华章数学译丛

35

Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms

A Primer

小波与小波变换导论

C. Sidney Burrus
(美) Ramesh A. Gopinath 等著
Haitao Guo

程正兴 译

3

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

35

Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms

A Primer

小波与小波变换导论

C. Sidney Burrus
（美）Ramesh A. Gopinath 等著
Haitao Guo

程正兴　译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是一本介绍小波与小波变换的基础教材，书中以傅里叶方法为基础，讨论了尺度函数和小波构造的多种方法，综合了数学和信号处理文献中与小波变换相关的内容．另外，本书还包含对基本多分辨小波系统的新的推广，例如 *M* 带小波系统、双正交小波系统、小波包、提升算法、多小波、平移不变冗余小波变换等．在应用方面，本书简述了基于小波的信号处理、离散小波变换的非线性滤波或去噪、小波信号和图像压缩等．

本书可作为高年级本科生和研究生的教材，适用于信号处理、无线电通信、计算机科学和应用数学等专业，也适于从事相关领域的研究人员和从业人员阅读．

本书版权登记号：图字：01-2006-3146

图书在版编目（CIP）数据

小波与小波变换导论/（美）伯罗斯（Burrus，C. S.）等著；程正兴译．－北京：机械工业出版社，2007.10

（华章数学译丛）

书名原文：Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer

ISBN 978-7-111-21544-8

Ⅰ．小…　Ⅱ．①伯…　②程…　Ⅲ．小波分析－教材　Ⅳ．O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 075003 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：王春华

北京京北制版厂印刷·新华书店北京发行所发行

2008 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm　·15.75 印张

定价：32.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换

本社购书热线：（010）68326294

译 者 序

小波分析是20世纪80年代中期基于Y. Meyer、S. Mallat及I. Daubechies等人的奠基性工作而迅速发展起来的一门新兴学科，它是调和分析发展的划时代产物．小波分析在理论上的发展和完善与实际应用紧密地联系在一起．虽然小波分析已经经过了20多年的发展，但它的理论研究，尤其是与应用紧密结合的相关理论与算法的研究远没有完善，有许多基本的问题还没有解决．在小波的应用上，虽然并不缺少好的典范，但应用的普及以及对问题的深入解决，是随着小波分析理论与算法的进一步发展而发展起来的，而许多实际问题的解决过程，本身就推动了小波分析理论的发展．

与傅里叶变换的频域分析方法不同，小波分析是一种时-频分析方法，它的时频窗在高频时自动变窄变高，在低频时又自动变宽变低，具有自动“聚焦”功能，所以又把小波称为“数学显微镜”．进而，小波分析的多分辨分析方法是一种分离信号分量的好方法，它比大多数其他分析、处理和压缩信号的方法更为优越．

本书采用与傅里叶变换和傅里叶级数对比的方法引入连续小波变换和小波级数；阐述了尺度函数和小波构造的多种方法；讨论了小波变换计算与数字信号处理的滤波器组理论之间的联系和等价性；对于小波的推广的多种形式，例如，M带小波系统、小波包、双正交小波系统、提升算法、多小波、平移不变冗余小波变换、离散多分辨分析和离散时间小波变换等，进行了比较简单但有效的叙述．在应用方面，本书简述了基于小波的信号处理；使用离散小波变换逼近快速傅里叶变换；离散小波变换的非线性滤波或去噪；小波统计估计；小波信号和图像压缩；小波在偏微分方程数值解、地震和地球物理信号处理、医学和生物信号、图像处理、通信、分形等方面的应用．本书注重叙述的连贯性，不拘泥于理论的证明，而且对于需要进一步了解相关内容的读者，提供了相应的参考文献．

