新世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生基础课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 组编

周美珂 编著

泛函分析

FANHANFENXI

（第二版）

3

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

新世纪高等学校研究生教材
数学学科硕士研究生基础课程系列教材

泛函分析（第二版）

北京师范大学数学科学学院　组编
周美珂　编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/周美珂编著.2 版 - 北京:北京师范大学出版社,2007.9
新世纪高等学校研究生教材
ISBN 978 - 7 - 303 - 01295 - 4

Ⅰ.泛… Ⅱ.周… Ⅲ.泛函分析 - 研究生 - 教材
Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 142655 号

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码:100875
印　　刷:唐山市润丰印务有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:170 mm × 230 mm
印　　张:24.25
字　　数:400 千字
印　　数:1 ~ 3 000
版　　次:2007 年 9 月第 2 版
印　　次:2007 年 9 月第 1 次印刷
定　　价:33.90 元

责任编辑:岳昌庆　胡　维　　装帧设计:李　强
责任校对:李　菡　　　　　　责任印制:董本刚

内容简介

本书是根据作者多年从事硕士研究生泛函分析教学的经验，针对学生普遍存在的状况编写的. 主要内容包括: 距离与拓扑，线性拓扑空间，线性算子理论的基本定理，Hilbert 空间中的正交分解，Hahn-Banach 定理与对偶空间，对偶对与局部凸拓扑，紧性与自反空间，紧算子与正规可解算子，自伴算子及其在量子力学中的应用，Banach 代数及其在谱分解中的应用.

本书可作为高等院校数学专业研究生泛函分析基础课的教材，也可供有关研究人员参考.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立了数学与数学教育研究所，2004年成立了数学科学学院．学院现有教师73人，其中教授32名(博士生导师29名)，副教授23名；有博士学位的教师占90%．特别地，有中国科学院院士2名，国家杰出青年基金获得者4人，教育部长江学者奖励计划特聘教授4人和讲座教授1人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人，入选教育部跨/新世纪人才培养计划7人．

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权，1988年，基础数学、概率论与数理统计学被评为国家级重点学科，1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站，1996年，数学学科成为国家211工程重点建设的学科，1997年成为国家基础科学人才培养基金基地，1998年获数学一级学科博士授予权，2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体，2002年概率论与数理统计学再次被评为国家级重点学科，2004年概率论国家自然科学基金创新群体获第二期资助，2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台，2006年国家教育部数学与复杂系统重点实验室已经通过专家论证，目前正在建设中．2007年，概率论与数理统计学国家级重点学科通过考核评估，基础数学被增补为国家级重点学科，数学被认定为国家级一级重点学科．学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计学、应用数学、课程与教学论(数学)、科学技术史(数学)、计算机软件与理论、控制理论与控制工程8个硕士点．学院下设数学系、统计与金融数学系，有数学与应用数学、统计学2个本科专业；有分析、代数、几何、方程、概率论、数理统计、计算数学、应用数学、数学教育与数学史9个教研室和《数学通报》杂志编辑部．数学与数学教育研究所有随机数学、生物信息、模糊系统与模糊信息处理、统计数据分析、数学现代分析、科学计算、动力系统7个研究中心，有复杂系统实时控制、数据统计与分析2个实验室．

90多年来，数学科学学院已毕业全日制本科生6467人．20多年来，已毕业博士研究生189人，硕士研究生818人．据不完全统计，在博士毕业生中：有2人当选为中国科学院院士，5人获国家杰出青年基金，4人获国家自然科学奖，3人获国家级有突出贡献的中青年专家称号，2人入选新世纪百千万人才工程国家级人选，2人入选教育部优秀青年教师资助计划，7人入选教育部跨/新世纪人才培养计划，1人入选全国百篇优秀博士学位论文．(李仲来执笔)

2007-09-08

第一版编者的话

从1982年开始, 编者一直在北京师范大学数学系讲授泛函分析课, 对象是微分方程、函数论、概率论、数理统计、代数、应用数学和力学等各方向的硕士研究生. 从对数学系研究生培养的一般要求, 后继课和科学研究工作的需要看, 他们在泛函分析方面的知识和训练, 应当从数学系本科教材所体现的水平的基础上再大大提高一步. 但是, 实际上他们当中多数人只读过通常数学系本科泛函分析课本中的很少的一部分内容, 有的人甚至一点也没有读过. 这种情况已经持续多年, 看来不是暂时的. 因此, 尽管已有不少优秀的泛函分析教材和专著, 我们仍然感到有必要写一本具有这种针对性的教材.

