■ 高等学校理工科数学类规划教材

泛函分析

FUNCTIONAL ANALYSIS

张鸿庆 编著

中西合璧，探索数学真谛。用东方文化济西方科学之穷，用哲学家的睿思、诗人的慧眼，将晦涩难懂的现代数学点化成精神上可以纵横驰骋、理性上可以自由翱翔的充满诗情画意的艺术空间。

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数学类规划教材

泛函分析

FUNCTIONAL ANALYSIS

张鸿庆　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/张鸿庆编著．—大连:大连理工大学出版社，2007.5

ISBN 978-7-5611-3566-2

Ⅰ.泛…　Ⅱ.张…　Ⅲ.泛函分析—研究生—教材　Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 053171 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　　印张:8　　字数:130 千字

2007 年 5 月第 1 版　　2007 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑:梁　锋　王　伟　　责任校对:婕　琳

封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-3566-2　　定　价:18.00 元

探索无穷维空间的设想和艺术

——应用泛函分析臆说

（代前言）

一般地说，我们把中学里学的数学叫做初等数学，把大学里学的数学叫做高等数学.对于刚进入大学的学生来说，对初等数学比较熟悉，对高等数学还比较陌生，掌握起来也比较困难.而且随着数学的迅速发展，高等数学已经形成汪洋恣肆、博大精深的体系，虽皓首穷经亦不足尽其万一，并且这种趋势将势不可挡，数学发展的洪流可能会分裂成为越来越细小的溪渠，“由博返约，以简御繁”已成为刻不容缓的任务.“易简功夫终久大，支离事业竟浮沉”，我们希望把高等数学弄得简单一些，希望高等数学能像初等数学那样简单明了，只有简单才是成熟的美丽.因此，分析几何化、分析代数化、分析算术化已成为重要的发展趋势.

20世纪初，Hilbert指出，如同n维欧氏空间的一个点由它的n个坐标确定一样，一个函数可由它的Fourier系数f_i给出，这些系数满足$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < +\infty$.他还引进了实数序列$\{x_i\}$满足$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$. Schmidt和Frechet把这个序列$\{x_i\}$看成一个点，Riesz和Fisher证明在Lebesgue平方可积函数与它们的Fourier系数之间存在着一一对应关系，平方可和序列可以看成无穷维空间中的坐标.这种无穷维空间是欧氏空间的推广，许多分析的结果都可以在无穷维空间中得到几何解释.我们可以用下述几何类比的方法将分析结果赋予几何意义：

	欧氏空间	无穷维空间
向量	$(f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(n)})$	函数 $f(x)$
长度	$\\| f \\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (f^{(i)})^2$	$\\| f \\|^2 = \int_{\Omega} f^2(p) \mathrm{d}\Omega$

距离	$\rho(f_1,f_2)=\Vert f_1-f_2\Vert$ $=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(f_1^{(i)}-f_2^{(i)})^2\right]^{\frac{1}{2}}$	$\rho(f_1,f_2)=\Vert f_1-f_2\Vert$ $=\left(\int_\Omega \lvert f_1-f_2\rvert^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}$
收敛	$f_n\to f\Leftrightarrow \Vert f_n-f\Vert\to 0$	$f_n\to f\Leftrightarrow \Vert f_n-f\Vert\to 0$
内积	$(f_1,f_2)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_1^{(i)}f_2^{(i)}$	$(f_1,f_2)=\int_\Omega f_1(p)f_2(p)\mathrm{d}\Omega$
正交	$(f_1,f_2)=0$	$(f_1,f_2)=0$
标准正交基	$\{e_i\}$	$\{\psi_i\}$

其中

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}\qquad\qquad (\psi_i,\psi_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

且 $\forall f\in\mathbf{E}^n$ 有

$$f=\sum_{i=1}^{n}f^{(i)}e_i\qquad\qquad f=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\psi_k$$