本书采用工程师、科学工作者和应用数学研究人员都容易接受的一种方式来阐述小波分析，作者既把小波分析作为一种理论途径，又把它作为一种有效的解决问题的实用方法．本书适用于有一定技术背景、想了解和学习小波分析的理工科研究生和科学技术人员，尤其适合具备一些数字信号处理知识的读者阅读．对于应用数学、计算数学领域从事小波分析的研究者和使用者来说，了解和使用本书中叙述的方法对于小波分析的具体应用也是很有帮助的．

由于译者水平所限，书中不妥与误译之处在所难免，希望广大读者和同行批评指正．

程正兴
于西安交通大学理学院
2007年7月

前　言

本书讨论小波隐含的思想与小波的性质，并说明如何将小波作为信号处理、数值分析和数学模型的分析工具．书中采用工程师、科学工作者和应用数学研究人员都容易接受的一种阐述方式，既把小波分析作为一种理论途径，又把它作为一种有效的解决问题的实用方法．虽然这门学科的起源可以上溯到较早的年代，但重新引起人们的兴趣并且有所进展仅有不多年的光景．

小波方面早期的研究工作是由 Morlet、Grossmann、Meyer、Mallat 等人在 20 世纪 80 年代完成的，但是 1988 年 Ingrid Daubechies[Dau88a]的论文才在信号处理、统计学和数值分析等多个应用数学领域引起更多人的注意．许多早期工作是在法国[CGT89，Mey92a]和美国[Dau88a，RBC*92，Dau92，RV91]开展的．与许多新兴学科一样，开创工作同特定的应用或传统的理论框架有着紧密的联系．本书中，我们将考察从应用中抽象和从研究中发展出来的理论，并且讨论这种理论同其他相关思想的关系．我们自己在信号处理方面的兴趣和背景无疑会影响本书的阐述方式．

小波研究的最新目标是创建一族基函数(或通常的展开函数)和变换，用以对某个函数或信号给出丰富的、有效的和有用的描述．如果将信号表示成时间的函数，小波则在时间和频率(或尺度)两方面提供有效的局部化．另外一个中心思想是多分辨，其中信号的分解借助于细节的分辨．

对于傅里叶级数，选择正弦函数作为基函数，然后考察得到的展开式的性质．对于小波分析，我们先提出欲求的性质，然后推导出基函数．小波的基函数所具备的一个重要性质就是能提供多分辨分析．出于多种原因，通常要求基函数是正交的．在这些目标之下，你将会见到若干相关的技术，包括傅里叶变换、短时傅里叶变换、离散傅里叶变换、维格纳分布、滤波器组、子带编码，以及由此产生的其他信号展开式和信号处理方法．

对于数学研究人员、科学工作者和工程师而言，基于小波的分析是一种令人兴奋的问题求解的新工具．它天生就能与数字计算机配合，因为其基函数是由求和而不是求积分或求导数定义的．与大多数传统的展开系统不同，小波分析的基函数不是微分方程的解．在一些领域，它是多年来第一个真正意义上的新工具．事实上，使用小波和小波变换时，需要采用一种新观点和新方法来解释我们仍然在学习如何利用的表达形式．

新近 Donoho、Johnstone、Coifman 等人的工作，为小波分析为何有如此广泛的应用和如此强大的功能增添了理论依据，而且对仍在进行的工作进行了推广．他们证明了小波系统具有一些固有的普遍优势，而且对于一类广泛的问题而言是接近最优的[Don93b]．他们还证明了自适应工具可以用于创建特殊信号和信号类的特定小波系统．

多分辨分解看起来是一种分离信号分量的方法，它比大多数其他分析、处理和压缩信号的方法更为优越．由于离散小波变换可以在不同的无关尺度下分解信号，而且非常灵活，所以 Burke 把小波称为“数学显微镜”[Bur94，Hub96]．正是因为这种强有力的和灵活的分解，在小波变换领域内，对信号的线性和非线性处理为信号的检测、滤波和压缩提供了各种新方法[Don93b，Don95，Don93a，Sai94b，WTWB97，Guo97]．同时，这还可以用来作为鲁棒数值算法的基础．

