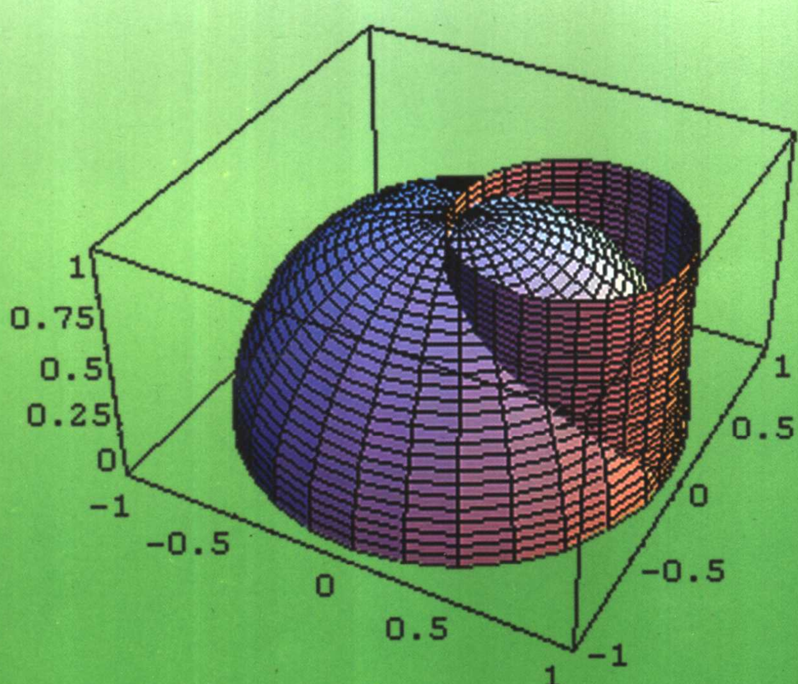
工程数学基础

曹辉　主编



青海人民出版社

高职工科数学教材

工程数学基础

主　编　曹　辉

主　审　王克兰

副主编　王雁海　王春梅　沈素军

　　　　晏慧琴　侯海存

编　委　廖春生　马文素　杨群益

　　　　李　强　刘海莲

青海人民出版社

2006·西宁

图书在版编目（CIP）数据

工程数学基础/曹辉主编. —西宁:青海人民出版社，2006.9

ISBN 7-225-02815-4

Ⅰ.工... Ⅱ.曹... Ⅲ.工程数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 105493 号

工程数学基础

曹辉　主编

出版发行：青海人民出版社（西宁市同仁路 10 号）
邮政编码 810001　总编室（0971）6143426
发行部（0971）6143516　6123221

印　刷：青海雅丰彩色印刷有限责任公司

经　销：新华书店

开　本：787mm×1092mm　1/16

印　张：13.25

字　数：290 千

版　次：2006 年 9 月第 1 版

印　次：2006 年 9 月第 1 次印刷

印　数：1－3 000

书　号：ISBN 7-225-02815-4／G·1147

定　价：19.80 元

前　言

编写本书的目的是为文化基础相对薄弱的少数民族地区的高等职业院校提供一本适合学情的教学课本。不可否认，西部、特别是西部的少数民族地区，学生数学基础较为薄弱。在长期的教学实践中，我们感到使用数学起点较高的成熟教材，学生学习时感到有些吃力，从某种程度上说，影响到了教与学双方的积极性。长此以往，既不利于学生的成才，也有损数学教学本身，为此，我们经过多次调研和思考，决定编写这本教材。我们希望这本教材能在一定程度上满足少数民族地区职业院校的数学教学要求。

