全国煤炭高职高专"十一五"规划教材

初等数学

（下册）

主编 赵文茹 赵光耀

煤炭工业出版社

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

初等数学

（下册）

主编　赵文茹　赵光耀

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书是全国煤炭高职高专“十一五”规划教材之一.

《初等数学》分为上、下两册. 上册共四章，主要包括集合与逻辑用语、不等式、函数、任意角三角函数等内容，总学时约 90 学时. 下册共七章，主要包括空间图形、直线、二次曲线、极坐标与参数方程、排列与组合、复数、数列等内容，总学时约 90 学时.

本书为高等职业教育和中等职业教育“应用数学基础”课程的通用教材，也可供成人教育、函授和培训使用.

图书在版编目（CIP）数据

初等数学. 下册/赵文茹，赵光耀主编. —北京：煤炭工业出版社，2007.8

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5020-3129-9

Ⅰ. 初… Ⅱ. ①赵… ②赵… Ⅲ. 初等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 091593 号

煤炭工业出版社 出版

（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）

网址：www.cciph.com.cn

环球印刷（北京）有限公司 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 9

字数 210 千字 印数 1—5,000

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

社内编号 5930 定价 15.00 元

全国煤炭高职高专基础课程类“十一五”规划教材

编审委员会

前　言

《初等数学》是全国煤炭高职高专"十一五"规划教材之一.

本教材是遵照教育部2000年颁布的五年制高等职业教育"应用数学基础"课程基本要求,根据《中等职业学校数学教学大纲》及《全日制普通高级中学数学教学大纲》进行精心编写的.

《初等数学》分为上、下两册. 上册共四章,主要包括集合与逻辑用语、不等式、函数、任意角三角函数等内容,总学时约90学时. 下册共七章,主要包括空间图形、直线、二次曲线、极坐标与参数方程、排列与组合、复数、数列等内容,总学时约90学时.

本教材在编写时注重读者的阅读要求,力求适应职业教育教学特点和需要,尽量做到淡化理论推导,避繁就简,科学直观. 注重学生数学能力的培养,突出实际应用与数学的内在联系. 教材内容的选取,本着"够用,必需"的原则,力求使内容体系保持完整,同时有所创新. 知识内容的编排按照由浅入深、由易到难、循序渐进的原则,做到概念清楚、语言准确、通俗易懂,让读者感到轻易地就进入到了数学境地.

本教材的主要特色在于:

(1) 突出职业教育的特点. 数学课程是职业教育的一门重要的基础课,为适合职业教育的培养目标,保证教材更好地为专业课服务,在编写时注重了与实际密切联系,尽可能地列举实际事例,以提高学生的理论与实际相结合的能力.

(2) 使用范围更广泛. 本教材不仅符合中等职业学校的教学大纲,可作为中等职业教育的教材使用;同时也可作为成人教育、函授和培训教材. 可满足不同学制、不同专业和不同办学条件的教学需要.

(3) 知识体系更完整. 本教材把初等数学以一个完整的内容体系呈现给读者. 例如,本教材具有复数、极坐标、参数方程等知识,更适合职业教育的需要.

(4) 注重数学知识的应用性. 本教材从身边的生产、生活等实例入手,不仅体现数学的自然科学性,更拉近了读者学习数学的距离. 力求培养学生的综合数学素质和解决实际问题的能力.

(5) 内容设计更全面. 本教材每一章前都设计了本章内容的导引,每一节后都安排了精心设计的习题,每章构建了知识结构框图,供读者串联本章知识. 章后还配备了自我检测的复习题,供读者检验学习的效果,最后给出了习题的答案供参考.

(6) 注意做好与九年制义务教育的衔接.

本教材由赵文茹(辽宁工程技术大学职业技术学院)、赵光耀(北京工业职业技术学院)

任主编,范彩霞(山西煤炭职业技术学院)、彭淑梅(北京工业职业技术学院)任副主编,王世杰(山西煤炭职业技术学院)参加了编写.具体分工如下:第五章、第八章、第十章由赵文茹编写,第六章由彭淑梅编写,第七章由赵光耀编写,第九章由范彩霞编写,第十一章由王世杰编写.本册书由赵文茹统稿.