读者也会看到这与数字信号处理的滤波器组理论之间有一种有趣的联系和等价性[Vai92，AH92]．其实，用滤波器组得到的一些结果与用离散时间小波得到的结果是相同的，并且这在信号处理领域已由 Vetterli、Vaidyanathan、Smith 和 Barnwell 等人研究得到．滤波器组以及计算小波变换的大多数算法，是更为一般的多级系统和时变系统的组成部分．

对于那些具有一定技术背景但对小波知之甚少或者全然不知的人而言，本书可作为一本自学辅导教材或入门书．假定读者具备傅里叶级数和傅里叶变换、线性代数和矩阵论的知识，还假定读者达到工学、理学或应用数学学士的同等水平．掌握一些信号处理知识对阅读本书是有帮助的，但并非是必需的．我们借助于一维信号处理[RV91]——作为时间的实函数或复函数模型，来讨论这些思想，但这样的思想以及方法在二维、三维甚至四维的图像表示和图像处理中也证明是有效的[SA92，Mal89a]．向量空间已证明是研究小波理论与应用的天然工具．具有这个领域的一些背景知识是有益的，不过也可以在需要的时候补习．使用一些小波软件系统运行实例和进行实验对于小波的学习是大有裨益的．书后附有 MATLAB 程序，这些程序在我们的网站(前言后面提及)上也能找到．其他几种软件系统在第 10 章介绍．

介绍小波理论有几种不同的方式．我们选用由连续时间信号或函数表示为级数展开式出发，这同傅里叶分析中所用的傅里叶级数类似．由这种级数表示，我们可以转移到离散变量(例如，一个信号的抽样)的函数的展开和滤波器组理论，以便有效地计算与解释展开系数．这种情况类似于离散傅里叶变换(DFT)及其有效实现的快速傅里叶变换(FFT)．我们还可以由级数展开得到称为连续小波变换的一种积分变换，这类似于傅里叶变换或傅里叶积分．我们认为，从级数展开出发可以充分领悟小波理论，而且很容易看清小波分析与傅里叶分析之间的异同．

本书分为若干相对自成一体的章节．前面几章对离散小波变换(DWT)进行了非常全面的讨论，这种变换把信号展开为小波和尺度函数的级数．后面几章简述离散小波变换的推广和应用．各章均引用了许多其他著作，可以作为一种有注解的参考文献．因为本书旨在作为小波分析的导论，而在这个领域已经积累了大量的文献，所以我们在书后附上一个很长的文献目录．然而，这个目录很快就会变成不完全的，因为有大量不断发表的论文．无论如何，对于作为导论这一目标而言，提供一个文献指南是非常重要的．

近来美国科学院出版了一本书，书中由 Barbara Burke 撰写的一章[Bur94]对小波分析

原理及其发展的历史作了很好的概述. Burke 还写了此章的精彩扩充版本[Hub96]，这是任何对小波理论感兴趣的人应该阅读的. Daubechies 在[Dau96]中对早期研究工作的历史给出了简要的介绍.

本书提出的很多结果和关系，是以定理和证明形式或以推导的形式阐述的. 我们把重点放在定理陈述的正确性方面，而对定理的证明往往只给出推导的轮廓，其目的在于了解实质而非形式证明. 事实上，为了不致使阐述凌乱，我们把很多推导放在附录中. 希望这种方式有助于读者深入理解这个非常有趣但有时又有些模糊的新的数字信号处理工具.

我们在书中采用的记号兼有信号处理文献和数学文献所用的记号，希望这样做能使思想与结果更易于理解，但这会丧失一些一致性和清晰性.

