 \text{ 米 / 秒}$$

此结果比司机所报速度(17.92 米/秒)略大。但是，我们不得不考虑计算半径 r 及测试时的误差。如果误差允许在 10%以内，无疑，计算结果对汽车司机是有利的。

§1.3 建立数学模型的方法、步骤和模型的分类

建立数学模型主要采用机理分析及统计分析两种方法。机理分析法是指人们根据客观事物的特性，分析其内部的机理，弄清其因果关系，再在适当的简化假设下，利用合适的数学工具得到描述事物特征的数学模型。统计分析法是指人们一时得不到事物的特征机理，便通过测试得到一串数据，再利用数理统计知识对这串数据进行处理，从而得到最终的数学模型。

建立数学模型需要哪些步骤并没有固定的模式，下面只是按照一般情况，提出一个建立模型的大体过程。

1. 建模准备

要了解问题的实际背景、明确建立模型的目的,掌握对象的各种信息如统计数据等,弄清实际对象的特征,总之,是要做好建立模型的准备工作。这一步往往要大量查阅资料,请教专家,以便对问题有透彻的了解。

2. 模型假设

根据实际对象的特性和建模的目的,对问题进行必要的简化,并且用精确的语言做出假设,是建立模型的第二步,也可以说是关键的一步。有时,假设做得过于详细,试图把复杂的实际现象的各个因素都考虑进去,可能使你很难继续下一步的工作。所以,要善于辨别问题的主要和次要方面,抓住主要因素,抛弃次要因素,尽量将问题均匀化、线性化。

3. 建立模型

根据所做的假设,利用适当的数学工具,建立各个量之间的等式或不等式关系,列出表格,画出图形或确定其它数学结构,是建立数学模型的第三步。为了完成这项数学模型的主体工作,人们常常需要具有比较广阔的应用数学知识,除了微积分、微分方程、线性代数及概率统计等基础知识外,还会用到诸如规划论、排队论、图与网络及对策论等。推而广之,可以说任何一个数学分枝都可能应用到建模过程中。当然,这并非是要求你对数学的各个分枝都精通。事实上,建模时还有一个原则,即尽量采用简单的数学工具,以便使更多的人了解和使用。

4. 模型求解

对以上建立的模型进行数学上的求解,包括解方程、画图形、证明定理以及逻辑运算等,会用到传统的和近代的数学方法,特别

是计算机技术。

5. 模型分析

对上边求得的模型结果进行数学上的分析。有时是根据问题的性质，分析各变量之间的依赖关系或稳定性态；有时则根据所得结果给出数学上的预测；有时则是给出数学上的最优决策或控制。

6. 模型检验

这一步是把模型分析的结果"翻译"回到实际对象中，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性。显而易见，这一步对于模型的成败是非常重要的，并且是必不可少的。当然，诸如核战争等问题的模型就不可能要求接受实际的检验。

如果检验结果不符合或部分不符合实际情况，那么我们必须回到建模之初，修改、补充假设，重新建模，即再按上述步骤做到模型检验这一步；如果检验结果与实际情况相符，则可进行最后的工作——模型应用。图 1－5 是上述步骤的直观表示，我们看到，数学建模实际上是经过若干次循环而逐渐接近真理的过程。