本书共分七章: 第一章是线性拓扑空间的基本知识; 第二章是线性算子理论的几个基本定理; 第三章介绍 Hilbert 空间中的正交投影定理和 Riesz 表现定理, 以及在微分方程、现代控制理论等学科中有重要应用的负范数空间; 第四章包括 Hahn-Banach 定理, 凸集分离定理, $L^p(\Omega)$ 和 $C(S)$ 上连续线性泛函的一般形式, 以及弱拓扑, 弱* 拓扑的基本概念; 第五章讨论了 Banach 空间中弱拓扑的基本问题, 证明了自反 Banach 空间的局部弱紧性; 第六章介绍含紧算子的第二类泛函方程的 Fredholm 三定理和正规可解算子; 第七章是 C_0 半群理论及其在微分方程中的简单应用. 显然, 许多重要内容(如广义函数, Banach 代数和算子的谱分解理论等)都没有编入本书, 对此我们也感到遗憾, 但是, 作为供60～70学时用的一个教材, 也只好如此.

本书在引入概念时, 力求把它和读者熟悉的知识联系起来; 注意突出中心问题和基本定理; 重要结果的证明, 尽量写得具有"探索性", 使之更适合读者认识的自然发展过程. 泛函分析在许多学科中有重要应用, 这些应用推动了泛函分析的发展, 并且成为泛函分析的组成部分. 在我们这样一本篇幅很小的书中, 不可能去讨论这些内容. 我们只是通过一些简单的例子使读者对应用泛函分析解决具体问题时应当注意的那些重要环节有所领会. 本书

基本上是自给自足的, 除要求读者知道 Lebesgue 积分的基本结果外, 没有其他特别的要求, 所需的预备知识都在适当的地方给出了足够详细的叙述.

书末的参考书目不是全面的, 只是告诉读者, 我们在编写过程中主要参考过这些书.

编者在教学和编写本书的过程中, 得到了严士健、孙永生两位老师的热情关怀和支持; 本书的油印稿朱汝金老师在教学中曾经用过, 天津师范大学数学系李凤友老师曾经看过, 他们都提出了宝贵意见, 在此, 我向以上各位老师表示衷心感谢. 由于编者水平有限, 经验不足, 本书难免有不少缺点, 希望读者予以指正.

周美珂

1991年2月23日于北京师大

第二版前言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据．纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1954～1960年是我院研究生教育初创阶段，招生为代数、分析、几何等方向的10个研究生班；1962～1965年改为招收少量的硕士研究生；1966～1976年“文化大革命”阶段，研究生停止招生．1978年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课．每年导师根据招生情况，分别制定每个研究生的培养计划．从1982年开始，首次开展制定攻读硕士学位研究生培养方案的工作．为拓宽研究生的知识面，对每届研究生开设5门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选3门；从1983年起，增加代数拓扑，共6门基础理论课，安排有经验的教师讲课且相对固定，考试要求严格，使研究生受到正规的训练．由于不同院校的本科生课程开设有一定的差距，经过这个阶段的学习后，基本上达到了一个相同的水平，为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障．在1992年修订教学计划时，增加了概率论基础和计算机基础．这样，基础理论课共开设8门．从1997学年开始，规定研究生每人至少选4门．从2000年开始，改为开设12门基础课，增加应用分析基础、偏微分方程、群论、随机过程．经过近30年系统的研究生培养工作，研究生教育正在逐步走向正规．在此期间，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的．

