21世纪高职船舶系列教材
SHIJI GAOZHI CHUANBO XILIE JIAOCAI

船舶工程专业

造船CAD/CAM

ZAOCHUAN CAD/CAM

主编 张海泉
主审 何志标

哈尔滨工程大学出版社

21世纪高职船舶系列教材
SHIJI GAOZHI CHUANBO XILIE JIAOCAI

船舶动力专业

造船CAD/CAM

ZAOCHUAN CAD/CAM

主　编　张海泉
副主编　杨　鹄　吴春芳　周　煜
主　审　何志标

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书介绍了造船CAD/CAM的有关概念和方法，以CAD/CAM实际知识为主线，比较系统地介绍了计算机辅助船体绘图和计算机辅助船舶设计知识，以及计算机辅助船舶建造软件的使用方法。

全书分十四章，一至四章介绍了计算机辅助船舶设计，包括船体型线设计与计算，计算机辅助船舶总布置设计，计算机辅助船舶结构设计；五至八章介绍了计算机辅助船舶绘图，船体图样表达的内容、方法和特点，对绘制船体型线图、总布置图、结构图、分段划分图的方法和步骤作了详细的介绍；九至十四章介绍了计算机辅助船舶建造、船体型线系统、船体构件展开的数学方法、船体加工的数值表示，并详细介绍了通用CAM系统软件。书中结合文字叙述有针对性地插入图片，以方便读者学习。

本书系高职高专统一编写教材，内容力求简明，实用针对性强，既可作为船舶工程类专业高职高专的规划教材，也可供从事船舶设计与制造的工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

造船CAD/CAM/张海泉主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.2
ISBN 978-7-81073-905-4

Ⅰ.造… Ⅱ.张… Ⅲ.①造船-计算机辅助设计-高等学校:技术学校-教材②造船-计算机辅助制造-高等学校:技术学院-教材 Ⅳ.U662.9

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第020801号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 787mm×1 092mm 1/16
印　　张 16.5
字　　数 355千字
版　　次 2007年2月第1版
印　　次 2007年2月第1次印刷
印　　数 1—2 000册
定　　价 28.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等职业教育系列教材编委会

（按姓氏笔画排序）

前言

造船 CAD/CAM
ZAOCHUAN CAD/CAM

CAD（Computer Aided Design，计算机辅助设计）/CAM（Computer Aided Manufacturing，计算机辅助建造）是指结合专业技术，通过计算机系统辅助进行设计与建造的一门应用性很强的学科。

CAD 在早期是英文 Computer Aided Drafting（计算机辅助绘图）的缩写。随着计算机软、硬件技术的发展，人们逐步认识到单纯使用计算机绘图还不能称为计算机辅助设计。真正的设计是整个产品的设计，它包括产品的构思、功能设计、结构分析、加工制造等。二维工程图设计只是产品设计中的一小部分。于是 CAD 的缩写也由 Computer Aided Drafting 改为 Computer Aided Design（计算机辅助设计），CAD 也不再仅仅是辅助绘图，而是整个产品的辅助设计。

CAM 可自动生成零件加工的数控代码，并可进行加工过程的动态模拟、干涉和碰撞检查等，为数控机床服务。

造船 CAD/CAM 课，是在学生熟练掌握计算机应用的基础知识和船舶制造专业知识的基础上开设的一门专业课，是本专业最重要、最核心的专业课程。这是因为船舶制造的高技术含量和高技能体现在计算机应用技术与传统制造技术的紧密结合上，而造船 CAD/CAM 课可以使学生熟练掌握使用计算机辅助船舶设计与建造的应用软件的技能，为从事船舶生产设计和建造的高技能工作打下坚实基础。依据这一课程目标，课程教学内容都是以企业中实际应用的技术为背景，教学内容的深度和学生应掌握的程度都是以在实际中应用的情况为依据决定的。

本书由武汉船舶职业技术学院的张海泉任主编，武汉船舶职业技术学院的杨鹄、吴春芳和南通航运职业技术学院的周煜任副主编，武汉船舶职业技术学院的何志标任主审。其中第一、二、五、六、八章由张海泉编写，第三、四、七章由吴春芳编写，第九至第十二章及第十四章由杨鹄编写，第十三章由周煜、钱天龙编写。

武汉船舶职业技术学院船舶工程系主任陈长江和副主任彭公武在百忙之中提出了宝贵建议，并给予了大力支持，在此一并表示感谢！

由于时间仓促及编者水平有限，书中难免有疏漏甚至错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2006 年 9 月