北京工业职业技术学院的李士芳老师仔细审阅了全书,并提出了许多宝贵意见,在此表示衷心感谢!

在编写本教材过程中,尽管我们做了许多细致的工作,但由于水平有限,难免在书中还会出现错误之处,恳请使用本教材的广大师生批评指正,以便修订时改进提高.

编　者

2007 年 5 月

目　　录

第五章 空间图形

在平面礁何里，我们学过了点和线在同一平面内的几何图形，即平面图形，并且知道了一些平面图形的概念、画法、性质、计算和它们的应用．可是在日常生活和生产实践中，还会遇到所有点不全在同一个平面内的几何图形，例如，汽车、楼房、书、计算机等物体的几何形状，这种图形叫做空间图形(或立体图形).

空间图形是由空间的点、线和面所组成的图形，也可以看成是空间的点集．我们学过的平面图形是空间图形的一部分．本章将在初中几何知识的基础上，进一步研究空间图形的基础知识，包括最基本的空间图形(空间的直线、平面和简单几何体)的概念、画法、几何性质、位置关系的判定、计算及其应用等．

第一节 平面及其基本性质

一、平面及其表示法

常见的桌面、黑板面、平静的水面等；都是实际中平面的形象．几何里的平面就是从这些形象中抽象出来的，是无边无际的．也就是说，几何里的平面是可以无限延展的，上述各物体的面只是平面的一部分．

当我们从适当的位置观察桌面或黑板面时，感觉到它们都很像平行四边形．因此，在空间图形中通常把一个平面画成平行四边形，并且用希腊字母 α、β、γ…写在平行四边形的某一顶角的内部来表示．如图 5－1(a)、(b)、(c) 所示．有时也用平行四边形的顶点的字母来表示一个平面，如图 5－1(d)所示的平面可以表示为平面 $ABCD$，或简写成平面 AC(简写时

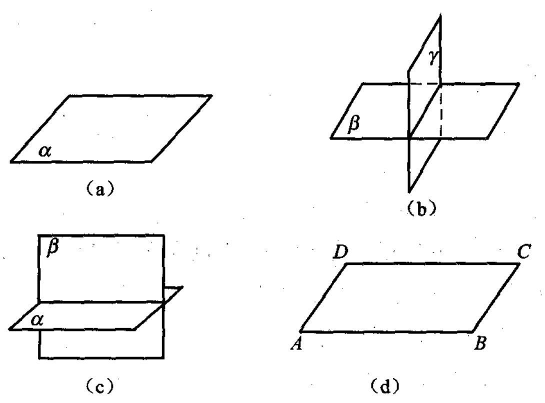


图 5－1

用对角的两个字母）. 至于点和直线的表示法，仍和平面几何一样，即用一个大写的拉丁字母 A、B、C…表示点；用一个小写的拉丁字母 a、b、c…或两个大写的拉丁字母 AB、CD…来表示直线.

画一个水平放置的平面时，一般要把平行四边形的锐角画成 45°，水平放置的横边的长度画成邻边长的 2 倍，如图 5－1(d)所示. 画一个直立的平面时，可把平面画成矩形或平行四边形，并且一条竖边要画成与水平平面的横边垂直. 如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时，那么被遮住部分的线应画成虚线或不画. 如图 5－1(b)、(c)所示.

二、平面的基本性质

人们在长期的观察和实践中，总结出关于平面的三个基本性质，我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础.

公理 1 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上. 人们经常利用这个道理来检验物体的表面是否平整.