$f^{(i)}$ 是 f 的坐标,即 f 在 e_i 上的投影　　　　f_k 是 f 的 Fourier 系数

$$f^{(i)}=(f,e_i)\qquad\qquad f_k=(f,e_k)$$

通过这种类比,给函数定义长度、距离和内积,并把这样得到的在 Ω 上带有长度和内积的 Lebesgue 平方可积的函数的集合叫做 L^2 空间,记以 $L^2(\Omega)$. $L^2(\Omega)$ 是无穷维空间,有限维空间里高等数学中的许多问题就变成空间 $L^2(\Omega)$ 上的初等几何,高等数学的许多结果在无穷维空间中可以得到统一的解释.例如,$f(x)$ 可以按 Fourier 级数展开,也可以按 Bessel 函数、Legendre 函数以及其他的正交函数系展开,这些函数都是 $L^2(\Omega)$ 中的正交坐标系,按不同的函数系展开,只不过是按不同坐标系的表示.初等几何中的结果推广到无穷维空间就成为高等数学中的定理.例如,n 维空间中的勾股弦定理,

$$\forall f\in\mathbf{E}^n,\ \Vert f\Vert^2=\sum_{i=1}^{n}f_i^2.$$

将这个定理推广到无穷维空间 $L^2(\Omega)$ 中就有

$$\Vert f\Vert^2=\sum_{i=1}^{\infty}f_i^2,$$

这里

$$\Vert f\Vert^2=\int_\Omega \lvert f\rvert^2\mathrm{d}\Omega,$$

$$f_i=\int_\Omega f(p)\psi_i(p)\mathrm{d}\Omega,$$

$\{\psi_i(p)\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的单位正交系,这就是 Fourier 级数理论中的 Parseval 恒等式.

再例如，若 $\boldsymbol{f}$ 是平面 $\mathbf{E}^2$ 外的任意一点，则过 $\boldsymbol{f}$ 可向平面 $\mathbf{E}^2$ 能作且只能作一条垂线. 设垂足是 $\boldsymbol{f}_0$，则 $\boldsymbol{f}_0$ 是平面 $\mathbf{E}^2$ 上距 $\boldsymbol{f}$ 最近的点. 若 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是平面 $\mathbf{E}^2$ 上彼此正交的单位向量，则

$$\boldsymbol{f}_0 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2.$$

将这个结果推广到无穷维空间. 设 $\{\psi_i\}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的标准正交系，$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$ 生成 $L^2(\Omega)$ 的有限维子空间，记以 P_m. 设 $f \notin P_m$，则 P_m 中按 $L^2(\Omega)$ 中的距离定义距 f 最近的点就是

$$f_0 = \sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k,$$

其中

$$C_k = (f, \psi_k).$$

用高等数学的术语来说，上述结果就是：一个函数的 Fourier 级数前 n 项之和是对函数在最小二乘意义下的最佳逼近.

上述事实给我们一个重要启迪，高等数学可以看成无穷维空间的初等几何. 我们将初等数学的结果用高等数学的术语来表述，就得到高等数学中的定理. 用这个方法不仅可以解释高等数学中许多已有的结果，还可以用来预测新的结果. “欲穷千里目，更上一层楼”，古人懂得，只有增加到三维空间的高度，从三维空间来看二维空间，才能看得更远，才能登泰山而小天下. 数学家比诗人更富于想象力，站得更高，为了将有穷维空间的结果解释得更清楚，必须站到无穷维空间中去考虑问题. 正是：“古人登高意气豪，绝顶一览众山小，哪知天出九天外，更比九天无限高.”