作者感谢 AFOSR、ARPA、NSF、Nortel 公司、德州仪器公司和 Aware 公司所提供的支持. 我们特别感谢 H. L. Resnikoff，最初是他把我们领入小波领域，而他又准确地预见到我们的能力. 我们还感谢 W. M. Lawton、小 R. O. Wells、R. G. Baraniuk、J. E. Odegard、I. W. Selesnick、M. Lang、J. Tian 和莱斯大学计算数学实验室的各位成员，本书中介绍的很多思想与结果是他们提出的. 第一署名作者感谢家人 Maxfield 和 Oshman 的无私支持. 莱斯大学 EE - 531 和 EE - 696 班的学生们提供了极有价值的反馈，他们是：Bruce Francis、Strela Vasily、Hans Schüssler、Petter Steffen、Gary Sitton、Jim Lewis、Yves Angel、Curt Michel、J. H. Husoy、Kjersti Engan、Ken Castleman、Jeff Trinkle、Katherine Jones，与此有关的还有莱斯大学和其他地方的同事.

我们还要特别感谢 Tom Robbins 及其 Prentice Hall 的同事们的支持与帮助，他们的评审意见使本书的内容大为充实.

我们乐于知道任何读者发现的本书中的任何错误或使人误解的论述，真诚欢迎对本书提出任何改进意见. 各种建议和评论可用电子邮件发至 csb@ rice. edu. 涉及本书的软件、文章、勘误以及有关莱斯大学小波研究工作的其他信息，可以从网站 http://www-dsp. rice. edu/和链接到正在展开小波研究的其他网站上找到.

C. Sidney Burrus，得克萨斯，Houston

Ramesh A. Gopinath，纽约，Yorktown Heights

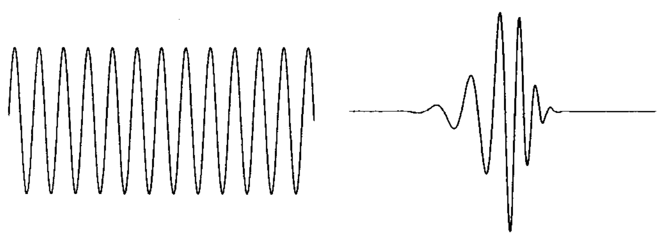
Haitao Guo，加利福尼亚，Sunnyvale

目　录

第1章 小波导引

本章将概述本书中涉及的主题，目的是为了向了解和有能力使用小波与小波变换的读者，简要介绍其概念、目标以及性质的概要．细节会在本书后面给出．

波(wave)通常定义为时间或空间的一个振荡函数，例如一条正弦曲线．傅里叶(Fourier)分析是波的分析．它借助于正弦曲线(或等价地，复指数)展开信号或函数，已经证明了在数学、科学和工程中，特别对于周期的、时不变的或平稳现象，傅里叶分析是非常有用的．小波(wavelet)是“小的波”，小波具有在时间上集中能量的能力，是分析瞬变的、非平稳的或时变现象的一个工具．小波仍然具有振荡波的特征，而且还具有同时提供时间和频率分析的能力，并具有灵活的数学基础．图 1-1 描述的波(正弦曲线)在 $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ 上等振幅振荡，所以具有无限能量，而小波具有围绕一点集结的有限能量．



a) 正弦波　　b) Daubechies'小波ψ_{D20}

图 1-1　波和小波

我们将取小波，并且在信号或函数的级数展开中使用它，这与使用波或正弦曲线表示信号或函数的傅里叶级数的方法相同．信号是一个连续变量的函数，这个变量通常表示时间或距离．由这个级数展开，我们将提出类似于离散傅里叶变换的一个离散时间改型，在离散傅里叶变换中，信号直接用一串数表示，而这一串数可以是信号的抽样、另一串数的 1
抽样或信号与某个展开集的内积．最后，我们将简要地描述连续小波变换，其中信号和变换都是连续变量的函数．这类似于傅里叶变换．

1.1　小波和小波展开系统

在详细地探究小波及其性质之前，先给出它的一般特征，以及要用它做什么[Swe96b].