如图 5－2 所示，直线 l 上有 A、B 两个点均在平面 α 内，那么 l 上所有的点都在平面 α 内. 这时我们说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l，记作 $l\subset\alpha$. 点 A 在直线 l 上记作 $A\in l$，点 A 在平面 α 内记作 $A\in\alpha$，点 A 不在平面 α 内记作 $A\notin\alpha$. 公理 1 的含义也可用符号表示为

$$A\in l, B\in l, A\in\alpha, B\in\alpha \Rightarrow l\subset\alpha.$$

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

例如，房间里墙角处的那个点是相邻两面墙的公共点，这两面墙还有其他公共点，这些公共点的集合就是这两面墙的公共直线.

如图 5－3 所示，若平面 α 与平面 β 有一个公共点 A，那么这两个平面就相交于过 A 点的一条直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$.

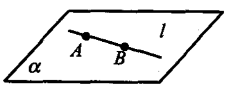


图 5－2

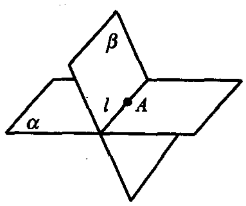


图 5－3

公理 3 过不在同一直线上的任意三点，有且只有一个平面.

例如，常见的三脚凳和测量用的三脚架，都是这个公理的应用.

过 A、B、C 三点的平面又可记作平面 ABC.

根据上述公理，可以得出下面的推论.

推论 1 过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

如图 5－4(a)所示，C 是直线 l 外一点，在 l 上任意取两点 A、B. 根据公理 3，过不在同

一直线上的三点 A、B、C 可以作一个平面 α，因为 A、B 两点都在平面 α 内，所以根据公理 1 可知直线 l 在平面 α 内，即经过直线 l 和直线外一点 C 可以作一个平面 α. 再根据公理 3，过不共线的三点 A、B、C 的平面只有一个，所以经过直线 l 和点 A 的平面有且只有一个.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

如图 5－4(b)所示，直线 a 与 b 相交于点 P，记作 $a\cap b=P$.

推论 2 用符号表示为：$a\cap b=P\Rightarrow$有且只有一个平面 α，使 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$.

推论 3　过两平行直线，有且只有一个平面.

如图 5－4(c)所示. 用符号表示为：$a/\!/b\Rightarrow$有且只有一个平面 α，使 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$.

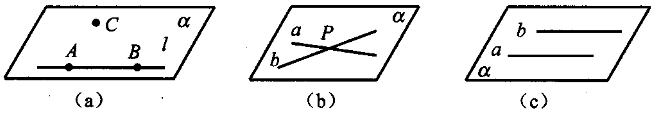


图 5－4

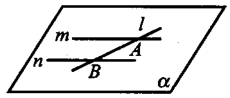


图 5－5

例 1　如果一条直线和两条平行直线相交，求证这三条直线共面(在同一个平面内).

证明　如图 5－5 所示，m、n、l 为三条直线，并且 $m/\!/n$，$l\cap m=A$，$l\cap n=B$.

$\because m/\!/n\Rightarrow m,n$ 可以确定一个平面 α，

又 $A\in m,B\in n\Rightarrow\left.\begin{matrix}A\in\alpha,B\in\alpha\\A\in l,B\in l\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\subset$平面 α，

$\therefore$直线 m、n、l 共面.

习题 5－1

1. 将书的一角接触桌面(书看成是一个平面)，这时书所在的平面与桌面所在的平面有几个公共点?

2. 过一条直线可以作多少个平面?

3. 过一点可以作多少个平面? 过两点可以作多少个平面?

4. 下面说法是否正确? 为什么?

(1) 任意三点确定一个平面.

(2) 如果三条直线相交于一点，那么这三条直线必在一个平面内.

(3) 如果一条线段在一个平面内，那么这条线段的延长线也在这个平面内.

(4) 任意三角形必然是一个平面图形.

5. 用生活中的实例说明本节中的公理及推论.

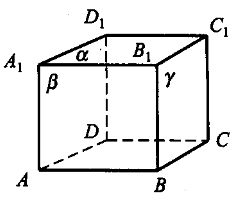
6. 正方体的各顶点如图所示，正方体的三个面所在平面 A_1C_1、A_1B、BC_1 分别记作 α、β、γ.