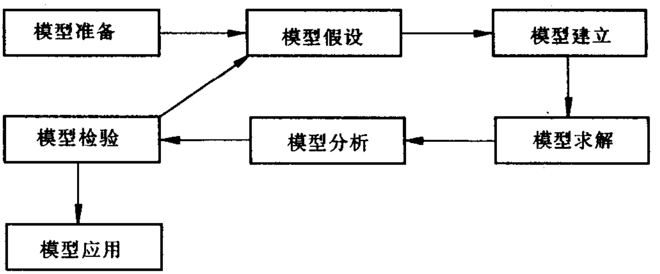

图 1－5

应该指出的是，并非所有建模过程都要经过上述这些步骤，有时各个步骤之间的界限也并不那么明显。因此，在建模过程中不要

局限于形式上的按部就班，重要的是根据对象的特点和建模的目的，去粗取精，去伪存真，从简到繁，不断完善。

模型的分类很复杂，按照不同的考虑方式，有不同的分类方法，这里仅列举几种。

按照变量的情况，可分为离散模型和连续模型，也可分为确定性模型和随机性模型等等；按照时间变化对模型的影响，可分为静态模型和动态模型等；按照研究方法和对象的特征，有初等模型、优化模型、逻辑模型、稳定性模型、扩散模型等；按照研究对象的实际领域，有人口模型、交通模型、体育模型、生理模型、生态模型、经济模型、社会模型等。

按照对研究对象的了解程度，有所谓的白箱模型、灰箱模型和黑箱模型。这是把研究对象比喻为一只箱子里的机关，我们要通过建模过程来揭示它的奥妙。白箱是指可以用象力学、电学等一些机理清楚的学科来描述的现象。灰箱主要指化工、水文、地质、气象、交通以及经济等领域中机理尚不完全清楚的现象，对这类问题在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做。本书将要介绍的灰色系统即属这方面的研究，它是对给出的有限信息进行合理化的加工处理，从而使问题清晰化。至于黑箱，主要包括生态、生理、医学、社会等领域中一些机理（指数量关系方面）更不清楚的现象。当然，白、灰、黑之间并没有严格的界限，随着科学技术的发展，箱子的“颜色”是会逐渐由暗变亮的。

§1.4 开放性的数学思维

应当特别指出的是，要学会建立数学模型，除了要学会灵活应用数学的知识外，还应当培养自己分析和解决问题的观察力、想象力和创造力。知识是有限的，而想象力和创造力却可使知识无限地延展。在对实际问题进行建模的过程中，必须善于从习惯的思维模

式中跳出来，敢于向传统知识挑战，尝试一种与解决数学问题不同的经历，建立更为开创、综合、灵活的学习方法。从这种意义上讲，掌握开放性的数学思维的方法比获得严谨的理论知识更为重要。

古希腊有一个极善于诡辩的哲学家芝诺，他曾认为，如果让乌龟先爬行一段路后再让阿基里斯（古希腊神话中善跑的英雄）去追它，那么阿基里斯将永远也追不上前者。芝诺的理论根据是：阿基里斯在追上乌龟前必须先到达乌龟的出发点，这时乌龟已向前爬了一段路程，于是，阿基里斯必须赶上这段路，可是，乌龟此时又向前爬了一段路。如此分析下去，阿基里斯虽然离乌龟越来越近，但却永远也追不上乌龟。这种结论显然是错误的，但奇怪的是，从逻辑上讲，这种推理却没有任何毛病。

下面，我们从数学的角度来分析一下这个问题。假设阿基里斯跑的时候乌龟已爬了 s_1 米到 A_1 点，阿基里斯追到 A_1 点时乌龟又向前爬了 s_2 米到达 A_2 点……假设阿基里斯的速度是乌龟的 100 倍，则阿基里斯追到 A_n 点时乌龟向前爬了

$$s_n = \frac{s_{n-1}}{100}$$

递推上式得

$$s_n = \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} s_1$$

显然，当 n 越大时，阿基里斯离乌龟的距离 s_n 将越小，而且将无限地小下去，无限到几乎是零，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$。也就是说，阿基里斯最终将追上乌龟。

这种无限小到零的极限思想如果仍不被芝诺“接受”的话，我们将利用求无穷级数的和的办法精确地指出在何处阿基里斯将追上乌龟。事实上，按照芝诺的推理方法，我们得到阿基里斯在追乌龟的过程中共跑了

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \\ &= s_1 + \frac{1}{100}s_1 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 s_1 + \cdots + \left(\frac{1}{100}\right)^n s_1 + \cdots \end{aligned}$$