在教材的编写过程中，力求突出以下几个特点：

一、宽基础、低要求

高职院校的培养目标规定："学生应具有较强的动手能力及一定的专业基础理论知识。"对培养的毕业生主要定位在"具有较强的动手能力"上，这就是高职生与一般本科生培养目标的本质区别，也正是由于这样的实质性差异，也就决定了职业院校的数学教学应以学生能够完成专业学习为主要目的。鉴于这样的原因，在充分调研的基础上，根据完成高职学业所必需的数学知识汇编成了这本书。主要包含了微积分、矩阵、概率与数理统计三部分内容，在结构框架的安排上，力求循序渐进、深入浅出、通俗易懂，注重数学结果的介绍，淡化理论的推导，强调对所学的知识能仿例解决简单问题就可以了，不强调对所学知识举一反三、融会贯通。每一章内容只配了少量的习题，供消化巩固所学知识，大大地降低了学生学习数学的难度。

二、重思想、轻理论

我们在调研中发现，专业教材中除了常用的数学知识外，用得最多的是数学思想，如极限、微分、积分等。因此，在编写中对常用的几个概念补充了一些专业的例子。通过数学背景的介绍让学生了解到学习数学并不是纸上谈兵，而是学习专业所必需的，增强学生学习的兴趣和自觉性，同时也加深了数学思想的理解和印象。特别是通过阅读材料的介绍，让学生"粗线条"地了解到数学对解决实际问题的重要性，通过对实际例子的初浅说明，增强学生把数学概念、方法内化为数学思想的能力，从更广的意义上说，提高学生解决问题的能力。

三、近专业、求实效

应当承认，学生中有不少人是抱着一种既敬又畏的紧张心情在学习数学，这就为数学教学提出了这样的问题：怎样提高数学的亲和力。我们想，除了教师的教学魅力外，在教学内容的安排上也是比较重要的。便于学生学以及学完有用是我们编排教学内容的最重要的原则。为了适应少课时教学的需要，在教材的衔接上采取了一些新的处理方法，减少了不经常用的公式和定理。由于教材内容的安排选自专业课程中出现的常用数学知识，因此，内容上更靠近专业需求，教学

的实效性也就更高，教学目的性也就更强，教学效果也就更好。

本书的编写得到了青海交通职业技术学院、青海建筑职业技术学院的大力支持，在院领导和很多老师的共同参与下，经过多次的讨论和修改才得以完成。具体执笔编写的有曹辉(第一章)、王春梅(第二章)、侯海存(第三、四章)、王雁海(第五、六章)、马文豪(第七章)、沈素军(第八章)、晏慧琴(第九、十章)，王克兰对本书的内容进行了全面审查，廖春生、杨群益、李强、刘海莲、熊鹏飞同志参与了修订工作。此外，翟秀兰、郭量、李永芳、高海河老师对本书提出了许多宝贵的修改意见，仲晓军老师也为本书的尽早出版出力帮忙，在此一并感谢。

本教材的书稿虽经过多次的修改，但由于编者水平所限，加上时间紧，书中的不足和考虑不周之处一定很多，错误也在所难免，我们希望能得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编写组

2005 年 4 月

目　　录

第一章　函数及其性质

第二章　极限与连续

第三章　导数与微分

第四章 导数的应用

第五章 不定积分

第六章 定积分及其应用

第七章 微分方程初步

第八章 矩阵及相关知识

第九章 随机事件与概率

第十章　数据处理

第一章 函数及其性质

1.1 数学学习中的 A、B、C

现实生活中的种种事物和现象内或外之间,总会存在一定的数量之间的"关系". 一般来说,这种"关系"常常是繁杂多样、不便把握和相对的,抛开研究对象的具体内涵,通过归纳、分析、抽象来研究它的共性的问题,就形成了一门学科学问 —— 数学. 应该说,数学源于生活.

纵观人类文明的发展史,不难看出,数学对社会发展的推动作用是非常明显的. 如微积分理论的建立,推动了工业化的大发展;模糊数学、离散数学理论的建立,推动了工业的现代化、信息化和数字化. 现实生活中,我们经常使用的物品、电器、通讯和交通工具等的生产,都离不开数学理论的指导. 换句话说,数学的发展,又加快了我们生活现代化的步伐.

大家都有多年学习数学的经验,由于先天因素和后天努力的差异,对学习数学的感受也是不同的. 应该先明确一个问题,我们学习数学应该学什么?就是数学技法和数学思想. 技法是泛指大家应掌握的数学知识,如定义、公式、性质、法则、运算律、图形等. 不断地学习和掌握数学知识这一点是非常必要的,是认识客观世界所必须的. 就认识运动规律来说,小学里是这样介绍的:"一辆汽车以每小时 56 千米的速度匀速行驶,问 2 小时行驶多少千米."中学里就有所进步了,是这样讲的:"一辆汽车,在静止状态下,以 $2m/s^2$ 的加速度做匀加速直线运动,问 $10s$ 后,汽车行驶了多少 m."现实生活中的汽车运动,远比中小学课本里的描述复杂得多,简单地用匀速、匀加速来描述汽车的实际运动情况是不现实的,两者的表述都有局限性,反映的都是运动过程中的局部,而不是全部. 事实上,要相对客观地描述汽车的运动规律,就需要新的数学知识. 大家即将学习的《高等数学》就是用来解决实际工作中初等数学解决不了的问题,应该说《高等数学》才是真正意义上"解决问题"的数学,它与生活贴得更近,是工科学生必须掌握的一门基础课.

数学思想是大家学习过程中应该注意把握的问题. 数学思想是一个泛称,包括很多方面,如数学思维、数学认识、数学意识、数学方法、数学应用等,它是数学的精髓之一. 从某种意义上说,比学习公式更重要、更有力,也更现实. 解决实际问题时的思考方法、缜密的逻辑思维能力、严谨的科学态度,都是学习和工作中不可缺少的宝贵财富,这些又恰好都是数学思想的具体体现.

"怎样才能学好数学?"是很多学生非常关心的一个问题. 熟练掌握基础知识、基本技能和基本方法,是学好数学的必要条件. 在正确理解数学概念的基础上,通过自己的学习活动,深化对基础知识的理解,重视知识的发生、发展过程,体会定理、法则、公式推导过程中蕴含的数学思想方法,掌握解决问题的一般规律,这些都是应做到的. 应该认识到,没有坚实的基础,能力的提高就是无本之木、无源之水.

勤于练习、善于思考,是学好数学的必经之路. 美国著名数学家 *G · Polya* 说过:"掌握数学就意味着善于解题."数学的学习活动总是和解题活动紧密相连的. 适量的解题练习,可以帮助大家有效地消化理解定义、定理、公式、法则,达到掌握数学的目的. 此外,还应认识到,解题后的

回顾和反思的重要性远超过解题本身．思考些什么?这是看一个人会不会学习的主要标志．学习中通常要从以下几个方面思考问题：1．这个题是否还有更好的解法？2．能不能把这个结果用于其他问题？3．把条件换成其他形式，结果怎样?长期坚持，就能养成解题后思考的良好习惯．这时，学习数学你就自然而然地会进入应对自如、游刃有余的境地．这就是“不思则无，深思则远，远思则宽”的道理．

及时归纳、总结是学习数学的有力保证．有效的学习应该通过下面的三个过程来完成：1．原始知识积累；2．优化知识结构；3．构建知识网络．学习中应养成及时归纳、总结的习惯，只有通过这一环节，才能把积累的原始资料进行知识结构的优化。理解知识的来龙去脉，便于在头脑中形成知识网络，最终把知识内化为能力．随着学习的深入，沟通不同知识网络之间的内在联系，这样学到的知识才能既有系统性，又有整体性，学习效果才能更好．

学习过程中应该处理好几个问题，首先，要有恒心．学习数学是一项长期艰苦的脑力劳动，需要不断的毫无怨言地“付出”．数学知识的特性已经决定了，无论是谁要学好数学都需要一定时间的消化和理解．也就是说，学好数学不是一蹴而就能办到的，它需要一个过程，这一点大家要有心理准备．其次，要有决心．数学是思维的“艺术体操”，学习数学不同于一般的简单的劳动，离不开大脑的思维活动．由于人与人之间的先天和后天的差异，造成了思维的效果不同，表现在学习上就有了一定的差异．学习中遇到困难是件很正常的事，正确对待是关键．面对困难，要有勇气敢于迎上去，要有一种不服输的精神和不解决问题不罢休的气概．这时，需要冷静头脑、摆正心态，仔细分析问题的症结所在，找出相应的解决办法．不要一遇到挫折，就气馁、就逃脱，这无助于问题的解决，也无助于顽强的意志品质的培养．最后，要有信心，对于大家来讲，应该说学习数学并没有实际表现出来的那么难，经过精心“筛选”后的数学内容，从某种程度上说，只是一层“窗户纸”，一捅就破．要相信自己的能力，只要用“心”认真去学，相信大家是一定能够学好的．

学习过程中也要把握“大处着眼，小处着手”的原则．数学语言是一种具有很强学科特点的语言，包含丰富的数学内涵，看一个人数学学得好坏，就是通过数学语言是否能正确理解和使用来判断的．因此，平时练习时，要注意体会数学语言的内涵，加强对数学语言的理解，达到提高使用正确率的目的．

例 1 计算、化简下面的各题．

(1) $\sqrt{(\pi-4)^2}$；

(2) 若 $f(x)=x^2+3x-1$，求 $f(x+\frac{1}{2})$．

这是两道简单的习题，但有的同学给出了如下的答案．

解 $|\pi-4|=4-\pi$.

解
$$\begin{aligned} f(x+\frac{1}{2}) &= (x+\frac{1}{2})^2+3(x+\frac{1}{2})-1 \\ &= x^2+4x+\frac{3}{4} \\ &= 4x^2+16x+3. \end{aligned}$$

以上的两个解答都有不妥之处，(1) 题是从代数式出发的计算、化简问题，解答的过程，从汉语的语法角度来讲，缺少主语，数学意义的表达就容易给人产生错觉，应该把题抄上或加“原式”．(2) 题给出了一个函数关系，来研究与它有关的一个问题．从数学运算的角度来讲，这是研

究函数 $f(x)$ 中,把自变量 x 变为$(x+\frac{1}{2})$ 求新函数的问题,计算格式是正确的,错的是最后一步,把只有方程(分式) 能使用的运算性质,用到了代数式的计算和化简上,属于滥用运算性质造成的错误.

例 2 解方程 $3x+4=2(x-3)$.

解 $3x+4=2x-6$

$=x=-10$.

这也是错误的.方程是把两个代数式用等号连接的数学问题,解方程就是从等式出发的运算问题,经过变形、化简后的方程与原方程之间只是同解方程,两者往往是不等的,解答中两个变形后的方程用等号连接,这样就犯了错误,应把第二个等号去掉,这样,就保持了是对等式进行运算的格式.

例 3 计算 $\sin\frac{7\pi}{3}\cos(-\frac{\pi}{6})+\sin(-\frac{\pi}{6})\cos\frac{7\pi}{3}$.

解
$$\begin{aligned}原式&=\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{6}+(-\sin\frac{\pi}{6})\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})\\&=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

括号是数学运算中出现频率较高的符号,括号括起来的量,通常表示的是一个不可分割的"整体",往往不能省略,一旦省略,数学意义就会发生变化.如 $\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})$ 表示的是:自变量为 $2\pi+\frac{\pi}{3}$ 时,正弦函数的值;如把括号省略,则为 $\sin2\pi+\frac{\pi}{3}$ 表示的是:自变量为 2π 时,正弦函数的值与 $\frac{\pi}{3}$ 的和;显然,这是两个截然不同的问题.再如 $+(-\sin\frac{\pi}{6})$,省略括号后为 $+-\sin\frac{\pi}{6}$,数学里就不存在这种既加又减的运算.因此,学习中大家应注意括号以及其他数学符号的正确使用问题.

学习是一项艰苦的劳动,只有那些不畏艰难、勇于攀登的人,才有希望获得成功.

1.2 函数

我们学过的初等数学,主要是以静止的观点来研究数量间的关系的.但是,17 世纪以来,随着航海、机械、建筑、交通、水利工程,特别是信息技术的迅速发展,人们遇到了大量用初等数学无法解决的问题.于是,产生了高等数学 —— 研究变量的数学.在高等数学中,我们不仅要研究变量各自的变化规律,而且更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系.在数学上,函数就是反映这种依赖关系的一个基本概念.变量与函数是高等数学的主要研究对象之一,本书就从这里讲起.

1.2.1 变量和常量

在我们观察各种现象或过程的时候，经常会遇到两种不同的量，一种是在变化过程中保持不变，取一个固定数值的量，这种量称为常量；另一种是在变化过程中会起变化、可在一定的范围内取不同数值的量，这种量称为变量．常量的例子很多，如物体的重力加速度，北京到香港的直线距离等等．变化的量更是随处可见，例如温度、湿度、降雨量等等．如果稍加注意，会发现这些变化的量，随时间、地域、季节的不同而不同．同样，在工程建设中，工程的进度也是一个变化的量，是受管理、资金、天气等多重因素制约的．变化的量之间相互制约的关系是普遍存在的，这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念，就是函数．它是我们定性、定量地研究各种变化的量的一个非常重要的工具．习惯上，用 $a,b,c,\cdots$ 等表示常量，而用 $x,y,z,\cdots$ 等表示变量．

1.2.2 函数概念

在给出函数的定义之前，先看几个例子．

例 1 公路建设中，工程造价预算可以简记为

$$y = mx + n.$$

其中，y 为总费用，x 为公路的长度，m 为每公里的造价，n 为其它费用的总和．

例 2 某工厂每天生产产品 A 的件数为 x，机械设备等固定成本为 1600 元，生产每件产品所花费的人工费用和使用原材料费用等单位产品变动成本为 6 元，那么每天日产量 x 与每天的生产总成本 C 之间的对应关系由下式

$$C = 6x + 1600$$

给出．

例 3 现行国内异地邮寄信件的收费标准是这样规定的，每 20g 以内资费 0.8 元，具体关系如下

$$F(m) = \begin{cases} 0.8 & 0 < m \leqslant 20(g), \\ 1.6 & 20 < m \leqslant 40(g), \\ 2.4 & 40 < m \leqslant 60(g), \\ \cdots & \cdots \end{cases}.$$

$F(m)$ 为邮资，m 为信的重量．

类似上述关于变量之间相互依赖关系的例子是很多的，从以上的例子可以看出：虽然每个问题所包含的具体意义及变量之间关系的表现形式不同，但它们都具有共同的本质，既参与同一过程的变量间是相互联系的，且当中一个变量取定某个值时，按照一定的规律，另一个变量就有确定的值与它对应．

定义 1.1 设 x 和 y 是同一变化过程中的两个变量，若当 x 取其变化范围 X 内任一值时，按某种法则 f，变量 y 总有惟一的值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x),$$

称变量 x 是**自变量**，变量 y 是**因变量**，表示**对应法则**的 f 是函数的记号，集合 X 称为函数的**定义域**．

由定义看出，定义域与对应法则是函数概念的两大要素．对于定义域为 X 的函数，称集合

$\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 为该函数的值域．

当自变量取一个值时，函数的对应值，叫做函数值．对于函数 $y = f(x)$，当 $x = x_0$ 时，对应的函数值记为

$$f(x_0) \quad 或 \quad y\big|_{x=x_0}$$

如函数 $y = 3x^2 - 2x + 1$，当 $x = 5$ 时的值，表示为 $f(5) = 3 \times 5^2 - 2 \times 5 + 1 = 66$.

函数是研究变量变化问题的．研究中，会经常考虑变量在一个确定位置"周围"变化的情况，通俗理解为研究这点"附近"的变化情况．这里需要引进邻域的概念．

以 x_0 为中心，以 2δ 为长度的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0, \delta)$. 即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$，如图 1－1($a$) 所示．

在 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0，所得集合记作 $U'(x_0, \delta)$，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，即 $U'(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$，如图 1－1($b$) 所示．

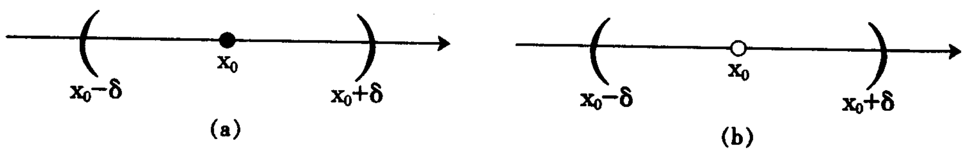


图 1-1

例如 $U(3, 0.5) = \{x \mid |x - 3| < 0.5\}$，表示点 3 的 0.5 邻域，它就是开区间 $(2.5, 3.5)$.

$U'(1, 0.25) = \{x \mid 0 < |x - 1| < 0.25\}$，表示点 1 的 0.25 去心邻域，它是两个开区间的并：

$$(0.75, 1) \cup (1, 1.25).$$

1.2.3 函数概念的几点解释

1.2.3.1 函数的记号

在定义 1.1 中，函数的记号 $f(x)$，x 表示的是函数的自变量，f 表示变量之间的对应法则，二者是一个不可分割的整体，不是乘积的关系，而等式

$$y = f(x)$$

只是表示变量 x 与 y 之间具有的确定对应关系，具体的含义要根据表达式确定．例如，对于函数

$$y = f(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$

说明函数的自变量是 x，是通过运算式 $3(\quad)^2 - 2(\quad) + 1$ 将自变量 x 变为相应的函数值 y 的．于是，$x = 5$ 时，相应的函数值 $y = f(5) = 3 \times 5^2 - 2 \times 5 + 1 = 66$. 想一想，函数 $y = f(x + 1) = 2x - 1$ 中的自变量应理解为__________.

1.2.3.2 函数的两要素

由定义 1.1 可知，定义域 X 是自变量 x 的取值范围，而 x 对应的函数值 y 又是由对应法则 f 来确定，所以函数由它的定义域 X 和对应法则 f 完全确定．我们将函数的定义域和对应法则称为函数的两要素．如果两个函数的定义域相同，对应规则也相同，则将这两个函数视为同一个函数或称这两个函数相等．例如，当 x，t 的变化范围相同时，

$$y = 2x + 3,$$
$$g = 2t + 3,$$
就是相等的函数．由此可见，函数与表示其变量的符号是无关的．

1.2.3.3 函数的单值性

因为定义 1.1 中有“对 X 内的每一个值 x 都有**惟一**的 y 值与 x 对应”这样的表述，所以称定义 1.1 中所定义的函数为**单值函数**．如果定义中没有“惟一”这一限制，即某一变量 x 有不止一个 y 值与之对应，则称这样的函数为**多值函数**，本书只讨论单值函数．

1.2.3.4 函数的图形

对于任意一个确定的函数 $y = f(x)$，定义域 X 中的每一个 x 与其对应的函数值 $f(x)$ 可构成数对 $(x, f(x))$．当 x 取遍它的定义域时，这些数对 $(x, f(x))$ 在平面直角坐标系中所对应的点集，称为该函数的图形，函数的图形一般是曲线或一些散点．

1.2.3.5 函数的表示法：

(1) 解析法(又称公式法) 用数学式子来表示两个变量之间的对应关系．如本节例 1 就是用解析法表示的函数．

对于表示函数的解析法，需要作以下几点说明：

① 有时一个函数不能由一个式子表示，而需要在定义域的不同区域用不同的式子来表示，这样的函数称为**分段函数**．如本节例 3 中的函数．

② 如果因变量 y 可以表示成一个只包含自变量 x 的式子，那么我们将这样的函数称为**显函数**．如果两个变量之间的对应关系可以由一个方程

$$F(x, y) = 0$$

来确定，即当 x 的值给定后可以由此方程确定 y 的值，我们就说这个方程确定了一个函数 $y = f(x)$．我们将这样由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数 $y = f(x)$ 称为**隐函数**．如方程

$$x^2 + y^2 = a^2$$

所确定的函数，就称为隐函数．

③ 如果对于一个由解析法表示的函数 $y = f(x)$ 的定义域，没有加以特殊的限制，那么该函数的定义域就是使表达式有意义的所有 x 构成的集合，我们将这种定义域称为函数的**自然定义域**．

(2) 图示法(又称图像法) 用平面曲线来表示变量之间的对应关系．如心电图、脑电图、统计部门定期发布的经济运行曲线等．

(3) 表格法(又称列表法) 将自变量的一些值与相应的函数值列成表格，表示变量之间的对应关系．如数学用表、成绩单等．

在函数的三种表示法当中，解析法是对函数的精确描述，它便于对函数进行理论分析和研究．图示法是对函数的直观描述，通过图形可以清楚地看出函数的一些性质．列表法常常是在实际应用问题中使用的描述方法，这是由于在许多实际问题当中，变量之间的对应关系，常常难以由一个确定的解析式来表示．

1.3 函数的基本性质

1.3.1 单调性

有些函数的函数值随自变量的增大而增大，有些函数的函数值随自变量的增大而减小，这就是函数的单调性．

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X，若对于 X 内任意的 x_1, x_2，如果 $x_1 < x_2$，就有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 X 内是**单调增加**的．如果 $x_1 < x_2$，就有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 X 内是**单调减少**的．

在定义 1.2 中，若将 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$）改为 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$），则称函数 $y = f(x)$ 在 X 内是**单调不减**（或不增）的．单调增加或单调减少的函数，以及单调不减或单调不增的函数，统称为**单调函数**．

有些函数在定义域 X 内不是单调函数，但在 X 内的一个区间内具有单调性，我们将这种区间称为函数的**单调区间**．

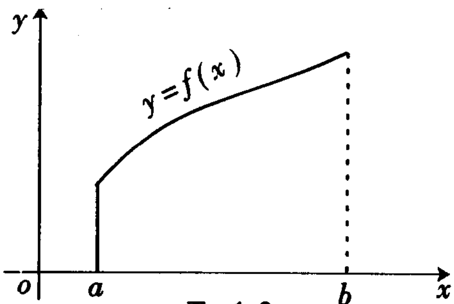


图 1-2

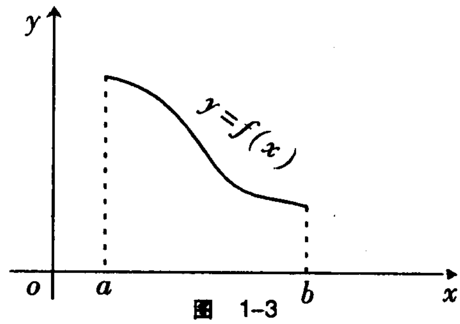


图 1-3

通过观察函数的图形，来判断函数的单调性是一种十分有效的办法．如图 1—2 中函数在 (a,b) 上是单调增加的．图 1 - 3 中函数在 (a,b) 上是单调减少的．而图 1 - 4 中的函数不是单调函数，但在 (a,b) 与 (c,d) 上是单调增加的，在 (b,c) 上是单调减少的，(a,b)，(b,c) 和 (c,d) 都是函数 $y = f(x)$ 的单调区间．

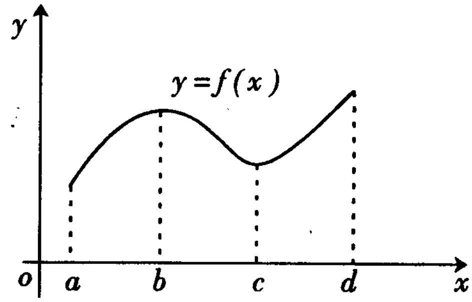


图 1-4

1.3.2 奇偶性

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，若对 X 中任意的 x，满足

$$f(-x) = f(x)$$

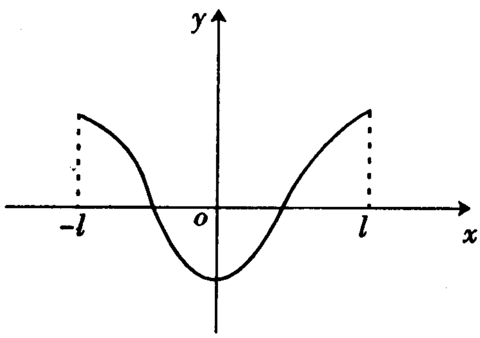
则称函数 $y = f(x)$ 是 X 上的**偶函数**．若对 X 中任意的 x，满足

$$f(-x)=-f(x)$$

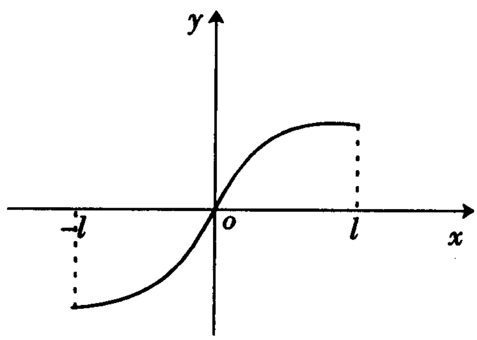
则称函数 $y=f(x)$ 是 X 上的**奇函数**．

奇函数和偶函数都具有对称性．在研究这类函数时，只要知其一半，便可知其全部．从函数的图形上看，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．图 1－5(a) 中的函数是偶函数，图 1－5(b) 中的函数是奇函数，由定义 1.3 可知，只有当函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称的，才有可能讨论它的奇偶性．

用定义判断函数的奇偶性时，要注意定义域的对称性，此外对任意的 $x\in Z$，要用 $-x$ 代替 x，计算出 $f(-x)$ 的表达式，把结果与 $f(x)$ 进行比较，得出结论．



(a)



(b)

图 1–5

1.3.3　有界性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，如果存在正数 M，使得对于 X 中任意 x，有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 是有界的；反之，称为无界．M 称为函数的界．

例如　函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 就是有界函数，因为对任意的 x，都有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right|\leqslant 1.$$

这里的 1 就可以看作定义 1.4 中的正数 M.

如图 1－6，从几何图形直观上看，有界函数 $y=f(x)$ 的图形，夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 及 $y=-M$ 所确定的带形区域内．

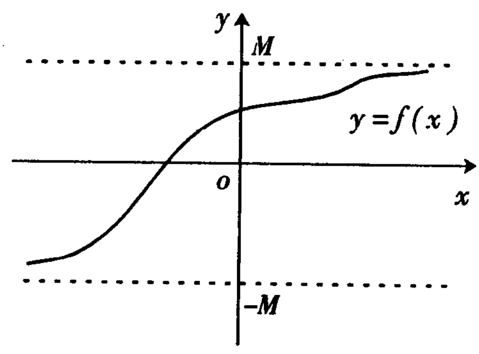


图 1–6

1.3.4　周期性

有这样一类函数，每当自变量增加或减少一个固定的数值时，它的状态及特征就会重复出现，函数的这种性质就是周期性．