(1) $A_1\in\alpha$，B_1 ____ α，C_1 ____ α，D_1 ____ α；

(2) $A\in\beta$，B ____ β，A_1 ____ β，B_1 ____ β；

(3) $A\notin\alpha$，B ____ α，A ____ γ，B ____ γ；

(4) $\alpha\cap\beta=A_1B_1$，$\beta\cap\gamma=$ ____，$\alpha\cap\gamma=$ ____.



第 6 题图

7. 用符号表示下列语句，并画出图形：

(1) 点 P 在平面 α 内，但在平面 β 外；

(2) 直线 l 在平面 α 内，但不在平面 β 内；

(3) 直线 l 和 m 相交于点 P；

(4) 平面 α 和 β 的交线是 l，点 P 在 l 上；

(5) 直线 l 经过平面 α 内一定点 P，但 l 在 α 外.

8. 四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

9. 过已知直线外一点和这直线上的三点分别作三条直线，证明这三条直线共面.

10. 空间有四个点，它们中间的任何三点都不在一条直线上，这样的四个点能够确定多少个平面？

第二节　空间两条直线的位置关系

一、空间两条直线的位置关系

我们知道，在同一平面内的两条不重合的直线的位置关系只有平行和相交两种. 可是，在空间的两条不重合的直线之间，还有着另外一种位置关系. 观察图 5－6 所示的立方体中，线段 AA_1 和线段 B_1C_1 所在的直线不同在一个平面内，它们既不相交，又不平行. 对于有这样位置关系的直线，给出下面的定义.

定义　不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

图 5－6 中的线段 AA_1 与 B_1C_1、AB 与 DD_1 等所在的直线，都是异面直线.

因此，空间的两条不重合的直线的位置关系有以下三种：

(1) 相交——在同一个平面内，只有一个公共点；

(2) 平行——在同一个平面内，没有公共点；

(3) 异面——不同在任何一个平面内，没有公共点.

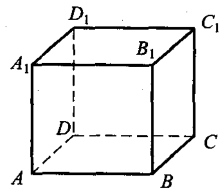


图 5－6

画异面直线时，要显示出它们不同在一个平面内的特点，要画成如图 5－7 中(a)、(b)、(c)所示的情形，要避免如图 5－7 中(d)、(e)所示的画法.

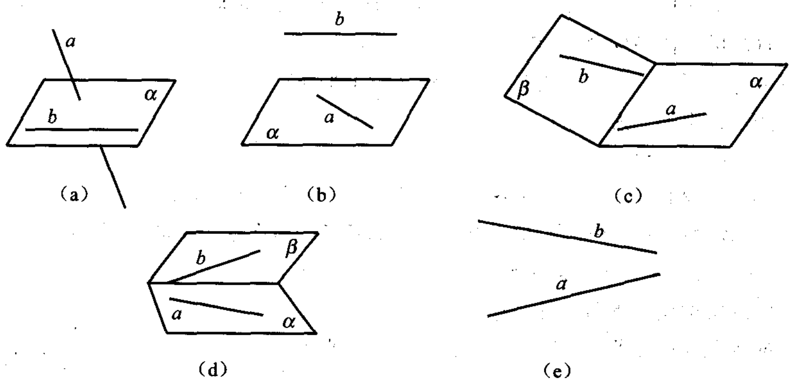


图 5－7

二、空间两条直线的平行关系

在平面几何里，平行于同一直线的两条直线是互相平行的. 同样，空间的三条直线也有这样的性质.

公理4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

公理4也可以用符号表示如下:

设 a、b、c 为三条直线, $\left.\begin{array}{l}a /\!/ b \\ c /\!/ b\end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ c$.

这三条直线两两平行又可记作 $a /\!/ b /\!/ c$.

例1　已知空间四边形(四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形) $ABCD$, E、F、G、H 分别是四边 AB、BC、CD、DA 的中点. 求证: $EFGH$ 是平行四边形.

证明　如图5-8所示, $ABCD$ 是空间四边形,连接 BD. ∵ EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线, ∴ $EH /\!/ BD$, $EH=\frac{1}{2}BD$. 同理, $FG /\!/ BD$, $FG=\frac{1}{2}BD$. 从而 $EH /\!/ FG$, $EH=FG$, 即四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

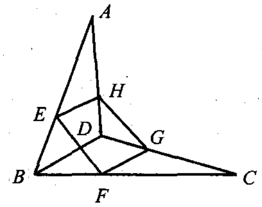


图5-8

由公理4我们还可以推出下面的结论.

定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行,并且方向相同,那么这两个角相等.

对于两个角在同一平面内的情形,在平面几何里已经证明,现仅证明两个角不在同一个平面内的情形.

如图5-9所示,已知: $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的两边有 $AB /\!/ A'B'$, $AC /\!/ A'C'$, 并且方向相同. 求证: $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

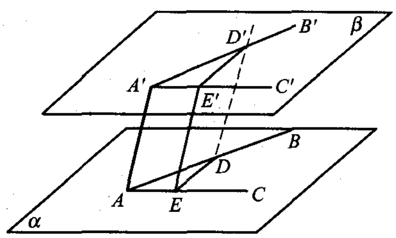


图5-9

证明　在 AB、$A'B'$、AC、$A'C'$ 上分别截取 $AD=A'D'$, $AE=A'E'$. 连接 DE、$D'E'$、AA'、DD'、EE'. ∵ $AD /\!/ A'D'$, $AD=A'D'$ ⇒ 四边形 $AA'D'D$ 是平行四边形, ∴ $AA' /\!/ DD'$, $AA'=DD'$.

同理, $AA' /\!/ EE'$, $AA'=EE'$. 从而 $DD' /\!/ EE'$, $DD'=EE'$, 即四边形 $DD'E'E$ 也是平行四边形, ∴ $DE=D'E'$. 则 $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$, 从而 $\angle BAC=\angle B'A'C'$ 得证.

把上面两个角的两边反向延长,就得出下面的推论.

推论　如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

值得注意的是,并不是所有平面图形得出的结论都可以推广到空间图形的. 例如,在同一平面内,垂直于同一直线的两条直线互相平行,但在空间里就没有这样的结论. 请同学们自己举例说明.

三、两条异面直线所成的角

定义　自空间任意一点分别作两条异面直线的平行线,这两条直线所成的锐角(或直角),叫做两条异面直线所成的角. 如图5-10所示.

两条异面直线所成的角,只与直线 a、b 的位置有关,而与所取点 O 的位置无关. 为了方便,点 O 经常取在两条异面直线中的一条上,如图5-11所示.

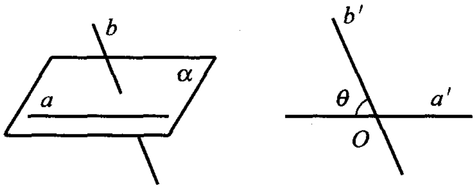


图 5－10

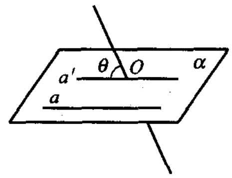


图 5－11

如果两条异面直线所成的角是直角，那么叫做这两条异面直线互相垂直．异面直线 a 和 b 互相垂直，也记作 $a \perp b$．如图 5－12 所示的立方体中，因为两条棱 AB、B_1C_1 所在的直线是成 $90°$ 角的异面直线，就说 AB 与 B_1C_1 互相垂直，记为 $AB \perp B_1C_1$．棱 AA_1、BC 所在的直线是两条异面直线，直线 AB 与它们都垂直相交．我们把与两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两条异面直线的公垂线．两条异面直线的公垂线夹在这两条异面直线间的线段的长度，叫做两条异面直线的距离．

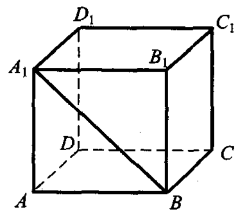


图 5－12

图 5－12 中线段 AB 的长度，就是两条异面直线 AA_1 与 BC 间的距离．

例 2 图 5－12中的正方体的棱长为 a．

(1) 图中哪些棱所在的直线与直线 BA_1 成异面直线？

(2) 求直线 BA_1 和 CC_1 所成的角的大小．

(3) 求异面直线 BC 和 DD_1 的距离．

解 (1) 直线 CC_1、C_1D_1、DD_1、CD、DA、B_1C_1 都与直线 BA_1 成异面直线．

(2) $\because BB_1 /\!/ CC_1$，$\therefore BA_1$ 和 BB_1 所成的锐角就是 BA_1 和 CC_1 所成的锐角．

$\because \angle A_1BB_1 = 45°$，$\therefore BA_1$ 和 CC_1 所成的角是 $45°$．

(3) $\because CD \perp BC$，$CD \cap BC = C$，又 $\because CD \perp DD_1$，$CD \cap DD_1 = D$，

$\therefore CD$ 是异面直线 BC 和 DD_1 的公垂线． $\because CD = a$，$\therefore BC$ 和 DD_1 的距离是 a．

习题 5－2

1．什么叫做平行直线？什么叫做异面直线？说明它们的共同点和区别．

2．没有公共点的两条直线就是异面直线，对吗？请你举出教室里几对异面直线的例子．

3．分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线，此说法对吗？

4．空间两条不重合的直线有几种位置关系？就公共点的个数分为哪几种情形？从是否共面来分，又分为哪几种情形？

5．两条直线互相垂直，它们一定相交吗？

6．垂直于同一直线的两条直线，有几种位置关系？

7．有三条直线，每两条都成异面直线，画出这三条直线．

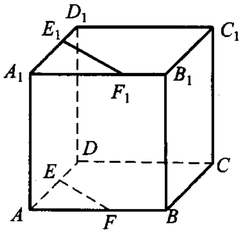
8．在图 5－12 中，(1) 求证：$AC \perp B_1D_1$；(2) 求 BC_1 和 B_1D_1 所成的角．

9．在图 5－12 中，在 A_1C_1 面上有一点 P，怎样过点 P 画一条直线和棱 CD 平行？

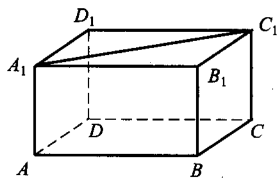
10．如图，在正方体中，$AE = A_1E_1$，$AF = A_1F_1$，求证：$EF /\!/ E_1F_1$．

11．求证：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线．

12. 如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=BC=4\ \text{cm}$，$AA_1=2\ \text{cm}$ 求：(1) BC 和 A_1C_1 所成的角是多少度？(2) AA_1 和 BC_1 所成的角的正切值是多少？(3) A_1B_1 和 DD_1、B_1C_1 和 CD 的距离各是多少？



第 10 题图



第 12 题图

第三节　直线与平面的位置关系

一、直线和平面的位置关系

我们知道，如果一条直线和一个平面有两个公共点，那么这条直线就在这个平面内．此外，直线和平面还有以下两种情形．

定义 1　如果一条直线和一个平面没有公共点，那么叫做这条直线和这个平面平行．

定义 2　如果一条直线和一个平面只有一个公共点，那么叫做这条直线和这个平面相交．

因此，一条直线和一个平面的位置关系有三种：

(1) 直线在平面内——有无数个公共点；

(2) 直线和平面相交——只有一个公共点；

(3) 直线和平面平行——没有公共点．

我们把直线和平面相交或平行的情形都叫做直线在平面外．

画直线在平面内时，要把直线画在表示平面的平行四边形内；画直线和平面相交时，要把直线延伸到表示平面的平行四边形的外面；画直线和平面平行时，要把直线画在表示平面的平行四边形外面，并且和平行四边形的一条边平行．如图 5－13 (a)、(b)、(c) 所示．

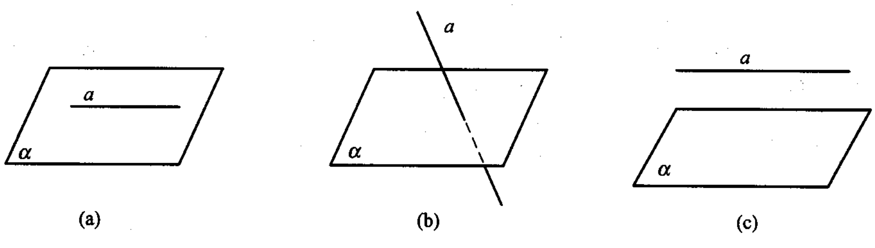


图 5－13

直线 a 与平面 α 平行，记作 $a // \alpha$．直线 a 与平面 α 相交于 A，记作 $a \cap \alpha = A$．

二、直线和平面平行

1. 直线和平面平行的判定定理

定理 1　如果平面外的一条直线平行于这个平面内的一条直线，那么这条直线就和这个平面平行.

如图 5－14 所示，已知：直线 a 在平面 α 外，直线 $b\subset\alpha$，并且 $a/\!/b$. 求证：$a/\!/\alpha$.

证明　用反证法证明. 因为直线 a 在平面 α 外，所以只有平行和相交两种情形. 假设 $a\cap\alpha=M$，因为

$$\left.\begin{array}{r}a/\!/b\Rightarrow \text{过 } a \text{ 和 } b \text{ 可以作一个平面 } \beta\\ b\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\cap\beta=b,$$

又

$$\left.\begin{array}{r}M\in a\Rightarrow M\in\beta\\ M\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow M\in\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a\cap b=M,$$

这与条件 $a/\!/b$ 相矛盾. 即 a 与 α 不相交，因此 $a/\!/\alpha$.

2. 直线和平面平行的性质定理

定理 2　如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

如图 5－15 所示，已知：$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b$. 求证：$a/\!/b$.

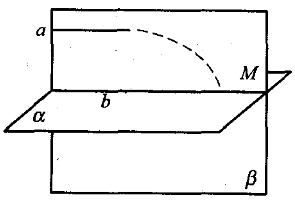


图 5－14

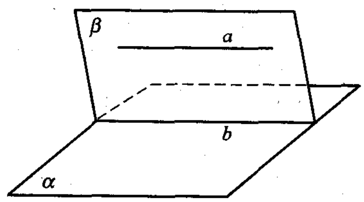


图 5－15

证明

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}a/\!/\alpha\\ b\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow a\cap b=\phi\\ a\subset\beta\\ b\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a/\!/b.$$

例 1　证明空间四边形相邻两边中点的连线平行于经过另外两边的平面.

如图 5－16 所示，已知：空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点. 求证：$EF/\!/$平面 BCD.

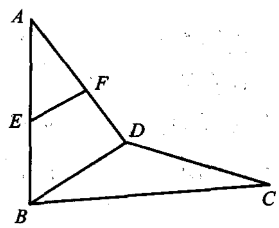


图 5－16

证明　连接 BD，有

$$\left.\begin{array}{r}AE=BE\\ AF=DF\end{array}\right\}\Rightarrow EF/\!/BD,\ \text{又 } BD\subset\text{平面 } BCD\Rightarrow EF/\!/\text{平面 } BCD.$$

例 2　有一块木料，如图 5－17 所示，已知棱 BC 平行于平面 A_1C_1，要经过木料表面 A_1C_1 上一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线？

解

$$\left.\begin{array}{l}\text{直线 } BC/\!/\text{平面 } A_1C_1\\ BC\subset\text{平面 } BC_1\\ \text{平面 } A_1C_1\cap\text{平面 } BC_1=B_1C_1\end{array}\right\}\Rightarrow BC/\!/B_1C_1,\text{又在平面 } A_1C_1 \text{ 内，过点 } P \text{ 作}$$

$EF \parallel B_1C_1$，则 $EF \parallel BC \Rightarrow BC, EF$ 可以确定一个平面. 因此，过点 P 作 $EF \parallel B_1C_1$，交 A_1B_1、C_1D_1 分别为 E、F，连接 BE、CF，就是所要画的线.