目录

目录

21世纪高职船舶系列教材

造船CAD/CAM

第一章　计算机辅助船舶设计概论

计算机辅助设计与制造(CAD/CAM)技术是随着计算机和数字化信息技术发展而形成的新技术，是20世纪最杰出的工程成就之一，也是数字化、信息化制造技术的基础。其发展和应用对制造业产生了巨大的影响和推动作用。经过几十年的发展和应用，不仅CAD/CAM本身已形成规模庞大的产业，而且为制造业带来了巨大的社会效益和经济效益。目前CAD/CAM技术广泛应用于机械、电子、航空、航天、汽车、船舶、纺织、轻工及建筑等各个领域，其应用水平已成为衡量一个国家技术发展水平及工业现代化的重要标志。

随着CAD/CAM技术的推广应用，它已逐渐从一门新兴技术发展成为一种高新技术产业，带动了一批企业的技术改造和技术更新，从事CAD/CAM技术应用的人员还将不断增加，因此应学习和掌握CAD/CAM的原理、方法与技术，以适应形势的发展和社会的需要。

计算机辅助设计(Computer Aided Design，CAD)是指工程技术人员以计算机为辅助工具来完成产品设计过程中的各项工作，如草图绘制、零件设计、装配设计、工程分析等，并达到提高产品设计质量、缩短产品开发周期、降低产品成本的目的。

当前世界造船各国在造船上广泛采用先进技术，以增强船舶建造上的竞争能力、提高造船的技术含量。过去船舶的设计主要靠人工完成。随着计算机技术的开发，特别是计算机辅助设计技术的产生和应用，造船设计有了很大的技术保障。

第一节　CAD在船舶设计中的应用

船舶设计是一个综合应用船舶学科中各类技术并伴有经济的复杂过程，因此船舶CAD系统的开发必然是一项工作量很大、技术难度很高的科研工作。从系统的完善程度及实际应用范围来看，国外的先进船舶CAD系统，如TRIBON等，在技术上比较先进，使用上也比较方便、迅速，但是由于系统是整套引进的，尚存在以下一些问题：

(1)系统的数据库缺乏开放性，与ORACLE，FOXPOR等数据库缺乏接口；

(2)系统的设计与使用有时不符合中国的造船生产和实践习惯，工艺标准工作难以实现；

(3)数据开放性不够，系统提供的数据限制太多，对特殊、复杂的型线，如中国内河船舶，不能够完全适应，并且系统的功能也难以开发和完善；

(4)系统不支持汉字的显示和打印；

(5)全面应用时需要开发大量的图形与数据接口；

(6)系统的价格比较高，在许多中小船厂、船舶设计研究单位难以推广。

国内开发的系统，在吸收国外先进技术的基础上，根据中国的实际情况开发，可以根据生产实践的需要，不断地及时更新改进，使用上更为方便。同时，价格具有较强的竞争力，一般不到国外同类系统的十分之一，便于推广应用。但国内的软件开发平台一般难以达到较高水平，如国内支撑软件仅是AutoCAD软件的水平(或者仅仅是实验、研究的起步阶段，无法进行实际应用)，在这种基础上开发的软件，技术上很难达到先进水平，实际应用上也比较困

难;而国外 CAD 系统开发应用的是较高水平的支撑软件平台,如荷兰 NCC 公司和芬兰 ELOMATIC 公司的 NUPAS/CADMATIC,是在 IMVEC 公司的 GLE 图形支撑软件的基础上开发的。

因此通过引进国外的先进图形支撑软件,或对先进的通用 CAD 系统进行二次开发,可以快速研制符合我国国情的计算机辅助设计(包括型线设计)系统,并不断根据生产设计的需要及时更新改进,才能方便地应用在设计中,并迅速进行推广。