1.1.1　什么是小波展开或小波变换

通常可以比较好地分析、描述或者处理一个信号或函数$f(t)$，如果它能表示为一个线

性分解

$$f(t) = \sum_{\ell} a_{\ell}\psi_{\ell}(t), \tag{1.1}$$

其中 ℓ 是有限和或无限和的整数指标，a_{ℓ} 是实值展开系数，而 $\psi_{\ell}(t)$ 是 t 的实值函数的集合，并称 $\psi_{\ell}(t)$ 为展开集(合). 如果展开(1.1)是唯一的，这个集就称为所能展开的函数类的一组基(basis). 如果基是正交的，即

$$\langle \psi_k(t), \psi_{\ell}(t) \rangle = \int \psi_k(t)\psi_{\ell}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad k \neq \ell, \tag{1.2}$$

那么，系数可以用内积(inner product)计算：

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t)\psi_k(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

我们可以看到，把(1.1)代入(1.3)并使用(1.2)，就给出了单个系数 a_k. 如果基的集合是非正交的，那么存在一个对偶基集合 $\tilde{\psi}_k(t)$，使得应用具有对偶基的(1.3)，给出所需的系数. 这将在第2章中叙述.

对于傅里叶级数，正交基函数 $\psi_k(t)$ 是带有频率 $k\omega_0$ 的 $\sin(k\omega_0 t)$ 和 $\cos(k\omega_0 t)$. 对于泰勒级数，非正交基函数是简单的单项式 t^k，并且对于许多其他展开，它们是各种各样的多项式. 有些展开使用样条函数和分形.

对于小波展开(wavelet expansion)，构造了一个两参数系统使得(1.1)变成

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t), \tag{1.4}$$

其中 j 与 k 是整数指标，并且 $\psi_{j,k}(t)$ 是通常形成正交基的小波展开函数.

展开系数的集 $a_{j,k}$ 称为 $f(t)$ 的离散小波变换(discrete wavelet transform，DWT)，并且(1.4)是逆变换.

1.1.2 什么是小波系统

小波展开集不是唯一的. 存在许多不同的可以有效使用的小波系统(wavelet system)，
2 但是，所有的系统似乎都必须具有下述三条一般的特征[Swe96b].

1. 小波系统是构造或表示一个信号或函数的建筑块(building block)的集合. 它是一维(或较高维)信号的某个类的一个二维展开集合(一般是基). 换句话说，如果小波集由 $\psi_{j,k}(t)$ (j，$k = 1, 2, \cdots, n$) 给出，则对于系数 $a_{j,k}$ 的某个集合，线性展开就是 $f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t)$.

2. 小波展开是信号的时间-频率(时-频)局部化(localization). 这是指信号的大部分能量将由少数展开系数 $a_{j,k}$ 提供.

3. 由信号可以高效率地计算系数. 结果是许多小波变换(展开系数的集)能够用 $O(N)$ 次算术运算计算. 这是指浮点乘法和加法的次数随着信号长度的增加而线性增加. 更一般的小波变换需要 $O(N\log(N))$ 次运算，与快速傅里叶变换(fast Fourier transform，FFT)相同[BP85].

实际上，所有小波系统都具有这些很一般的特征．这里，傅里叶级数将一维连续变量的函数映射到一维系数序列，小波展开将一维函数映射到二维系数数组．我们将看到，这种二维表示允许在时间和频率两方面局部化信号．一个傅里叶级数展开在频率上局部化，如果一个信号的傅里叶级数展开只有一个大系数，那么这个信号本质上是由系数标号确定的频率的一条正弦曲线．信号的最简单时域表示本身给出了时间局部化．如果信号是一个单脉冲，则脉冲的局部化是时间局部化．一个小波表示将同时给出在时间和频率两方面的局部化．事实上，一个小波表示像一个音乐乐谱，其中音符的位置确定了音调和它们的频率是多少．

1.1.3 小波系统更具体的特征

对小波展开，有三个添加的更特殊的特征[Swe96b，Dau92]．

1. 所有的第一代小波(first-generation wavelet)系统是由一个单尺度函数或小波通过简单的尺度化(scaling)和平移(translation)生成的．二维参数化是由函数(有时称为生产小波或母小波)$\psi(t)$通过

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \quad j,k \in \mathbf{Z} \tag{1.5}$$

实现的，其中 $\mathbf{Z}$ 是所有整数的集合，并且因子 $2^{j/2}$ 保持一个不依赖于尺度 j 的常数范数．这个时间或空间的参数化用 k，而频率或尺度(精确地说是尺度的对数)的参数化用 j，结果是特别有效．

2. 几乎所有有用的小波系统都满足*多分辨*(multiresolution)条件．这是指，如果一个信号的集合能用 $\varphi(t-k)$ 的加权和表示，那么一个(包含原来集合的)更大集合可以用 $\varphi(2t-k)$ 的加权和表示．换句话说，如果基本的展开信号是宽度的一半，且平移步长为宽度的一半，那么它们将精确地表示一个较大的信号类，或者给出任一信号比较好的逼近． 3

3. 低分辨率系数可以由高分辨率系数用一个称为*滤波器组*(filter bank)的树结构算法计算．这允许展开系数(也称为离散小波变换)的一个很有效的计算，并且把小波变换与数字信号处理的比较古老的领域联系起来．

平移和伸缩运算似乎对于许多实际的信号和信号生成过程是基本的，并且它们的使用是小波为高效率展开函数的原因之一．图 1-2 是(1.5)中描述的一个母小波的平移和伸缩的图示．当指标 k 改变时，小波的位置沿横轴移动，这将明确地表示展开在时间或者空间上事件的位置．当指标 j 改变时，小波的形状在尺度上改变了，这将给出表示细节或分辨率．注意到，当尺度变得比较细(j 比较大)时，时间的步长变得比较小，比较窄的小波和比较小的步长都可以表示较详细的细节或较高的分辨率(清晰度)．为清晰起见，在平移中只表示了每四分之一项($k=1$，5，9，13，…)，按其他方式表示图将是混乱的．这里没有描述但却重要的是基本母小波的形状还可以改变．这是在小波系统设计时做的，并且可以用一个集合很好地表示一类信号．

对于傅里叶级数与傅里叶变换，以及大多数信号展开系统，挑选展开(基)函数，然

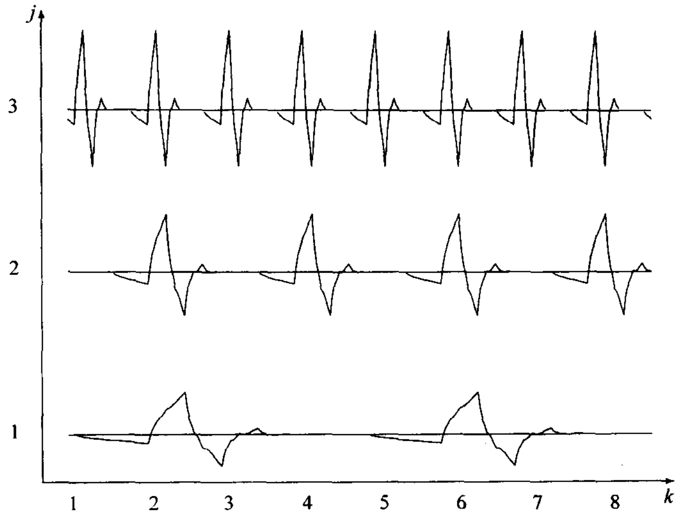


图 1-2 小波 ψ_{D4} 的平移(每四分之一 k)

4 后导出和分析得到的变换的性质．对于小波系统，这些性质或特征在数学上是需要的，然后推导出基函数．因为这些约束没有使用所有的自由度，对于一种特定应用，可以要求小波系统有另外的性质．一旦决定用傅里叶级数，正弦曲线基函数就是完全集合．对于小波，这不成立，有许多不同的小波都满足上述性质．事实上，了解和设计小波是本书的一个重要课题．

小波分析很适合瞬变信号．傅里叶分析适合周期信号或者统计特征依时间不变的信号．小波的局部化性质允许一个瞬变事件的小波展开使用少数系数．这个结果在应用中很有用．

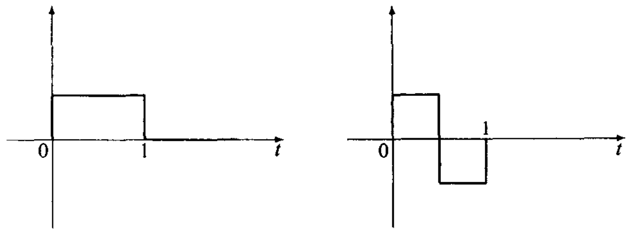
1.1.4 哈尔尺度函数和小波

多分辨阐述需要两个紧密联系的基函数．除了已经讨论(但还没有精确定义)的小波 $\psi(t)$ 外，还需要另一个称为*尺度函数*(scaling function)的基函数 $\varphi(t)$．需要这个函数的理由和关系的详细叙述将在下章中展开，而这里我们将仅在小波展开中使用它．

最简单的正交小波系统是由哈尔(Haar)尺度函数和小波生成的，如图 1-3 所示．使用这些尺度函数和小波的组合，可以将一大类信号表示为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(t-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k} \psi(2^j t - k). \tag{1.6}$$

哈尔[Haa10]在 1910 年证明了这一结果，而小波是他的工作的推广．哈尔系统和展开的一个例子在第 2 章末尾给出．



a) $\phi(t)$　　b) $\psi(t)$

图 1-3　哈尔尺度函数和小波

1.1.5　小波看起来像什么

所有傅里叶基函数看起来很像．高频正弦波看起来像低频正弦波的压缩．余弦波是正弦波平移 90°或 $\pi/2$ 弧度．要取大数目的傅里叶分量来表示一个不连续性或一个急剧的拐 5
角．作为对比，有许多不同的小波，并且一些小波本身就具有急剧的拐角．

为了领会小波的特殊性质，读者要认识到直到 20 世纪 80 年代末期才有最有用的一些基本小波．图 1-4 描述了四个不同的尺度函数，每个在 $0<t<6$ 区间之外是零，并且每个生成所有平方可积函数的一个正交小波基．

更多的尺度函数及其相应的小波在后面章节中描述，哈尔小波参见图 1-3，而其细节在第 2 章末尾展示．

1.1.6　小波分析为什么是有效的

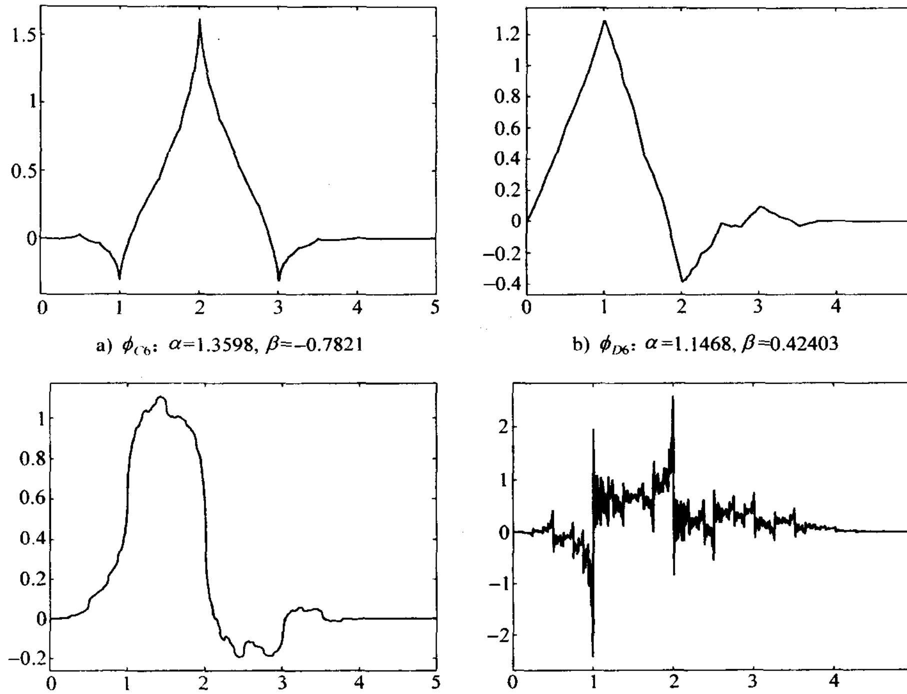
小波展开和小波变换已经证明在分析信号与现象的一个很宽的类上是很有效的，并且是高效的．这是为什么呢？什么样的性质给出了这种有效性？

1. 对于一大类信号，在(1.4)或(1.6)中的小波展开系数 $a_{j,k}$或 $d_{j,k}$的大小，随着 j 与 k 的增大，迅速地减小．这个性质称为*无约束基*(unconditional basis)，并且这也是在信号和图像压缩、去噪以及检测中小波有效的原因．Donoho[Don93b，DJKP95b]指出，对于一类范围宽广的信号的压缩、去噪和检测，小波是接近最优的．

2. 利用小波展开，可以对信号特征进行更精确的局部描述和分离．一个傅里叶系数代表一个分量，它持续所有时间，所以，瞬态事件一定用一个相位特征化，这允许在大的时间周期上相消或增强．一个小波展开系数代表一个分量，它本身是局部的并且是比较容易描述的．小波展开可以允许在时间与频率上交迭的信号分量的分离．

3. 小波是可调的和可修改的．因为不是只有一个小波，所以可以将它们设计成适合各种应用．它们对于可调的系统是理想的，这个系统本身可调整以适合信号．

4. 小波的产生和离散小波变换的计算很适合利用数字计算机来进行．稍后我们将看到，小波的定义方程没有使用微积分，没有求导或积分，只有乘法和加法——这是数字计算机的基本运算．



a) ϕ_{C6}: $\alpha=1.3598$, $\beta=-0.7821$　　b) ϕ_{D6}: $\alpha=1.1468$, $\beta=0.42403$

c) $\alpha=\frac{23}{60}\pi$, $\beta=-\frac{1}{12}\pi$　　d) $\alpha=\frac{3}{4}\pi$, $\beta=\frac{2}{15}\pi$

图 1-4　尺度函数的例子(α 和 β 的意义，见 5.8 节)

这里虽然没有清晰地描述细节，但是指出了理论和应用两方面重要的结果，并且解释了本书与其他书中涉及的主题.

1.2　离散小波变换

这个两变量的基函数的集合，在使用方法上类似于时-频分析的短时傅里叶变换、盖博(Gabor)变换或者维格纳(Wigner)分布[Coh89，Coh95，HB92]. 我们的目标是生成一个展开函数的集合，使(平方可积函数空间)$L^2(\mathbf{R})$的任一信号可以表示为级数

$$f(t) = \sum_{j,k} a_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \tag{1.7}$$

或者，使用(1.5)，表示为

$$f(t) = \sum_{j,k} a_{j,k} \psi_{j,k}(t), \tag{1.8}$$

其中二维系数 $a_{j,k}$的集合称为$f(t)$的离散小波变换(DWT). 如果 $\psi_{j,k}(t)$对于感兴趣的信号空间形成一组规范正交基㊀[Dau92]，那么一个计算 $a_{j,k}$的更具体的形式可以使用内积写为

㊀ 基和框架在第 4 章定义.