对于学数学而言，“听数学不如读数学，读数学不如做数学.” 听老师讲懂不如自己读懂，读懂不如自己独立地做出来. 在学习一门课程之前，先提出这门课的任务，独立地设想这门课程应该有什么样的体系，什么样的定理. 猜体系、猜定理、猜证明，先猜后证，然后将自己猜测的结果和书本上的结果比较，寻找两者之间的差距. 直觉是发明的工具，逻辑是证明的工具，只知逻辑推理往往只见树木，不见森林，借助直觉才能一眼就看清整个逻辑大厦的蓝图. 提出新的观点、发现新的意想不到的结果与联系，是数学发展的主要动力. 没有新观点、新目标的不断揭露，数学在追求严格和逻辑的推理过程中很快就会筋疲力尽，会由于缺乏新材料而停滞不前. 因此数学的发展主要是由那些依靠直觉而不是那些依靠逻辑严密性的人来推进的. 所以说直觉是数学发展最重要的工具.

综上所述，我们这本书要讲直观、讲历史、讲理解、讲原型、讲欣赏、讲意

境、讲设计、讲洞察、讲猜测、讲发展.除形式化语言体系外,我们还试图建立以直观为基础、使用形象化语言的义理与象数交融的解释体系和猜测体系,简易直接、把握本体,力图使学习者有“体系自立、定理自出、发用流行、自然自在”的感觉.

分析问题几何攻,
有穷无穷两相通.
无穷本从有穷出,
先向有穷问无穷.

这首诗讲的是把数学分析中的问题当作无穷维空间的几何问题来处理,无穷维空间的数学理论来自于有穷维空间,可以参照有穷维空间的数学理论来设想无穷维空间中的理论体系.

本书先回顾一下有限维空间的数学理论:初等几何(边长、角度以及它们之间的关系),初等代数(线性代数方程组、高次代数方程求解),解析几何(坐标空间及其与向量空间的关系),微积分(函数、极限、连续、连续函数的性质、全微分、方向导数、取极值的条件、隐函数定理、Stokes公式);接着把这些理论推广到无穷维空间,就产生本书的主要内容.

本书是我为大连理工大学应用数学系研究生讲授应用泛函分析的讲义.由于部分学生未学过Banach空间和Hilbert空间,因此第1章扼要地介绍了Banach空间和Hilbert空间的一些基础知识.第2章和第4章讲非线性泛函分析,第3章讲Sobolev空间.本书注重应用,由于篇幅所限,主要讲对微分方程的应用.更多的应用可以参看Zeidler:“Nonlinear functional analysis and its applications”.在有限元方面的应用可以参见张鸿庆、王鸣的《有限元的数学理论》.由于作者水平有限,本书不可避免地存在许多缺点和错误,敬请读者批评指正.

我的许多学生为打印和校对讲稿做了许多工作,在此对他们表示衷心的感谢.

于创新园
2007年5月

目　录

第1章 Banach空间与Hilbert空间

——无穷维空间中的初等几何和初等代数

1.1 线性赋范空间

我们在线性代数中已经学过线性空间的概念. 线性空间建立在向量代数运算的基础上,但只有代数运算还不能构成几何,为了研究几何必须在线性空间 X 中定义长度. 现代数学是关于模型和结构的科学,是从内容抽取形式和关系的科学,抽取时经常采用特征分离概括化原则. 以范数为例,范数就是一般化的长度,定义范数时,先研究欧氏空间的向量长度具有哪些性质,然后从这些性质中选取基本性质. 例如,向量的长度是非负的,向量的长度为零当且仅当此向量为零向量;用常数 λ 乘一个向量后得到的向量的长度应为原向量的 $|\lambda|$ 倍;三角形任意两边边长之和大于第三边. 抽取出基本性质后,采用"真事隐"的方法,抛掉具体内容,把具有这种基本性质的关系叫做范数. 由此给出

定义 1-1

如果对实数域上线性空间 X 的每个元素 x 定义一个实数记为 $\|x\|$ 满足以下条件:

(1) $\|x\| \geqslant 0$,并且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x=0$;

(2) 对任意实数 α 及 X 中的任意元素 x 都有

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|;$$

(3) 对 X 中的任意元素 x 和 y 有

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

则称 $\|x\|$ 是 x 的范数. 定义了范数的线性空间叫做线性赋范空间.

