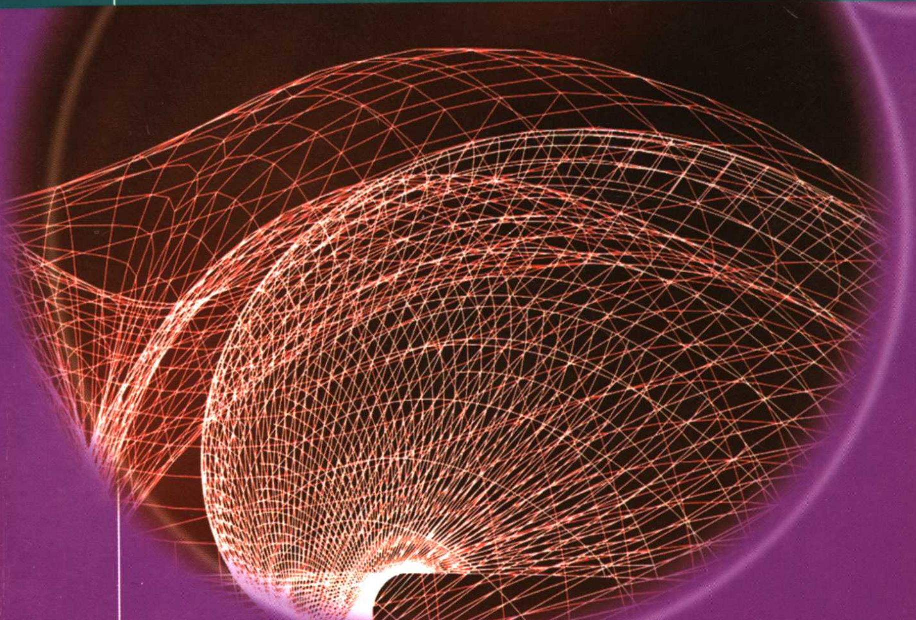
■ 高等学校理工科数学类规划教材

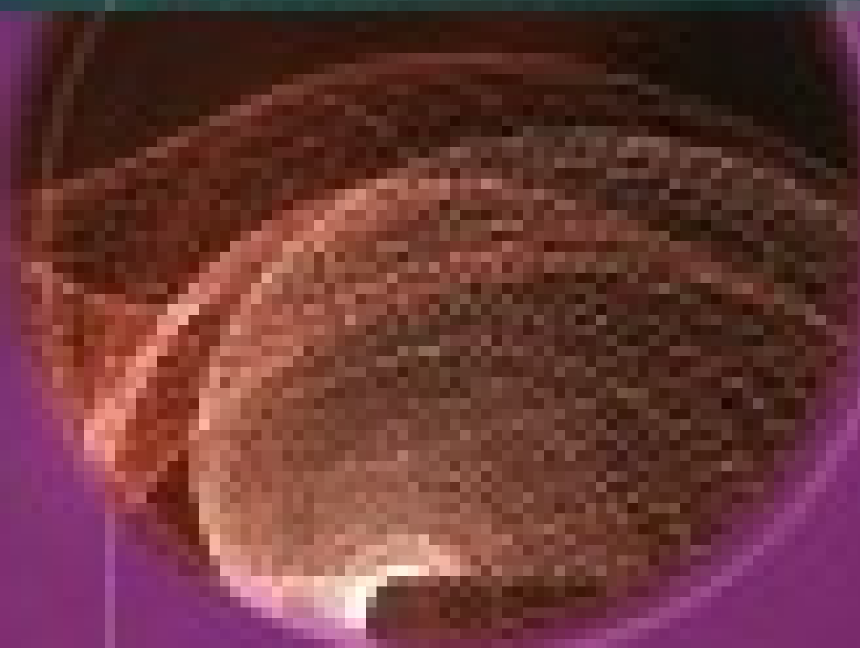
概率论与数理统计同步辅导

王艳芳　王丽琦　冯敬海　编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计
同步辅导



概率论与数理统计
同步辅导

王艳芳　王丽琦　冯敬海　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导 / 王艳芳,王丽琦,冯敬海编著.—大连:大连理工大学出版社,2007.11
ISBN 978-7-5611-3826-7

Ⅰ.概… Ⅱ.①王…②王…③冯… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 178387 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:8 字数:270 千字
2007 年 11 月第 1 版 2007 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:于建辉 王 伟 责任校对:碧 海
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-3826-7 定 价:12.80 元

前　言

数学是高等理工科院校的主要基础理论课，概率论与数理统计在其中占有重要地位。它不仅为未来的工程技术工作者提供必要的、不可或缺的数学概念、数学理论和数学方法，而且对于学习者在锻炼思维、培养能力、提高素质等方面，具有不可替代的潜在功能。

大连理工大学应用数学系组编，大连理工大学出版社出版的《概率论与数理统计》在汲取传统教材和其他改革教材的长处，对工科大学现状进行分析定位，总结教学改革成果基础上编写而成。我们编写的《概率论与数理统计同步辅导》，旨在帮助在校学生更好地学好这门课程，同时它也可以作为教师的教学参考用书，以及考研众学子全面复习概率论与数理统计的自学辅导书。

本书编写的体例是以《概率论与数理统计》的章节为序，与教学保持同步，每章包括以下 4 个版块：

内容提要　简要归纳本章主要内容，整理并罗列出该章的主要概念、定理、公式和重要结果，并对这些内容提出教学要求，使学习者脉络明晰地把握要点。

释疑解惑　针对初学者常问及的带有共性的问题，进行释疑解惑，分析点拨。希望读者由此受到数学抽象性、逻辑性和严谨性的熏陶。

例题解析　学数学就要做数学。学习数学的过程就是对数学进行操作、演习和思维实验的过程，做习题是其中的重要环节。我们按

照本书教学内容，选择若干概念性、启发性、综合性较强的题目，对其剖析解题思路，归纳解题经验，为读者开阔眼界、提升水平提供平台。在这些例题中，有些选自历年工科硕士生入学试题。

习题全解 对教材中的全部习题均给予解答。解答过程中有分析、有步骤、有过程。

本书是由大连理工大学应用数学系与大连大学信息工程学院联合组织编写。

限于编著者水平，书中的疏漏与缺点在所难免，恳请同行和读者不吝指正。

编著者

2007 年 11 月

目 录

第 1 章　概率论的基本概念

内容提要

1. 理解三个基本概念

(1)随机试验:如果一个试验满足下列 3 个特征,则称该试验为一个随机试验(随机现象)(记为 E):

1° 可以在相同的条件下重复地进行;

2° 每次试验的结果具有多种可能性,所有可能结果是已知的;

3° 试验之前不可预知哪个结果会出现。

(2)样本空间:随机试验的所有可能出现的结果组成的集合称为该试验对应的样本空间,记为 Ω。称每个可能结果为样本点。

(3)随机事件:在一次试验中可能发生也可能不发生,而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果称为随机事件,简称为事件。显然随机事件是随机试验对应的样本空间 Ω 的子集,用 $A,B,C,\cdots$表示。样本空间称为必然事件;空集称为不可能事件。

2. 掌握事件的关系与运算(结合集合论)

1° 事件之间的 4 种关系:包含关系;等价关系;对应关系;互不相容(互斥)关系($AB=\varnothing$)(表 1-1)。

表 1-1

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A\subseteq B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
对立关系	$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集
互斥关系	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生(互不相容)	A 与 B 无公共元素

2° 事件之间的 3 种运算:事件的和(并);事件的积(交);事件的差

(表 1-2)。

表 1-2

运算	符号	概率论	集合论
事件的和(并)	$A\cup B(A+B)$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
有限个的和	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集
事件的积(交)	$A\cap B(AB)$	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
有限个积	$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集

3° 德·摩根法则：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

3. 理解和掌握概率的定义和性质

(1)公理化定义

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间。若对于任意事件 $A\subset\Omega$ 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足以下三个条件：

1° 非负性　$P(A)\geqslant 0$；

2° 归一性　$P(\Omega)=1$；

3° 可加性　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$，则有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

(2)概率的性质

1° 不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$；

2° 对任一事件 A，有 $P(A)+P(\overline{A})=1$；

3° 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$。

(3)古典概率

设试验 E 具有如下两个特征：

1° 样本空间的元素只有有限个，即 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$；

2° 每一个基本事件(由样本点组成的单点集)的概率相等，即 $P(w_1)=$

$P(w_2)=\cdots=P(w_n)$，则称试验 E 所对应的概率模型为古典概型（等可能概型）。

对于古典概型，事件 A 的概率公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所含基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}$$

(4)几何概率

将古典概型中的有限推广到无限，保留等可能性，就得到几何概型。

如果试验 E 的可能结果可以几何地表示为某区域 Ω 中的一个点（区域 Ω 可以是一维、二维、三维，甚至可以是 n 维），并且点落在 Ω 中某区域 A 的概率与 A 的测度（长度、面积、体积等）成正比，而与 A 的位置及形状无关，则称试验 E 对应的概率模型为几何概型。随机点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$$

(5)二项概率

如果试验 E 只有两个可能的结果：A 与 $\overline{A}$，并且 $P(A)=p(0<p<1)$，把 E 独立地重复做 n 次构成一个试验，用 E^n 表示，这个试验称为 n 重贝努利试验（n 重贝努利概型）。

设事件 A 在一次试验中发生的概率为 p，则在 n 重贝努利试验中事件 A 恰发生 k 次的概率为

$$p_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

上式为二项概率公式。

(6)条件概率

设 A,B 为两个事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在已知事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

4. 掌握概率的计算公式

(1)加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

(2)减法公式

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$$

(3)乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad(P(A)>0)$$
$$=P(B)P(A|B)\quad(P(B)>0)$$

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件($n\geqslant2$),$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

(4)全概率公式

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$(称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组),且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则对任一事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

5. 掌握事件的独立性

设 A,B 是试验 E 的两个事件,若 $P(B|A)=P(B)$ 或 $P(A|B)=P(A)$,称事件 A 与 B 是相互独立的。此时 $P(AB)=P(A)P(B)$。

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n>2)$个事件,如果对于任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件,积事件的概率等于各个事件概率的积,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的。

若 A 与 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立。

释疑解惑

【问 1-1】 怎样理解互逆事件和互斥事件?

答 若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容或互斥。从“事件是由一些试验结果所构成的”这个观点看,互斥事件无非是说:构成这两个事件各自的试验结果中不能有公共的样本点。若给定一个事件 A,则“A 不发生”这个事件,称为 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$。A 与 $\overline{A}$ 称为互逆事件。互逆事件是互斥事件的一种特殊情况。例如:掷一颗骰子,事件“出现 2 点”和“出现 3 点”互斥;事件“出现点数不小于 2”和“出现点数小于 2”互逆。

互逆事件和互斥事件有明显的区别:当样本空间划分为含所考察的两个事件在内的多个事件时,这两个事件才可能互斥;当样本空间仅划分为所考察的两个事件时,这两个事件才可能互逆。某一次试验中,互斥事件可以都不发生,互逆事件有且仅有一个发生。

【问 1-2】 样本空间的选取是否唯一？

答 解决许多古典概型问题有不同的方法，这往往是由样本空间的不同构造引起的，也就是由基本事件确定的不同而引起的。

例 某次掷两颗骰子。求出现点数和为奇数的概率。

解法 1 取样本空间 $\Omega=\{$(奇、奇)、(奇偶)、(偶奇)、(偶偶)$\}$

$$A=\{(\text{奇偶})、(\text{偶奇})\},\quad \text{则 } P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

解法 2 取样本空间 $\Omega=\{$(点数和为奇数)、(点数和为偶数)$\}$

$$A=\{\text{点数和为奇数}\},\quad \text{则 } P(A)=\frac{1}{2}$$

解法 3 取样本空间 $\Omega=\{(i,j)\mid i,j=1,2,\cdots,6\}$，样本空间基本事件总数为 $6\times6=36$，事件 A 基本事件数为 $2\times3\times3=18$，则

$$P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

所以，样本空间的选取一般不唯一，在解题过程中，选取适当的样本空间，对快速正确解题有很大帮助。

【问 1-3】 条件概率 $P(B|A)$ 与积事件 $P(AB)$ 有何区别？

答 $P(AB)$ 表示在样本空间 S 中，计算 AB 发生的概率，而 $P(B|A)$ 表示在缩减的样本空间 S_A 中，计算 B 发生的概率。根据古典概型公式，则用

$$P(B|A)=\frac{AB\text{ 中基本事件数}}{S_A\text{ 中基本事件数}}$$

一般说来，$P(B|A)$ 比 $P(AB)$ 大，切记条件概率一定是在某事件已发生的条件下该事件发生的概率。

【问 1-4】 何时应用全概率公式或贝叶斯公式？

答 若所要求其概率的事件与前后两个试验有关，且这两个试验彼此有关联，第一个试验的各种结果直接对第二个试验产生影响，要求第二个试验出现某个结果的概率，可以用全概率公式。

若已知某事件已经发生，要求该事件发生的条件下样本空间的划分中某事件发生的概率，可以用贝叶斯公式，全概率公式实质上是由原因求结果，而贝叶斯公式则是由结果求原因。另外，贝叶斯公式实际是由乘法公式、条件概率公

式和全概率公式综合而成的。

【问 1-5】 两事件相互独立与两事件互斥这两个概念有何联系？

答 没有必然联系。我们说两个事件 A、B 相互独立，其实质是事件 A 发生与否不影响事件 B 发生的概率。而说 A、B 互斥，则是指 A 的发生必然导致 B 不发生，或者 B 的发生必然导致 A 不发生。即 $AB=\varnothing$，这就是说事件 A 的发生对事件 B 发生的概率有影响。现从直观上予以解释，图 1-1 与图 1-2 都是边长的 1 的正方形。

由图 1-1 知，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$。因此 A、B 相互独立，但 A、B 不互斥。由图 1-2 知，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$AB=\varnothing$，$P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$。因此，A、B 互斥，但 A、B 不是相互独立的。那种认为"两事件相互独立必定互斥"是错误的。在 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 的条件下，若 A、B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)>0$，而若 A、B 互斥，则 $P(AB)=0$，两种概念出现矛盾。

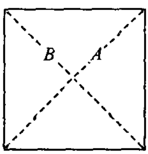


图 1-1

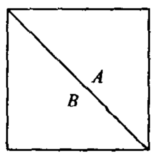


图 1-2

【问 1-6】 "n 个事件相互独立"与"n 个事件两两独立"是否是一回事？

答 不是。由定义可知，n 个事件相互独立可以推出 n 个事件两两独立。反之则不然，不妨设 $n=3$。样本空间为$\{1,2,3,4\}$。

$$P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=\frac{1}{4}$$

令 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{1,3\}$。显然 A、B、C 两两独立。但 $P(ABC)=0\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$。

【问 1-7】 一些初学者有这样的想法：既然在概率的公理化定义中规定了概率具有完全可加性（公理 3），那么概率的有限可加性（性质 2）就自然而然地

成立了，何必证明呢？这种想法对吗？

答　这种想法不对。有这种想法的初学者的推理过程，是利用了认为显然成立的一个命题："一个结论对可列无穷多个的情形成立，对有限多个的情形也成立。"实际上，这个命题是不对的，让我们举一个例子来说明这个命题不对，自然数{1,2,3,…}是可列无穷多个数组成的集，它存在一个真子集(比如正偶数{2,4,6,…})与自然数本身一一对应。实际上，我们还可以得到更一般的结论："可列无穷多个数组成的集，至少存在它的一个真子集与其一一对应。"而有限多个数组成的集，它的任何一个真子集都不能与其一一对应。所以，有限多个数组成的集不具有可列无穷多个数组成的集的上述性质。这个例子说明，有些结论对可列无穷多个的情形成立，对有限多个的情形未必成立。因此，虽然根据概率的公理化定义知道概率具有完全可加性，但是概率具有有限可加性这条性质还是需要证明的。

【问 1-8】　能否将概率看成频率的极限？

答　不能。这是因为：第一，统计概率仅对 n 次独立重复试验而言(贝努利大数定律)，并非所有情形都适用；第二，当 $n\to\infty$ 时，$f_n(A)$ 在 $P(A)$ 左右徘徊，与微积分中 $f(x)\to A$ 不同；用 ε-N 概念来解释，则存在随机现象的偶然性，对于某个给定的 $\varepsilon>0$，可能找不到相应的 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，$|f_n(A)-p(A)|<\varepsilon$ 成立。

【问 1-9】　使用全概率公式计算事件的概率应注意什么？

答　注意使用条件，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，且 $B\subset A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，$P(B|A_i)$ 已知。

【问 1-10】　有放回抽样与无放回抽样有何区别？

答　"有放回抽样"即抽出样本观测后仍放回样本空间中去。因此，前次和后次的样本空间没有发生变化，两次抽样应看成是独立重复抽样，计算概率时，可利用随机事件的独立性予以简化；而在"无放回抽样"中，由于抽出样本后不再放回样本空间，前次和后次抽样的样本空间是不一样的，此时计算随机事件的概率要利用条件概率和乘法公式进行，不能用独立性。

例题解析

【例 1-1】 以 A 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件 $\overline{A}$ 为（　　）。

A. "甲种产品滞销，乙种产品畅销"

B. "甲、乙两种产品均畅销"

C. "甲种产品滞销"

D. "甲种产品滞销或乙种产品畅销"

解 设 B="甲种产品畅销"，C="乙种产品滞销"，则 $A=BC$，于是 $\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}$，而 $\overline{B}$="甲种产品滞销"，$\overline{C}$="乙种产品畅销"，故选 D。

【例 1-2】 设方程 $x^2+Bx+C=0$ 中的 B、C 分别是将一枚骰子连掷两次出现的点数，求该方程有实根的概率 P 和有重根的概率 Q。

解 一枚骰子连掷两次，其基本事件总数为 36，方程 $x^2+Bx+C=0$ 有实根时，$B^2-4C\geqslant 0$，即 $C\leqslant\frac{B^2}{4}$；有重根时，$B^2-4C=0$ 即 $C=\frac{B^2}{4}$，因 B 是连掷两次骰子后，出现的点数，可能的取值列表如下：

B	1	2	3	4	5	6	合计
$C\leqslant\frac{B^2}{4}$		1	1、2	1、2、3、4	1、2、3、4、5、6	1、2、3、4、5、6	共有 19 种
$C=\frac{B^2}{4}$		1		4			共有 2 种

则 $P=\frac{19}{36}$，$Q=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$。

【例 1-3】 三个箱子，第一个箱子中有 3 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 2 个黑球 3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球 2 个白球。求：

(1)随机取出一个箱子，再从这个箱子中任取一球，这个球为白球的概率；

(2)已知取出的球是白球，此球属于第三个箱子的概率。

解 设 A 表示"取出一球为白球"，B_i 表示"取到第 i 只箱子"，$i=1,2,3$，则 $P(B_i)=\frac{1}{3}$。

(1)由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{12}$$

(2)由贝叶斯公式得

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{5}{12}}=\frac{8}{25}$$

【例 1-4】 对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　)

A. $A\subset B$　　B. $\overline{B}\subset\overline{A}$　　C. $A\overline{B}=\varnothing$　　D. $\overline{A}B=\varnothing$

解 应选 D。易知 $A\cup B=B$，等价于 $A\subset B$，$A\subset B\Leftrightarrow A$ 发生，则 B 必发生 $\Leftrightarrow$逆否命题：B 不发生，则 A 必不发生$\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$，因此 $A\subset B$ 等价于 $\overline{B}\subset\overline{A}$。若 $A\overline{B}=\varnothing$，即不可能出现"$A$ 发生而 B 不发生"的情况，也就是"若 A 发生则 B 必发生"，即 $A\subset B$。因此，也有 $A\subset B$ 等价于 $A\overline{B}=\varnothing$。

综上所述，$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$，应选 D，事实上，D 意味着 $B\subset A\Leftrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}\Leftrightarrow A\cup B=A$。

注 应记住结论：$A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing\Leftrightarrow AB=A$。

【例 1-5】 设两两相互独立的三事件 A，B 和 C，满足条件：

$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$______。

解

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)\cdot P(B)-P(B)\cdot P(C)-\\&\quad P(A)\cdot P(C)+P(\varnothing)\\&=3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

解得 $P(A)=\frac{3}{4}$ 或 $P(A)=\frac{1}{4}$，由于 $P(A)<\frac{1}{2}$，故应填 $\frac{1}{4}$。

【例 1-6】 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使

用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件"电炉断电"，而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于(　　)。

A. $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　B. $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　C. $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　D. $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解　应选 C。$E=\{$电炉断电$\}$。设 T_1,T_2,T_3,T_4 为电炉上 4 个温控器分别显示的温度，则根据题意，

$$
\begin{aligned}
E &= \{T_1,T_2,T_3,T_4 \text{ 至少有两个大于或等于 } t_0\}\\
&= \{T_{(1)},T_{(2)},T_{(3)},T_{(4)} \text{ 至少有两个大于或等于 } t_0;T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}\}\\
&= \{T_{(3)}\geqslant t_0\}
\end{aligned}
$$

所以应选 C。

注意　在最后一步"$T_{(3)}\geqslant t_0$"，是由于 $T_{(4)}\geqslant T_{(3)}$，必有"$T_{(4)}\geqslant t_0$"，因此至少有两个温控器显示的温度大于或等于 t_0，反之也成立。

【例 1-7】　$P(B)>0,P(A|B)=1$，则(　　)。

A. $P(A\cup B)>P(A)$　　B. $P(A\cup B)>P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$　　D. $P(A\cup B)=P(B)$

解　$P(A|B)=1$，即 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，也就是 $P(AB)=P(B)$，因此 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$，故应选 C。

【例 1-8】　对于任意两事件 A 和 B(　　)。

A. 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 一定独立

B. 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 有可能独立

C. 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定独立

D. 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定不独立

分析　本题考查独立与互斥事件之间的关系。

解　应选 B。若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 有可能独立，如掷两枚均匀硬币，$A=\{$第一枚出现正面$\}$，$B=\{$第二枚出现反面$\}$，$AB\neq\varnothing$，但 $P(AB)=\dfrac{1}{4}=P(A)\cdot P(B)$。$A$、$B$ 独立，因此应选 B。