随着研究生的扩招，招收研究生的数量越来越大．再加上培养方案的改革，几年之后，研究生学制将由3年缩短为2年．因此，出版研究生系列教材已经提到议事日程上来．在20世纪90年代，北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材：泛函分析、实分析、随机过程等，但未系统策划出版系列教材．2005年5月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学

出版社理科编辑室王松浦主任进行了沟通和协商, 准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版, 进一步计划用几年时间, 出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论(数学)等硕士研究生使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2006-01-18

第二版编者的话

本书1992年出了第一版. 现在的第二版, 与第一版一样, 仍然是作为微分方程、函数论、概率论、数理统计、代数、应用数学等方向的硕士研究生的泛函分析教材而写的. 经过多年努力, 我们的教学和科研工作有了很大发展, 社会对研究生的质量要求比上世纪八、九十年代明显地提高了, 但是, 由于种种原因, 硕士研究生新生入学水平并没有多大变化, 一般来说,不能假定他们已经很规范地学习过数学本科的微分方程、函数论、拓扑学和泛函分析. 面对这个矛盾, 本书第二版与第一版一样, 力求作到起点不高, 容易入门, 内容充实, 符合研究生质量要求水准, 基本只给自足. 我们希望认真学习过数学本科数学分析、解析几何、线性代数, 并有一些微分方程基础知识的读者能读懂本书.

作者认为, 无论是讲授泛函分析的教师, 还是初学泛函分析的学生, 对书中那些启发性的叙述都不应置之不理. 它们通常是阐述泛函分析中的重要概念, 理论与经典分析、代数、几何之间的联系, 或者是描述其他数学分支, 物理学或应用科学中的相关问题和解决问题的思想方法.

书中的例子大多都是一些模型化的重要的数学问题, 作者不认为研究这些例子能代替相关数学理论的学习, 但希望通过它们帮助读者体会如何运用学过的空间理论、算子理论去观察、提炼所考察的具体问题中的“泛函分析内核”, 怎样寻找和建造从抽象的泛函分析概念、理论通向具体问题的桥梁. 读者应当象对待正文一样认真地研究这些例子, 不可狭隘地认为与自己所学专业无关而放弃它们.

全书共分十章和一个附录.

第一章介绍距离空间与点集拓扑, 它是为在本科没学过泛函分析和拓扑基础知识的读者写的. 没学过实变函数的读者, 在学过这一章中的距离空间完备化以后, 可读一下附录, 以补上本书所需的有关 Lebesgue 积分的知识.

第二章讲线性拓扑空间, 内容除线性拓扑的基本性质, 邻域基定理, 线性距离空间和局部凸空间外, 还有彻底改写过的“归纳极限空间”和新增加的“射影极限空间”两节.

第三、四、五章包含了线性算子理论中的几个基本定理, Hilbert 空间中的正交分解定理和 F. Riesz 表现定理, 以及 Hausdorff 局部凸空间中的 Hahn-Banach 定理. 这些内容是泛函分析理论和方法的基础.

第六、七两章, 以对偶对为基础讲述局部凸空间及其对偶空间中的常用拓扑和它们的基本性质, 其中第七章集中讨论 Banach 空间中与弱列紧方法相联系的弱拓扑与自反性理论.

第八章是最常用的算子理论, 包括 Banach 空间中的紧线性算子的 Riesz-Schauder 理论, Hilbert 空间中自伴紧线性算子的 Hilbert- Schmidt 定理和正规可解算子理论.

第九章讲述 Hilbert 空间中的重要算子, 酉算子群和自伴算子谱分解定理. 这一章的数学内容是与量子力学基本原理交织在一起写的. 我们试图让读者相信, 数学与物理学就像一个人的两条腿, 它们互为支撑, 彼此推动, 共同前进. 作者认为, 这也应该是学习、研究这两门科学的重要方法.