第二节 船舶 CAD 系统发展概况

电子计算机问世以来,船舶工业是应用计算机起步较早的行业之一。早期使用计算机是以单项工程计算程序的应用为特征,例如美国上世纪 50 年代就出现了船舶静力学性能计算程序,至 60 年代中期才有了应用计算机与船舶工业的集成系统。1956 年挪威开发的 AutoKON 系统是最早的代表,即 Computer Aided Manufacture,简称 CAM 系统。这类系统初期包含的有些设计方面的程序较为简略,只是作为庞大的建造 CAD/CAM 系统的补充。除挪威的 AutoKON 系统以外,比较有名的系统有瑞典的 VIKING 系统和 STEERBEAR 系统、英国的 BRITSHIPS 系统及日本的 HICIS 系统等。另一个有名的造船系统,即西班牙的 FORAN 系统则被认为是将船舶设计和船舶建造作一体化考虑后开发的,因此其 CAD 部分比之其他系统更具特色。这些系统开发后在世界各地的大型船厂得到相当普遍的使用。数学放样、数控切割、数控弯板等新的造船工艺相继问世,对促进造船工业的技术改造起到了很大作用。由于硬件条件限制,早期这类系统都是借助于大、中型计算机作为运行平台,加之系统开发工作量大,整个系统的代价相当昂贵,只有大型船厂才有条件购买使用。船舶 CAD 系统在现时能获得广泛的应用是由于计算机的硬件及软件技术的进步。

为了使 CAD 系统在大、中型机上运行,这些机器均配置了专用的图形终端。辅助设计工作就在图形终端上进行。从理论上讲,主机在运行 CAD 系统的同时还可以运行其他的程序,例如船厂生产管理的 MIS 系统。但实际上 CAD 系统运行时占用主机的资源很多,很难再做其他工作。为此就以专用小型机来支撑图形终端,并再配置诸如绘图机之类的外部设备,从而形成了脱离大、中型计算机的独立系统,即图形工作站,又称 CAD 工作站。由于工作站的成本较低,效能又高,确实是为 CAD 系统创造了一个理想的硬件平台。自从第一台 Apollo CAD 工作站问世并广为使用后,不少计算机厂商均投入力量,进行 CAD 工作站的研制开发。目前市场上有名的 CAD 工作站产品有 SUN,HP,SGI,DEC 等等。这些 CAD 工作站已经成为 CAD 系统硬件平台的主流。当今世界上有名的船舶集成系统均已从大、中型机上移植到 CAD 工作站上。随着计算机结构日益紧凑、机身日趋小型化,CAD 工作站的占地面积越来越小,可以直接放置在设计人员的办公室里,各个 CAD 工作站之间又可以网络互联,为设计人员的使用提供了极大方便,因而大大推动了 CAD 系统的广泛使用。

除了硬件的进步外,软件技术,特别是计算机图形处理技术的进步也对 CAD 系统发展起了重大的作用。自从有专门用于图形处理的系统以商品化软件进入市场后,这类产品的发展很快,功能日益增强。目前市场上有名的产品有美国 CV 的 CADDS 系统,Calma 公司的 DDM 系统,PTC 公司的 Pro/Engineer 系统等,美国的 Intergraph 公司除了拥有图形软件产品外还生产 CAD 工作站。这些系统均有强大的图形处理功能,尤其在建模技术,即建造几何模型,包括实体造型方面达到了很高的水平。这些系统同样支撑多种 CAD 工作站硬件平台,

人们可以把它作为一种支撑软件，即软件平台根据自身行业特点进行二次开发，形成诸如建筑、机械、造船、飞机、汽车等专用CAD系统。由于有了图形系统作为支撑软件，CAD系统开发人就可以集中力量解决面向本专业的设计问题，并获得强有力的图形处理支持功能，使开发的CAD系统更完美。近年来，有些生产图形系统的软件公司，为了适应造船行业的需求，也开发了可为船舶设计直接应用的软件产品，如CV公司推出的CV HULL(船型与结构设计)、CV CST(钢结构设计)。这些软件综合CADDS的核心软件就构成了一个船舶CAD系统。

我国船舶工业的计算机应用始于上世纪60年代末。开始仅在很少的船舶科研单位使用，硬件条件也很差。至70年代，由于国产第二代计算机的小批量生产，使造船行业中较多的科研、设计单位及大型船厂相继配置了国产计算机。造船行业的计算机应用得到了较大的发展，开发了一批单项应用程序并在生产实践中得到使用。改革开放后，原先拥有国产计算机的单位又相继从国外引进了一批通用计算机，已经开发的应用程序被移植到进口机上。由于单项应用程序逐渐增多，逐步覆盖到船舶设计及船舶建造的主要领域，加之拥有了进口计算机，硬件条件大为改善，因而提出了集成这些单项程序为一个系统的要求。各单位均在各自的通用机上做了很多集成工作。中国船舶工业总公司的"计算机辅助造船集成系统"，简称CASIS系统，其一期工程即是组织实施系统集成的一项工程。CASIS系统包含了设计及建造二方面的内容，因此可以说它的一期工程是为我国自行开发的船舶CAD/CAM系统塑造了一个雏形。

随着CAD工作站及图形支撑软件在国内打开市场，上世纪80年代我国的船舶CAD系统开始走上选用CAD工作站作为硬件平台、以图形系统为支撑软件、进行二次开发的研制道路。如交通部"七五"重点项目，"船型论证CAD系统"是以Apollo工作站为硬件平台，Calam公司的DDM系统为图形支撑软件开发成功的。本书作为典型介绍的交通部主持的"八五"国家攻关项目"内河船舶CAD系统"，则是以SUN工作站为硬件平台，利用Pro/ENGINEER图形系统为支撑软件研制的。国防科委七院系统开发的军船CAD系统是以SUN工作站为硬件平台，以CV公司 的CADDS图形系统为软件平台开发的。这些系统的成功研制使我国船舶CAD技术发展到了一个新的水平，大大缩小了与国际先进水平的差距。

另外根据我国国情，微机CAD的应用很普遍，一些地方的小型船厂及设计部门利用微机开发了船舶CAD系统。这些微机版本的船舶CAD系统因其所需投资很小故而很易推广。随着微机性能的提高，开发的船舶CAD系统功能也越来越强，潜力很大。中国船舶工业总公司实施的CASIS三期工程已经列入了这方面的内容，其发展前景不可小看。

由于我国造船工业在改革开放后有了很大的发展。全国各大船厂都在接受国外船东订单，产品已打入国际市场。国内船舶CAD系统的研制开发一时还不能满足造船工业快速发展的需要，因此不少船厂已从国外引进了船舶CAD/CAM系统。其中KCS的产品最受注目，近年来大连船厂、大连新厂、江南船厂、沪东船厂、广州船厂均已引进此项产品。在引进国外产品的同时，国家也很重视开发拥有自主版权的国产船舶CAD系统。这种二条腿走路的方针已把我国船舶工业应用CAD技术推到一个新阶段。船舶CAD系统在国内很多地方已经成了船舶设计人员不可缺少的工具。对他们来说，多年盼望的"丢掉图板"的理想已经成为现实，传统的船舶设计方式已经发生了根本性的变革。

第二章　船体型线设计与计算

第一节　船体型线的数值表示

船体型线图是在三个相互垂直的投影面上，以船体型表面的剖切（截交）线、投影线和外廓线表示船体外形的图样，其中最主要的是一组三向光顺的曲线。这些曲线是船舶建造的基础，在数学放样大量应用以前，主要采用手工放样，其劳动强度大、误差大，大大阻碍了造船工业的发展。上世纪60年代初成功研究出了应用计算机进行数学放样的方法，大大推动了造船向数字化、自动化方向发展。

数学放样就是以计算机为工具、应用数学原理和方法进行船体放样的工作。数学放样的工作内容与手工放样相同，包括如下三个方面的内容：

(1)船体型线放样；

(2)船体结构放样；

(3)构件展开。

目前，数学放样在世界各个船厂已经得到了普遍应用，数学放样在船体建造中之所以得到重视，并不断发展，主要因为它相对于手工放样有其优点如下。

(1)为造船自动化的完整体系奠定了基础。放样工作是船体建造中的第一道工序，采用数学放样后，必然会促进后续工序的发展。由于数学放样所产生的都是数字化的记录，为后续工序的数据采集提供了方便。

(2)进一步沟通了设计和建造的关系。目前正在发展的数学船型，既是一种船型设计方法，又是采用了数学放样中型线光顺的一种手段，使设计和生产制造之间的关系更为紧密。

(3)降低了劳动强度和原材料消耗，缩短了放样周期。

(4)取消了放样间和样板储藏室，有效地降低了成本。

在手工放样时，是根据给定的型线图和型值表，在放样间地板上以一定的比例用样条进行绘制的，也就是通过若干给定的型值点进行绘制曲线。数学放样与手工放样一样，也需要通过若干离散的型值点绘制曲线，下面我们就来讨论如何利用一些给定的型值点来建立船体的型线。

一、曲线插值

在船舶建造中，船体的几何形状是以船体型线图表达的，型线图上的尺寸通过一个型值表统一反映。但在绘制型线图的过程中，由于反复量取数据，不可避免地存在误差，因此必须放大型线图，并通过型线光顺，保证剖面线上各对应点的一致性后，才能作为施工建造的依据。这就是型线的放样。

技术上所提供的型值表，其所能给出的型值的个数是非常有限的。例如，型线图上给出的是站距，而在建造中所要使用的数据是肋距，这就使得型值表中的型值个数远远不能达到确定船体构架轮廓的需要。这样也就产生一个问题，即如何根据较少的型值来较精确地找出那些介于站线间肋骨框架的型值，从而确定船体纵向的型线，保证船体型线的光顺性。

从数学上讲,型值是船体曲面在三维直角坐标系中按照一定的规则分布的一系列离散的点,从型值表上有限的数据来看它根本不可能准确描述船体曲面,这就需要在这些离散点的基础上在保证光顺和遵守原来型值的前提下,通过一定的方法"造出"其他的一些必要的型值点。根据满足某曲面函数的一些已知离散点的坐标,来寻找曲面上其他点的坐标,这在数学上称为插值问题。

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义,在 $[a,b]$ 上已知点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上取值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$,若存在一简单函数 $p(x)$,使 $p(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 成立,则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值点,$[a,b]$ 为插值区间。

若 $p(x)$ 为次数不超过 n 次代数多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,则 $p(x)$ 为插值多项式,相应的插值法为多项式插值。若 $p(x)$ 为分段多项式,就是分段插值。

得到了通过上述若干点的函数,则函数上的任意点的坐标都是可以得到的,这样也就可以"造出"其他一些必要的型值点了。

综上所述,给出曲线插值及曲线插值函数的概念:所谓曲线插值就是选择的函数(曲线)表达式点点通过已知型值点,如图 2-1 所示;而插值函数就是在给的坐标系中,给定一系列型值点 $(x_i,y_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$,通过这些型值点必然存在一函数 $f(x)$,但是这一函数的表达式可能很难或者根本无法写出,给出一简单函数 $p(x)$,使 $p(x)$ 也点点通过已知型值点,即 $p(x_i)=y_i(i=1,2,\cdots,n)$,$p(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的插值函数。

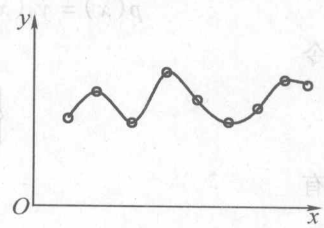

图 2-1

一个函数通过一系列点是确定的,但是反过来通过这些点的曲线不一定就是原来的那条曲线。如对于函数 $y=x^2$,其曲线经过点 $(-1,1)$,$(0,0)$,$(1,1)$,但是反过来不能说通过上述 3 点的曲线就是这个函数,例如 $y=|x|$,$x^2+(y-1)^2=1$ 也过上面的 3 个点,所以如果只给定曲线所通过的点是没有办法确定曲线的,插值函数就是点点通过所给的型值点,并且其函数形式是给定的,这样是可以求出其函数表达式的。同时可以看出,曲线插值是一种操作的方法。而插值函数是利用插值的方法得到的一个新的函数,是插值的一个应用。

二、线性插值

根据插值函数的概念,已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0,x_1 处的函数值为 y_0,y_1,即函数过点 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1),作一简单函数 $p(x)$,使 $p(x_0)=y_0$,$p(x_1)=y_1$,如果求得简单函数 $p(x)$,则求得函数 $f(x)$ 的插值函数。

如图 2-2:函数 $y=f(x)$ 为一复杂函数,在给定的条件下很难写出该函数的表达式,但知道该函数上的两个点 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1),于是通过这两个点作一直线(即所谓的简单函数 $p(x)$,亦即函数 $f(x)$ 的插值函数),则称通过两点作的插值为线性插值,也称为一次插值。

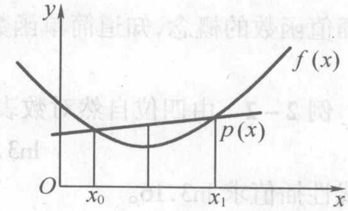

图 2-2

现在来求简单函数 $p(x)$,由于知道该函数是过 (x_0,y_0),(x_1,y_1) 两点的直线,故用待定系数法,令 $p(x)$ 为一次多项式

$$p(x)=a_0+a_1x$$

这里只要求出待定系数 a_0 和 a_1，则函数 $p(x)$ 就可以被唯一确定下来了。

直线通过 (x_0,y_0)，(x_1,y_1) 两点，代入直线方程可以得到

$$\begin{cases} y_0=a_0+a_1x_0 \\ y_1=a_0+a_1x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0=y_0-x_0(y_1-y_0)/(x_1-x_0) \\ a_1=(y_1-y_0)/(x_1-x_0) \\ p(x)=y_0+(x-x_0)(y_1-y_0)/(x_1-x_0) \end{cases} \tag{2-1}$$

$p(x)$ 称为一次插值多项式，它的余项估计为

$$R(x)=f(x)-p(x) \tag{2-2}$$

它的证明这里从略，今后的插值函数的余项的证明都一律从略。

将式(2-1)写成两点式直线方程

$$p(x)=y_0(x-x_1)/(x_0-x_1)+y_1(x-x_0)/(x_1-x_0) \tag{2-3}$$

此处令

$$\begin{cases} N_0(x)=(x-x_1)/(x_0-x_1) \\ N_1(x)=(x-x_0)/(x_1-x_0) \end{cases} \tag{2-4}$$

显然有

$$N_0(x_0)=1,\quad N_0(x_1)=0$$

$$N_1(x_0)=0,\quad N_1(x_1)=1$$

$$N_0(x)+N_1(x)=1$$

于是式(2-3)可以表示为

$$p(x)=N_0(x)y_0+N_1(x)y_1 \tag{2-5}$$

这里称 $N_0(x)$、$N_1(x)$ 为基函数或者形函数，它是一种很有用的函数形式，这在后面的各种插值函数中得到了很好的体现。而式(2-5)是用基函数描述的插值函数形式，这也是插值函数通用的一种表达方式。显然，这里的函数 $p(x)=N_0(x)y_0+N_1(x)y_1$ 通过点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，也就是说用基函数表示的函数是可以满足条件的。

例 2-1 已知函数 $f(x)$ 过两点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，其中 $x_0=5,y_0=10,x_1=8,y_1=15$，利用线性插值求 $f(6)$。

解 由公式(2-1)得

$$p(x)=y_0+(x-x_0)(y_1-y_0)/(x_1-x_0)$$

$$p(6)=10+(6-5)(15-10)/(8-5)=11.67$$

由插值函数的概念，知道简单函数 $p(x)$ 是函数 $f(x)$ 的插值函数，故

$$f(6)\approx p(6)=11.67$$

例 2-2 由四位自然对数表查得

$$\ln 3.1=1.131\,4,\quad \ln 3.2=1.163\,2$$

用线性插值求 ln3.16。

解 取 $x_0=3.1,x_1=3.2,f(x_0)=1.131\,4,f(x_1)=1.163\,2$，利用基函数的形式求解。

$$N_0(x)=(x-x_1)/(x_0-x_1)$$

$$N_1(x)=(x-x_0)/(x_1-x_0)$$

$$N_0(x)=(3.16-3.2)/(3.1-3.2)=0.4$$

$$N_1(x)=(3.16-3.1)/(3.2-3.1)=0.6$$

由式(2-5)得

$$p(x)=N_0(x)y_0+N_1(x)y_1=0.4\times 1.131\,4+0.6\times 1.163\,2=1.150\,50$$

由插值函数概念 $f(x)\approx p(x)$，所以 $\ln 3.16\approx 1.150\,5$。

由图 2-2 可以看出线性插值是用两点之间的直线来直接代替 $y=f(x)$，误差是显而易见的。

三、二次插值

从上一节知道，用线性插值的优点是求解简单，缺点是误差较大。可以设想，如果再增加一个插值点 (x_2,y_2) 其插值结果必然会更接近原函数值，效果要比线性插值好。

通过不在同一直线上的三点的插值多项式 $p(x)$（简单函数）是一抛物线，称这种插值为二次插值或者抛物线插值。

如图 2-3 所示，取三个点作为插值点，很显然，插值函数更接近原函数，插值所得出的结果也必然更接近原函数值。

由于是通过三点作的简单函数，所以 $p(x)$ 必然是二次多项式。记作

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \qquad (2-6)$$

其中 a_0,a_1,a_2 都是待定系数，只要求出这些待定系数，$p(x)$ 就被唯一确定下来了。

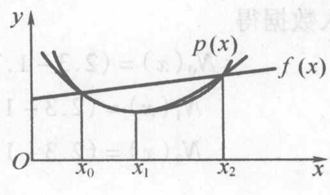

图 2-3

函数 $p(x)$ 通过三个已知点：(x_0,y_0)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，将三点代入式(2-6)得

$$\begin{cases} y_0=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2 \\ y_1=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2 \\ y_2=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2 \end{cases}$$

解出 $a_0,a_1,a_2,p(x)$ 就被唯一确定了。但是这种解决的方法很复杂，联系上节内容，可以用基函数来描述此二次多项式

$$f(x)=N_0(x)y_0+N_1(x)y_1+N_2(x)y_2$$

这里

$$N_0(x)=(x-x_1)(x-x_2)/(x_0-x_1)(x_0-x_2)$$

$$N_1(x)=(x-x_0)(x-x_2)/(x_1-x_0)(x_1-x_2)$$

$$N_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)/(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

也显然有

$$N_0(x_0)=1,\quad N_0(x_1)=0,\quad N_0(x_2)=0$$

$$N_1(x_1)=1,\quad N_1(x_0)=0,\quad N_1(x_2)=0$$

$$N_2(x_2)=1,\quad N_2(x_0)=0,\quad N_2(x_1)=0$$

满足函数通过已知三个点的条件，在上节中已经提到基函数很重要，在求插值函数时，如果

知道该函数的基函数，则该插值函数也就可以直接写出了，但基函数的形式有没有什么规律可循呢，仔细观察上述基函数的分子和分母，可以发现如下规律：

(1)分子中不出现$(x_i - x_j)$项；

(2)分母中不出现$(x - x_i)$项；

(3)分子分母项数相同，形式类似。

例 2-3 根据已经函数 $f(x)$的下列三个点的坐标值

$$x_0 = 1.1 \qquad f(x_0) = 10.6$$
$$x_1 = 1.7 \qquad f(x_1) = 15.2$$
$$x_2 = 3.0 \qquad f(x_2) = 20.3$$

利用二次插值求 $f(2.3)$的近似值。

解 给出简单函数 $p(x)$作为函数 $f(x)$的插值函数，用插值的方法求 $f(2.3)$的近似值。应用基函数的形式，根据上述基函数的形式规律可以写出基函数。

$$N_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)/(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$
$$N_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)/(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$$
$$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)/(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

代入数据得

$$N_0(x) = (2.3-1.7)(2.3-3.0)/(1.1-1.7)(1.1-3.0) = -0.368$$
$$N_1(x) = (2.3-1.1)(2.3-3.0)/(1.7-1.1)(1.7-3.0) = 1.077$$
$$N_2(x) = (2.3-1.1)(2.3-1.7)/(3.0-1.1)(3.0-1.7) = 0.291$$

由

$$p(x) = N_0(x)y_0 + N_1(x)y_1 + N_2(x)y_2$$

得

$$p(2.3) = -0.368 \times 10.6 + 1.077 \times 15.2 + 0.291 \times 20.3 = 18.377$$

因 $p(x) \approx f(x)$，故 $f(2.3) \approx 18.377$。

四、曲线拟合

上述的曲线插值问题，是针对离散点处的函数值 $p(x_i) = y_i$ 进行插值，而在其他点处，只能使 $p(x) \approx f(x)$。由于误差的存在，致使这些型值点不一定都是符合要求的点，由于是点点通过，必然会导致插值出来的函数曲线不光顺，甚至不满足要求。在船体型线中要求三向光顺性，这就使插值曲线很难满足要求，也为插值函数带来一系列的麻烦。

为离散数据建立连续模型，或者说为离散点配一条曲线，有两种途径。一种是曲线必须精确通过由已知离散数据确定的离散点，这就是我们前面讨论的曲线插值方法。另一种是要求曲线符合离散点分布的总体轮廓，而不要求曲线精确地通过各离散点，即所谓的曲线拟合。

为了使所求的函数逼近效果更好，产生了所谓拟合问题。其具体内容是：已知一系列试验数据(x_j, y_j)，其中 $x_j = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_m^{(1)})$，$y_j = f(x_j)$，$(j = 1, 2, \cdots, n)$，使根据实践经验或理论分析所建立的数学模型，在包含有最大限度消除误差的优化判断条件下，找出函数 $p(x)$尽可能逼近函数 $f(x)$。

设真正的未知函数为 $f(x)$，则实验测得表达此未知函数的一系列离散点为(x_j, y_j)，

$(j=1,2,\cdots,n)$，现要在选定的函数式情况下，按概率最佳这一目标来求取其函数表达式的参数，以确定拟合函数 $y=p(x)$。下面重点介绍最小二乘法。

1.最小二乘法原理

在工程测量中，对某直线长度的量取常采用分段量取的方法，如图 2-4。

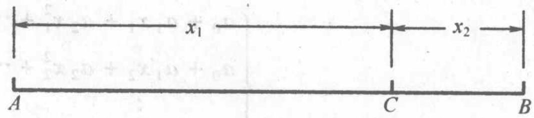

图 2-4

根据几何学 $AC+CB=AB$

根据测量结果，$AC=80.325$，$CB=25.675$，$AB=105.998$，这显然与事实是矛盾的，因为在测量中不可避免地存在误差，致使产生这种结果是必然的。为了降低误差，在工程测量中通常采用进行多次或者重复测量的方法来确定未知量，可以想象这里的测量值 x_1,x_2 必然存在一个最优值。那么什么是最优值呢？其实就是使误差最小的测量值。

由于有误差的存在，$x_1-80.325=0$，$x_2-25.675=0$，$x_1+x_2-105.998=0$ 将不能全部成立，无论 x_1,x_2 取什么值都不可能使等号右边都为零。为了解决这一矛盾，我们把方程写成如下形式

$$x_1-80.325=r_1$$
$$x_2-25.675=r_2$$
$$x_1+x_2-105.998=r_3$$

这里 r_1,r_2,r_3 表示误差，现在的问题就是 x_1,x_2 取什么值能使误差的绝对值最小。

这里要使误差 r_1,r_2,r_3 的绝对值达到最小，只要使它们的平方和 $r_1^2+r_2^2+r_3^2=R$ 最小就可以了。

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=(x_1-80.325)^2+(x_2-25.675)^2+(x_1+x_2-105.998)^2$$

这是一个关于 x_1,x_2 的二元函数，记为 $\phi(x_1,x_2)$。我们要做的就是找到合适的 x_1 和 x_2，使得 $\phi(x_1,x_2)$ 取最小值，根据通常求极值的方法，即求出 $\phi(x_1,x_2)$ 对于 x_1 和 x_2 的偏导，并使它们等于零，于是有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1}=2(x_1-80.325)+2(x_1+x_2-105.998)=0\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x_2}=2(x_2-25.675)+2(x_1+x_2-105.998)=0\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}2x_1+x_2-186.323=0\\ x_1+2x_2-131.673=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=80.324\ 3\\ x_2=25.674\ 3\end{cases}$$

这就是 x_1,x_2 的最优值，代入 $\phi(x_1,x_2)$ 得 $\phi(x_1,x_2)=0.000\ 000\ 134$。

2.用最小二乘法进行曲线拟合

对 m 组试验数据 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,m)$，要找到一个合适的近似函数关系式 $y=p(x)$，取最简单的形式，设所求的函数关系式为 n 次多项式 $(n<m)$

$$y=p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

只要能求出待定系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，则 $y = p(x)$ 可以被唯一确定下来了。

应用最小二乘法原理，将这些点代入 $y = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 可以得到 m 个方程

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n - y_1 = r_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n - y_2 = r_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1x_m + a_2x_m^2 + \cdots + a_nx_m^n - y_m = r_m \end{cases}$$

注：这里的 $m > n$，即方程的个数多于未知数的个数，为什么不用联立方程组求解这些未知量呢？请读者思考。

限于篇幅，这里对如何求解待定系数的推导过程不作详细说明，仅给出计算方法。

对于一般的多项式拟合函数 $y = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 有

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^0 & \sum_{i=1}^m x_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i^1 & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_ix_i^0 \\ \sum_{i=1}^m y_ix_i^1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m y_ix_i^n \end{pmatrix}$$

解上述线性方程组就可以得到要求的待定系数。

例 2-4 已知函数值表

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	20.5	20.7	21.2	21.8	22.3

用最小二乘法作二次多项式 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ 拟合这组数据。

解 这里 $m = 5, n = 2$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^0 & \sum_{i=1}^m x_i^1 & \sum_{i=1}^m x_i^2 \\ \sum_{i=1}^m x_i^1 & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 \\ \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i^3 & \sum_{i=1}^m x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_ix_i^0 \\ \sum_{i=1}^m y_ix_i^1 \\ \sum_{i=1}^m y_ix_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106.5 \\ 4.7 \\ 213.7 \end{pmatrix}$$

解得