范数可以看成长度，线性赋范空间相当于定义了长度的空间. 以上定义范数的三条，叫做范数公理. 这三条就是长度概念的基本属性. 这种定义范数的方法称为“得意忘形”法，即“得到真意以后忘掉具体的形式”，这种方法以后要反复使用. 这样定义范数就大大地扩展了长度的范围，普通的向量长度只是它的一种特殊形式，它使得许多表面上看来完全不同的东西也成了长度. 下面举例说明这点.

【例 1-1】 设 X 是 n 维向量组成的集合，若 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 X 中的任意向量，α 是任意实数，定义 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$，$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$，则 X 构成线性空间. 如果我们定义 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$（这就是普通的 n 维向量的长度），显然它满足范数公理，因此，对这样定义的范数，X 构成线性赋范空间. 这时 X 就是 n 维欧氏空间，常常记以 $\mathbf{E}^n$ 或 $\mathbf{R}^n$.

【例 1-2】 设 X 是所有在 Ω 上 Lebesgue 平方实可积的函数 $f(x)$ 的全体，它按照 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 构成一个线性空间. 如果在 X 中定义范数

$$\|f\|=\left(\int_\Omega|f(x)|^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1-1}$$

显然它满足范数公理的前两条. 至于第三条可以这样证明

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2&=\int_\Omega(f+g)^2\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Omega f^2\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega g^2\mathrm{d}\Omega+2\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\Omega.\end{aligned}$$

根据 Schwartz 不等式

$$\int_\Omega fg\,\mathrm{d}\Omega\leqslant\left(\int_\Omega f^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega g^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}},$$

因此

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2&\leqslant\int_\Omega f^2\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega g^2\mathrm{d}\Omega+2\left(\int_\Omega f^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega g^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\left(\int_\Omega f^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\Omega g^2\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\&=(\|f\|+\|g\|)^2,\end{aligned}$$

从而

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

因此范数(1-1)满足范数公理,所以 X 构成线性赋范空间,记以 $L_2(\Omega)$(也有的书记以 $L^2(\Omega)$).

【例 1-3】 定义在有界闭域 Ω 上的实值连续函数 $f(x)$ 的全体按 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ 构成线性空间. 如果我们定义

$$\| f \| = \max_{x\in\Omega} | f(x) |, \tag{1-2}$$

亦即 $\| f \|$ 定义成 $|f|$ 在 Ω 上的最大值,那么可以验证它是线性赋范空间.

事实上,范数公理的前两条显然满足. 至于第三条,设 $|(f+g)(x)|$ 在 x_0 点取最大值,则

$$\begin{aligned}\| f+g \| &= |(f+g)(x_0)| = |f(x_0)+g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x_0)| + |g(x_0)| \\ &\leqslant \max_{x\in\Omega}|f(x)| + \max_{x\in\Omega}|g(x)| \\ &= \| f \| + \| g \|.\end{aligned}$$

这个线性赋范空间记以 $C(\Omega)$,也叫 C 空间,即指 Ω 上的以(1-2)为范数的全体连续函数集合.

【例 1-4】 设 X 是 Ω 上 k 次连续可微函数集合. 其中,Ω 是 n 维欧氏空间的有界闭域. 定义范数

$$\| f \|_k = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \max_{x\in\Omega} | D^\alpha f(x) |, \tag{1-3}$$

其中,$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为非负整数,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n.$$

容易证明 X 构成赋范空间,记以 $C^k(\Omega)$.

【例 1-5】 在上述例子中,定义范数为

$$\| f \|_k = \left[\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega | D^\alpha f |^2 \mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1-4}$$

可以证明 X 也成为线性赋范空间.

【例 1-6】 设 X 是在二维欧氏空间有界闭域 Ω 上一次连续可微且在边界上为零的函数集合,定义范数为

$$| f |_1 = \left[\int_\Omega (f_x^2+f_y^2)\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1-5}$$

可以证明 X 是线性赋范空间.

范数(1-5)可以解释成一个物理系统的能量.因此,能量可以当作长度,这样我们就有了以能量为长度的几何,在这种几何里许多定理就有了物理意义.例如,"在子空间中找一点与子空间外给定点距离最短"可以解释成"最小势能原理".这就给初等几何定理赋予了新的意义,大大地扩展了它的应用范围.

有了长度就可以定义距离.空间 X 中任意两个元素 x 和 y 之间的距离可以定义成

$$\rho(x,y) = \| x-y \|, \tag{1-6}$$

即点 x 与点 y 之间的距离等于向量 $x-y$ 的长度.有了距离就可以定义极限.设序列 $\{x_n\}$ 是 X 中的元素,如果能在 X 中找到一个元素 x_0,使

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0) = 0,$$

就说序列 $\{x_n\}$ 的极限是 x_0,记以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

对例 1-1 来说,$\rho(x_n,x_0)$ 就是普通的 Euclid 距离,收敛就是欧氏空间的收敛.

对例 1-2,

$$\rho(f_n,f_0) = \left(\int_\Omega (f_n-f_0)^2 \mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}},$$

这个收敛是在 Ω 上均方意义下的收敛.在例 1-3 中

$$\rho(f_n,f_0) = \max_{x\in\Omega} | f_n(x) - f_0(x) |,$$

这时收敛是一致收敛,即若 $f_n(x)$ 按 C 空间的范数收敛于 $f_0(x)$,则 $f_n(x)$ 在 Ω 上一致收敛于 $f_0(x)$.

类似地容易看出,例 1-4 的收敛是函数列本身连同直到各个 k 阶导数的一致收敛.

例 1-5 的收敛是函数列本身连同直到 k 阶导数的均方收敛.由均方收敛可以推出在任意小的邻域中的平均收敛,这在实际问题中有重要应用.

线性赋范空间是赋以长度的线性空间.但是从几何的观点来看,只有长度是不够的,还必须引进角度.在欧氏空间中两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\| \; \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta, \tag{1-7}$$

其中,θ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的角度.由式(1-7)可知,有了长度和内积就可以定义角度.为了在线性赋范空间中定义角度,我们引进内积概念.

定义 1-2

如果对实线性空间 X 的任意一对元素 x 和 y 可以定义一个实数 (x, y) 使其满足

(1) $(x,x) \geqslant 0$，且 $(x,x) = 0$，当且仅当 $x = 0$；

(2) $(x,y) = (y,x)$；

(3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$，$x_1, x_2 \in X$；

(4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$　α 是任意实数；

则称 (x,y) 为 x 和 y 的内积，X 叫做内积空间.

定义 1-2 中的 4 条叫做内积公理.

若 X 是内积空间，令 $\| x \| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$，可以验证 $\| x \|$ 满足范数公理，因此内积空间必可赋予范数成为赋范空间.

【例 1-7】 在 n 维欧氏空间中定义内积

$$(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

容易验证这样定义的内积满足内积公理. 因此 n 维欧氏空间 $\mathbf{E}^n$ 是内积空间.

【例 1-8】 l_2 空间 $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots), x_k \in \mathbf{R}(k = 1, 2, \cdots), \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty\}$，取 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots) \in l_2$，定义

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

则 l_2 成为内积空间.

【例 1-9】 对 $L_2(\Omega)$ 引进内积

$$(f,g) = \int_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\Omega \tag{1-8}$$

显然它满足内积公理，因此 $L_2(\Omega)$ 是内积空间.

为了考察 $C(\Omega)$ 是否是内积空间，先考察内积和范数的关系. 由余弦定理可知

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2(x,y),$$

从而

$$(x,y) = \frac{\| x \|^2 + \| y \|^2 - \| x - y \|^2}{2}. \tag{1-9}$$

由这个式子可以定义 (x,y). 类似地还可以得到

$$(x,y)=\frac{\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2}{2},\tag{1-10}$$

由式(1-9)和式(1-10)可知

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\tag{1-11}$$

这个式子叫做 Jordan-Von Neumann 恒等式. 其几何意义是平行四边形对角线的平方和等于各边的平方和. 式(1-11)可以作为线性赋范空间可成为内积空间的必要条件,还可以证明这个条件是充分的,因此有

定理 1-1

赋范空间可以定义内积的充分必要条件是式(1-11)成立.

公式(1-11)本身是平面几何的定理,译成泛函分析的语言就成为泛函分析定理. 这启迪我们可以用平面几何的观点思考问题,用泛函分析的术语表述结果,就可以形成新的猜想. 利用这个定理可以证明 $C(\Omega)$ 不是内积空间. 取 $\Omega=[-1,1]$,令

$$f_1(x)=\begin{cases}x & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases},$$

$$f_2(x)=\begin{cases}0 & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases},$$

显然 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是 $[-1,1]$ 上的连续函数,容易验证 $|f_1(x)|$、$|f_2(x)|$、$|f_1(x)+f_2(x)|$ 和 $|f_1(x)-f_2(x)|$ 的最大值都是 1,即 $\|f_1\|=\|f_2\|=\|f_1+f_2\|=\|f_1-f_2\|=1$,因此式(1-11)不成立,所以 $C[-1,1]$ 不是内积空间. 更一般地说,$C^k(\Omega)$ 也不是内积空间.

引进内积概念之后,就可以定义正交性. 若 H 是内积空间,$x,y\in H$ 并且 $(x,y)=0$,则称 x 和 y 是正交的. 初等几何中有一条著名定理:过平面外一点能作而且只能做一条这个平面的垂线. 必须指出,这个定理对一般的内积空间未必成立,因为一般的内积空间,未必具有下面将要定义的完备性. 以初等几何为例,如果只考虑坐标为有理数的点,那么这个平面就像个筛子,有许多孔眼,$(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 就是一个,如果垂足的坐标是无理数,那么垂足就不存在了,因此我们引进完备性概念.

定义 1-3

若线性赋范空间 X 中的点序列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$，则称 $\{x_n\}$ 是一个基本序列. 如果 X 中的任意基本序列都有极限，亦即对任意的基本序列 $\{x_n\}$ 都有 $x_0\in X$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$，则称 X 是完备的. 完备的线性赋范空间叫做 Banach 空间，完备的内积空间叫做 Hilbert 空间.

下面给出 Banach 空间和 Hilbert 空间的例子.

【例 1-10】 $C(\Omega)$ 是Banach空间. 这是因为与 $C(\Omega)$ 的范数相应的收敛是一致收敛，按照一致收敛的判别法，任何基本序列都一致收敛，并且连续函数列一致收敛的极限仍是连续函数.

【例 1-11】 $L_2(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 这就是说 $L_2(\Omega)$ 中的任何基本序列都有极限. 这个结果的证明可以参看吉田耕作的《泛函分析》.

【例 1-12】 根据与例 1-10 类似的道理，$C^k(\Omega)$ 是 Banach 空间.

【例 1-13】 如果将集合 $C^k(\Omega)$ 的范数换成范数(1-4)，则这个空间虽然是赋范空间，但不是 Banach 空间. 这是因为连续函数序列在均方收敛意义下的极限函数未必是连续函数.

注意，例 1-10、例 1-11 和例 1-12，都是完备空间，并且都有名字. 例 1-13 不完备，也就没有名字，但是例 1-13 所给出的空间也是十分重要的，它相当于用某种能量做范数的空间，以后还要讨论这个空间.

对 Hilbert 空间我们有下述结果：

定理 1-2

设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个闭子空间，w 是 H 中不属于 M 的元素，则有而且只有一个 M 中的元素 w_0 使 $w-w_0$ 与 M 正交.

定理 1-3

设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，则对任意的 $x\in H$ 可作下述唯一的直交分解

$$x=x_0+y,$$

其中，$x_0\in M$，$y\in M^{\perp}$，$(x_0,y)=0$.

这些定理都是初等几何定理的推广，但有了新的意义. 例如，最小势能原理就是定理 1-2 的特例. 证明可参见吉田耕作的《泛函分析》.

下面我们讨论各种范数之间的关系.

定义 1-4

如果对一个线性空间 X 引进两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$，并且存在两个正数 C_1 和 C_2 使对 X 中的任意元素 x 都有

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1, \tag{1-12}$$

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 与范数 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

显然，如果两个范数等价，那么一个序列如按范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛，也就按范数 $\|\cdot\|_2$ 收敛，反过来也是一样. 事实上，若 $\|x_n - x_0\|_1 \to 0$，由式(1-12) 可知 $\|x_n - x_0\|_2 \to 0$，从而 $\{x_n\}$ 按范数 $\|\cdot\|_2$ 也收敛于 x_0. 反过来，若 $\{x_n\}$ 按范数 $\|\cdot\|_2$ 收敛于 x_0，那么按范数 $\|\cdot\|_1$ 也收敛于 x_0.

有趣的是，对有限维线性赋范空间，所有的范数是彼此等价的.

定理 1-4

若 X 是有限维线性赋范空间，则 X 上所有的范数彼此等价.

证明

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 X 的一组基，使得对任意 $x \in X$ 都有

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

从而

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^n x_ke_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k|\,\|e_k\|$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

记 $m = \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则有

$$\|x\| \leqslant m\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

任取 $y = \sum_{k=1}^n y_ke_k \in X$，有

$$\left|\,\|x\| - \|y\|\,\right| \leqslant \|x - y\| \leqslant m\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

这说明 $\|x\|$ 是 $\mathbf{E}^n$ 上的连续函数. 记 $f(x_1,\cdots,x_n) = \|x\|$. 当 $x = (x_1, x_2,\cdots,x_n)$ 位于 $\mathbf{E}^n$ 的单位球面上,即 $\sum_{k=1}^{n}x_k^2 = 1$ 时, $\|x\| = \|\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\| \neq 0$. 实际上,若 $\|\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\| = 0$,则 $\sum_{k=1}^{n}x_k e_k = 0$. 由于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性无关的, 则 $x_k = 0(k = 1,2,\cdots,n)$. 这与 $\sum_{k=1}^{n}x_k^2 = 1$ 矛盾. 因此 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在球面 $\sum_{k=1}^{n}x_k^2 = 1$ 上处处不为零. 因为单位球面 S 是 $\mathbf{E}^n$ 中的有界闭集, $\|x\|$ 在 S 上取得非零最小值 M_1, $M_1 > 0$,于是对于任意的 $x \in X$,令

$$x' = \frac{x}{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

则有

$$M_1 \leqslant \|x'\| \leqslant M_2,$$

M_2 是 $\|x\|$ 在 S 上的最大值. 因此

$$M_1\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|x\| \leqslant M_2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而 $\|\cdot\|$ 与欧氏范数等价. 由于所有的范数等价于 Euclid 范数,因此所有范数都彼此等价. 定理证毕.

从有穷维空间考虑, X_1 是 X 的真子空间,其特征是存在 e 使 $\|e\| = 1$, $e \perp X_1$. 我们试图将这个结果推到线性赋范空间. 由于线性赋范空间没有正交概念,需要适当修改命题的表述,注意(图 1-1)

$$\|e\| = 1, e \perp X_1 \Leftrightarrow \rho(e, X_1) = 1.$$

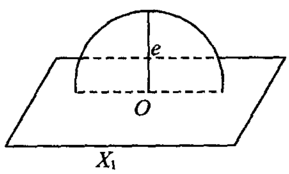

图 1-1

后一表述只用距离不用角度,适宜于线性赋范空间. 关键在于如何构造 e. 我们不知道 e,但由于 X_1 是 X 的真子空间,我们知道 X_1 外存在一点 y_0,问题是如何从 y_0 出发构造 e. 虽然线性赋范空间中不能做垂线,但是可以构造近似