第十章先讲 Gelfand 的交换 Banach 代数理论, 然后利用它证明了 Hilbert 空间中正常算子的谱分解定理. 如果单纯为证明谱分解定理, 有不少不亚于 Banach 代数的方法. 但 Banach 代数在许多数学分支中都有应用, 而且这个理论充分地向我们展示了数学结构中代数性质与分析性质的密切联系, 使我们认识到代数方法对于泛函分析的重要性.

在教学和编写本教材的过程中得到了北京师范大学研究生院和数学科学学院的资助和鼓励, 在教材内容、讲法等方面一些师长和同事都提出过建议, 作者深深地感谢他们.

由于作者水平有限, 经验不足, 书中定有不少谬误和拙笨之处, 敬请有关专家和读者批评、指正.

周美珂

2007年6月

于北京师范大学京师园

目录

第一章　距离与拓扑

在数学的理论中和应用中经常出现"空间"一词, 所谓空间, 就是用公理的形式规定了其元素之间关系的集合. 经典分析是 N 维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中的分析理论, 极限是其最基本的概念, 极限理论是整个经典分析的理论基础. 回顾数列极限、函数极限等极限概念, 立刻发现, 它们都是用 $\mathbb{R}^N$ 中的距离概念或相应的邻域概念描述的. 泛函分析是在经典分析、代数和几何的基础上产生和发展起来的, 但与经典分析不同, 它主要是研究一般的无穷维空间中的分析问题. 因此, 泛函分析首先要推广 $\mathbb{R}^N$ 中的距离和邻域概念, 即从抽象距离空间和拓扑空间的研究开始. 这一章将介绍本书用到的这两个方面的基础知识.

§1.1　距离空间与拓扑空间的基本概念

定义1.1.1. 给定非空集合 $\mathcal{X}$, 设 $d:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ 满足条件

d1) $d(x,y)\geqslant 0$, 而且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$ (非负性);

d2) $d(x,y)=d(y,x)$ (对称性);

d3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (三角不等式),

则称它是 $\mathcal{X}$ 上的一个**距离函数**, 而装备了距离函数 d 的集合 $\mathcal{X}$, 记做 $(\mathcal{X},d)$, 叫做**距离空间**或**度量空间**.

例1. N 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$. 设

$$\mathbb{R}^N=\big\{x=(x_1,\cdots,x_N)\big|\,x_j\in\mathbb{R},\forall\ j=1,2,\cdots,N\big\}.$$

在 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 上定义

$$d(x,y)=\left[\sum_{j=1}^{N}(x_j-y_j)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad \forall\, x=(x_1,\cdots,x_N),\, y=(y_1,\cdots,y_N)\in\mathbb{R}^N.$$

$d(\cdot,\cdot)$ 显然满足定义1.1.1中的条件 d1), d2). 为证明条件 d3), 需要 Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{N}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^2\right),\qquad \forall\, a_k,b_k\in\mathbb{R},\,\forall\, k=1,\cdots,N,$$

且等号成立的充分必要条件是 $a=(a_1,\cdots,a_N)$ 与 $b=(b_1,\cdots,b_N)$ 线性相关.

利用 Schwarz 不等式易得 Cauchy 不等式:

$$\left[\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\forall\, a=(a_1,\cdots,a_N),\, b=(b_1,\cdots,b_N)\in\mathbb{R}^N,$$

而条件 d3), 即

$$\left[\sum_{k=1}^{N}(x_k-y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{N}(x_k-z_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{k=1}^{N}(z_k-y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$
$$\forall\, x=(x_1,\cdots,x_N),\, y=(y_1,\cdots,y_N),\, z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{R}^N,$$

是 Cauchy 不等式的直接推论.

现在证明 Schwarz 不等式.