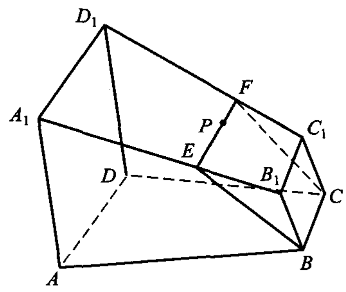


图 5－17

三、直线和平面垂直

1. 直线和平面垂直的定义

定义 3 如果一条直线和一个平面相交，并且和这个平面内的任何一条直线都垂直，那么叫做这条直线和这个平面互相垂直. 这条直线叫做这个平面的垂线，这个平面叫做这条直线的垂面. 垂线和垂面的交点叫做垂线足或垂足.

过一点有且只有一条直线和一个平面垂直；过一点有且只有一个平面和一条直线垂直. 画直线与平面垂直时，要把直线画成和表示平面的平行四边形的一条边垂直. 如图 5－18 所示，直线 a 垂直于平面 α，记作 $a \perp \alpha$.

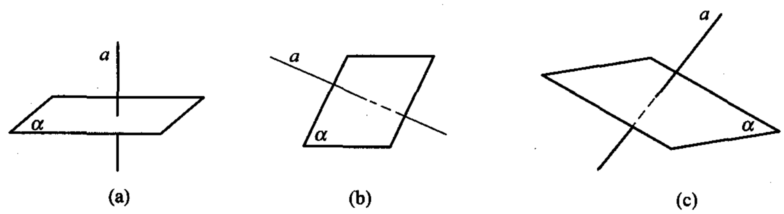


图 5－18

2. 直线和平面垂直的判定定理

定理 3 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

如图 5－19 所示，已知：直线 l 和平面 α 相交于 B 点，m、n 是平面 α 内的两条相交直线，并且 $m \cap n = B$，$l \perp m$，$l \perp n$. 求证：$l \perp \alpha$.

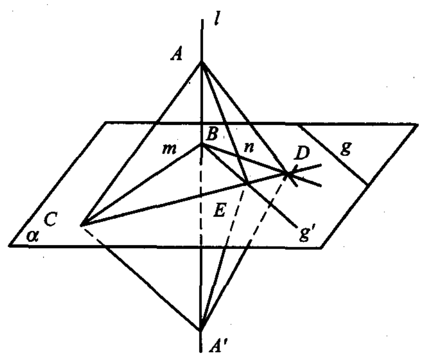


图 5－19

证明 设 g 是平面 α 内任意一条直线，过点 B 作 $g' \parallel g$，在平面 α 内作一直线分别与 m、n、g' 相交于 C、D、E 三点. 在 l 上取 A、A' 两点，并且使 $AB = A'B$. 那么，m、n 都是 AA' 的垂直平分线. 因此

$$AC = A'C, AD = A'D \Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle A'CD \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACE = \angle A'CE \\ CE = CE\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ACE \cong \triangle A'CE$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}AE = A'E \\ AB = A'B\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}l \perp g' \\ g' \parallel g\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\Rightarrow l \perp g \\ g \text{ 是平面 } \alpha \text{ 内的任意一条直线}\end{array}\right\} \Rightarrow l \perp \alpha.$$

如果 m、n 的交点不是 B 点，则可过 B 点分别作 m'、n'，使 $m' \parallel m$，$n' \parallel n$，同样可证 $l \perp \alpha$.