如果 $b=0$, 等号显然成立, 且 a 与 b 线性相关. 下设 $b\neq 0$. 考察二次三项式 $P(\lambda)=\sum_{k=1}^{N}(a_k+\lambda b_k)^2$. 由于

$$P(\lambda)=\sum_{k=1}^{N}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{N}a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{N}b_k^2,$$

其判别式为

$$\Delta=\left(\sum_{k=1}^{N}a_kb_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^2\right).$$

由于 $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$ 有 $P(\lambda)\geqslant 0$, 可得 $\Delta\leqslant 0$, 即 Schwarz 不等式成立. 而且, $\Delta=0$ 的充分必要条件是存在 $\lambda^*\in\mathbb{R}$ 使 $P(\lambda^*)=0$, 亦即 $\sum_{k=1}^{N}(a_k+\lambda^*b_k)^2=0$, 这正是 a, b 线性相关. □

例2. 连续函数空间 $C[a,b]$. 令 $C[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f$ 连续$\}$, 在其中定义

$$d(f,g)=\max_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|,\qquad \forall\, f,g\in C[a,b].$$

易证 d 是 $C[a,b]$ 上的距离函数. □

定义1.1.2. 给定 $(\mathcal{X},d)$, 设 $x\in\mathcal{X}$, $r>0$, 称集合 $B(x;r):=\{y\in\mathcal{X}\mid d(x,y)<r\}$ 为 $(\mathcal{X},d)$ 中以 x 为中心、r 为半径的**开球**.

集合 $G\subset\mathcal{X}$ 叫做 $(\mathcal{X},d)$ 中的**开集**, 如果 $\forall\, x\in G, \exists r_x>0$ 使 $B(x;r_x)\subset G$.

利用条件 d3), 易证: 距离空间中的开球是开集.

定理1.1.1. 给定一个距离空间 $(\mathcal{X},d)$, 以 τ 记它的一切开集所构成的集族, 则

O1) $\mathcal{X},\varnothing\in\tau$;

O2) 若 $G_\alpha\in\tau\,(\forall\,\alpha\in\mathcal{A},\mathcal{A}$ 是任意指标集), 则 $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}G_\alpha\in\tau$;

O3) 若 $G_1,G_2\in\tau$, 则 $G_1\cap G_2\in\tau$;

以及

H) 若 $x,y\in\mathcal{X}$ 且 $x\neq y$, 则存在 $G_x,G_y\in\tau$ 使 $x\in G_x$, $y\in G_y$ 且 $G_x\cap G_y=\varnothing$.

证明 由距离空间中开集的定义可推出 O1)–O3), 而由距离定义的 d1), d3) 可得到 H). □

定义1.1.3. 给定非空集合 $\mathcal{X}$, 设 τ 是由 $\mathcal{X}$ 的一些子集构成的集族. 如果 τ 满足上述条件O1), O2), O3), 则称它是 $\mathcal{X}$ 上的一个**拓扑**, 而装备了拓扑 τ 的集合 $\mathcal{X}$, 记做 $(\mathcal{X},\tau)$, 叫做 **拓扑空间**. 如果 τ 还满足条件 H), 则称 τ 是 **Hausdorff 拓扑**, 而 $(\mathcal{X},\tau)$ 叫做 **Hausdorff 空间**.

若 $G\in\tau$, 则称 G 是 $(\mathcal{X},\tau)$ 的开集.O1), O2), O3) 叫做**开集公理**, H) 叫做 **Hausdorff 分离公理**.

设 $\mathcal{Y}$ 是拓扑空间 $(\mathcal{X},\tau)$ 的子集, 易见, $\mathcal{Y}$ 的子集族 $\tau_{\mathcal{Y}}=\{G\cap\mathcal{Y}\mid G\in\tau\}$ 是 $\mathcal{Y}$ 上的一个拓扑, 称之为 τ 在 $\mathcal{Y}$ 上的**诱导拓扑**, 而 $(\mathcal{Y},\tau_{\mathcal{Y}})$ 叫做 $(\mathcal{X},\tau)$ 的**拓扑子空间**.

易见, Hausdorff 空间的拓扑子空间仍是 Hausdorff 空间.

由定理1.1.1立刻得到: