全国医药卫生高职高专规划教材
QUANGUO YIYAO WEISHENG GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI

YIYAO GAODENG SHUXUE

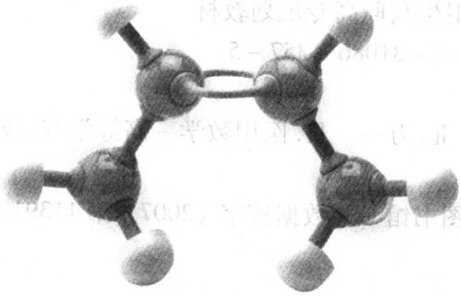
医药高等数学

主编　万志超

第四军医大学出版社

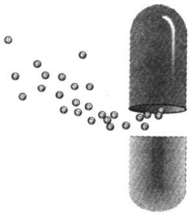
全国医药卫生高职高专规划教材

QUANGUO YIYAO WEISHENG GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI



医药高等数学

YIYAO GAODENG SHUXUE



主编　万志超

第四军医大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学/万志超主编. —西安:第四军医大学出版社,2007.8
全国医药卫生高职高专规划教材
ISBN 978-7-81086-357-5

Ⅰ.医… Ⅱ.万… Ⅲ.医用数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 113912 号

医药高等数学

主　　编　万志超
责任编辑　秦志峰　张小磊
出版发行　第四军医大学出版社
地　　址　西安市长乐西路 17 号(邮编:710032)
电　　话　029-84776765
传　　真　029-84776764
网　　址　http://press.fmmu.sn.cn
印　　刷　黄委会勘测规划设计研究院印刷厂
版　　次　2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　787×1 092　1/16
印　　张　18.625
字　　数　430 千字
书　　号　ISBN 978-7-81086-357-5/R·301
定　　价　26.00 元

编者名单

主　编　万志超

副主编　刘建波　刘俐颖

编　委　（以姓氏笔画为序）

万志超　漯河医学高等专科学校

王　悦　宁夏医学院高职学院

邓剑霞　永州职业技术学院

刘学佳　辽宁中医药大学职业技术学院

刘建波　泰山医学院

刘俐颖　平凉医学高等专科学校

李兆强　漯河医学高等专科学校

赵中河　南阳医学高等专科学校

蒋善丽　漯河医学高等专科学校

前　　言

根据国家教育部高职高专教学改革和教材建设的精神，我们编写了这本《医药高等数学》教材。编写中，我们依据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》精神，以“实用为先，够用为度”的原则，在保证思想性、科学性，加强启发性、适用性的前提下，注意阐明概念，掌握方法，结合专业实际，减少数理推证，注意学生基本运算能力和分析问题、解决问题以及自学能力的培养。编写内容注重与高职高专教学相结合，打破传统的编写体系，以三年制药学专业所学基础数学知识为主线，努力实现整体优化。根据课程内在联系，在一元和多元函数的微分部分按函数、极限、连续、导数（偏导数）、微分（偏微分、全微分）、导数（偏导数）应用的顺序，在一元和多元函数的积分部分按不定积分、定积分及其应用和二重积分及其应用的顺序，组成较为完整的理论体系，并根据专业需要，介绍了拉普拉斯变换。本书重点讨论微分法和积分法及其应用，努力在字数的控制、内容的取舍、框架的编排、概念的阐述、方法的介绍、理论的应用、例题的引用、习题的排选等诸多方面体现层次特点和专业特色，强调教学与实际相结合的特色。

各章由以下部分组成，本章主要内容、教学要点、思考题、知识卡片等部分，让学生的知识得到复习、巩固和提高。

参编人员分工如下：第一章由万志超编写；第二章由李兆强编写；第三章由刘俐颖编写；第四章由赵中河编写；第五章由王悦编写；第六章由刘学佳编写；第七章由邓剑霞编写；第八章由蒋善丽编写；第九章由刘建波编写。

本书的编写得到了以上几位作者所在学校有关领导和同行的大力支持和帮助，在此深表感谢。

编写中由于各种原因，加之编者水平有限，书中缺点、漏误在所难免敬请广大读者批评指正，以便进一步提高和完善。

编者

2007 年 4 月

目 录

第一章　函数与极限

第一节　函　数

一、函数的概念

1. 常量与变量　自然界的现象无一不在变化之中，我们在考察某个自然现象，社会经济现象或生产过程时，常常会遇到一些不同的量，如长度、面积、体积、时间、速度、温度等. 我们遇到的量一般可以分为两种，一种是在过程进行中一直保持不变，这种量称为常量(constant quantity)；另一种却在过程中不断变化着，这种量称为变量(variable). 例如，一个物体做匀速直线运动，则速度的大小是常量，而时间与位移的大小都是变量. 又如，一块金属圆板，由于热胀冷缩，在受热的过程中它的半径与面积在不断变大，冷却时又不断变小. 因此，这圆板的半径与面积都是变量. 但在整个过程中，面积与半径的平方之比，即圆周率 π 始终不变，是一个常量. 通常用字母 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 等表示常量，用字母 x,y,z,t,u,v 等表示变量.

2. 函数的定义

定义 1　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，D 为一个给定的数集，如果对每一个 $x\in D$，按照一定的法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值 x 与之对应，就称 y 为 x 的函数(function)，记为 $y=f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域(domain of definition)，x 叫做自变量(independent variable)，y 叫做因变量(dependent variable). 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，所依法则 f 的对应值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值. 所有函数值组成的集合 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域(range of function).

关于函数定义的几点说明：

(1)我们这里所讲的函数是指单值函数，也就是说，对于每一个 x 值只能对应变量 y 的一个值.

(2)符号"f"表示自变量 x 与函数 y 的某种对应关系. 例如 $y=f(x)=5x^2+3x-1$，它

的对应关系“f”是自变量的平方乘以5加上自变量的3倍减去1，我们不妨简化为 $y=f(\quad)=5(\quad)^2+3(\quad)-1$. 如 $x=3$ 时，对应的函数值是 $f(3)=5\times3^2+3\times3-1$.

同样当 $x=a$ 时，对应的函数值是 $f(a)=5a^2+3a-1$.

表示函数对应法则的符号也常常用“g”、“h”等表示，这时函数就记作 $y=g(x)$、$y=h(x)$等.

(1)确定函数的两个要素——定义域和对应法则：函数概念反映着自变量和因变量之间的依赖关系. 它涉及到定义域、对应法则和值域. 很明显，只要定义域和对应法则确定了，值域也就随之确定. 因此，定义域和对应法则是确定函数的两个要素，只要两个函数的定义域和对应法则都相同，那么，这两个函数就相同；如果定义域或对应法则有一个不相同，那么这两个函数就不相同.

例如　函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$，因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

(2)函数定义域的求法：对于由实际问题得到的函数，其定义域应该由问题的具体条件来确定. 如函数 $S=\pi r^2$ 中，自变量 r 是圆的半径，故此函数的定义域就是 $(0,+\infty)$.

若函数由公式给出时，不考虑函数的实际意义，这时函数的定义域就是使式子有意义的自变量的一切实数值.

例1　求下列函数的定义域：

(1)$f(x)=\sqrt{x-2}$；　(2)$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$；　(3)$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+3)}$.

解　(1)$f(x)=\sqrt{x-2}$ 的定义域 $x-2\geqslant0$ 即 $[2,+\infty)$.

(2)$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域 $x-1\neq0$ 即 $\{x|x\neq1\}$.

(3)$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+3)}$ 的定义域 $\ln(x+3)\neq0$ 且 $x+3>0$.

即 $\{x|x>-3$ 且 $x\neq-2\}$.

例2　求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解　应使

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant1\\ 25-x^2>0\end{cases}\quad 即\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant6\\ -5<x<5\end{cases}\qquad 也就是\ -4\leqslant x<5$$

所以此函数的定义域为 $D=[-4,5)$.

注意：

(1)约定函数的定义域就是自变量所能取的、使算式有意义的一切实数值的全体.

(2)若对每一个 $x\in D$，只有唯一的 y 与之对应，就称函数 $y=f(x)$ 为单值函数；若有不止一个 y 与之对应，就称函数 $y=f(x)$ 为多值函数. 如：$x^2+y^2=1$，$x^2-y^2=1$ 等. 以后若不特别声明，只讨论单值函数.

3. **函数的表示法**　函数的表示法广泛地应用于生产、生活、科研等各个领域. 在医疗卫生工作和医学科学研究方面的应用也很广泛，如分析发病规律，解释致病原因，研究药物疗效以及防治疾病措施等.

根据函数的定义，函数的表示法就是用来确定函数的两个变量间函数关系的方法. 常用的表示函数的方法有解析法、列表法和图象法.

(1)解析法(或称公式法)：就是把两个变量间的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式.

例3　某种细菌的繁殖方式属于简单的细胞分裂，即经过一个繁殖周期 T 后由一个变成两个，两个变成四个，…. 如果细菌生长环境是理想的，且开始时有 n 个细菌，经过一段时间 t 后，写出细菌个数 N 与时间 t 的关系式.

解　由题意可知，N 与 t 的关系式表示为

$$N=2^{\frac{t}{T}}n$$

用解析式表示函数关系的优点是：函数关系清楚，容易根据自变量的值求出其对应的函数值，便于用解析式来研究函数的性质.

(2)列表法：就是用表格来表示两个变量之间函数关系的方法.

例如，在生化检验工作中，检验员用赖氏法作了丙氨酸氨基转移酶测定的标准工作曲线，得到光密度读数和丙氨酸氨基转移酶单位之间的关系数据列成表 1－1：

表 1－1

光密度读数(od)	0.09	0.178	0.26	0.34	0.41
丙氨酸氨基转移酶单位(U)	28	57	97	150	200

根据表 1－1，要测定丙氨酸氨基转移酶，只要测出光密度读数，从表中查到对应的丙氨酸氨基转移酶单位，便能得到化验结果. 利用查表方法较方便，能简化实验步骤，节约时间.

用列表法表示函数关系的优点是：不必通过计算就能知道当自变量取某些值时函数的对应值.

(3)图象法：就是用函数图象表示两个变量之间函数关系的方法.

例如　图 1－1 中的两条曲线分别表示静脉注射、肌肉注射青霉素 G 钠盐 10 万 U 时的血清浓度变化情况，根据图象分析，可得到下列结论：

①静脉注射血液后，青霉素 G 钠盐含量迅速提高，在$\frac{1}{4}$小时血清浓度达最大值，但随之很快下降，3 h 后就很难测到.

②肌肉注射青霉素 G 钠盐，血清浓度半小时左右可达最大值(比静脉注射慢)，药物在血液中存留的时间比静脉注射要长些，但数小时后也测不到了.

因此，临床上常用静脉注射法获得血液中持久而较高的药物浓度来达到较快的治疗效果.

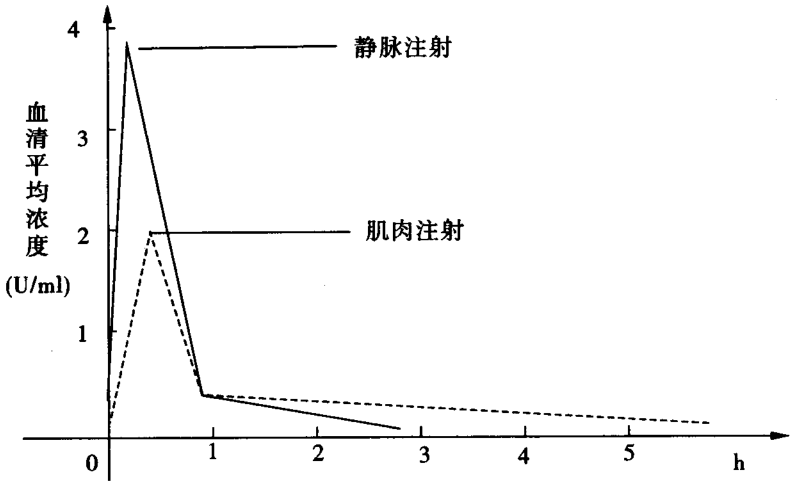


图 1－1

用图象法表示函数关系的优点是：能直观形象地表示出函数的变化情况.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时应注意结合使用.

二、函数的几种特性

1. **有界性** 设函数$f(x)$在数集 D 上有定义，若存在常数 k_1（或 k_2），使得对一切$x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant k_1（或 f(x)\geqslant k_2），$$

则称$f(x)$在 D 上有上界（或有下界）. 若存在正数 M，使对一切 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称$f(x)$在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称$f(x)$在 D 上无界，即对任给的正数 M，总存在 $x_1\in D$，使得 $|f(x_1)|>M$.

函数的有界性与集 D 有关. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上有界，因为存在 $M=1$，使对一切 $x\in[1,+\infty)$有$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 但它在$(0,1)$内却是无界的，因为对任给的正数 $M>1$，总存在 $x_1=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，使$|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$.

一个函数如果在其定义域上有界，就称它为有界函数. 有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与$y=-M$之间. 例如，$y=\sin x$ 是有界函数，因为在它的定义域$(-\infty,+\infty)$内，$|\sin x|\leqslant 1$. 又从图 1－2 不难看出，函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内无界. 函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内仅有下界. 因此说它们都是无界函数.

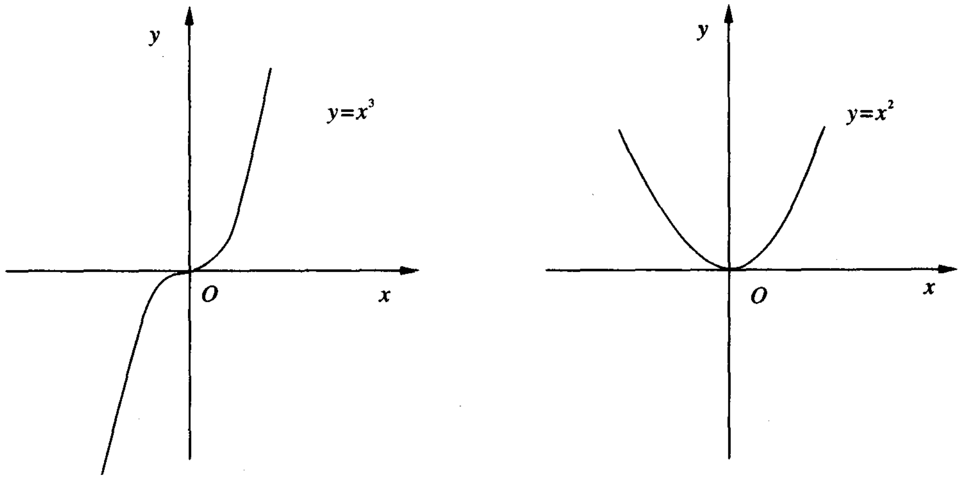


图 1－2

2. **单调性** 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对 D 中任意两个实数 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，总有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad [\text{或} f(x_1) \geqslant f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在集 D 上单调增加(或单调减少)简称单增(或单减). 若当 $x_1 < x_2$ 时，总有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad [\text{或} f(x_1) > f(x_2)],$$

则称 $f(x)$ 在集 D 上严格单增(或严格单减).

单增和单减的函数统称为单调函数，严格单增和严格单减的函数统称为严格单调函数. 例如，函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是严格单增的，因为对任意 $x_1, x_2 \in R$ 时，有

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2).$$

当 $x_1 < x_2$ 时，由于 $x_1 - x_2 < 0$，而

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} x_2^2 > 0,$$

故总有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$.

又如函数 $g(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上严格单减，在区间 $[0, +\infty)$ 上严格单增，但在整个区间内却不是单调的. 这说明函数的单调性亦与集合 D 有关.

3. **奇偶性** 设 $y = f(x), x \in D$，其中 D 关于原点对称，即当 $x \in D$ 时有 $-x \in D$. 如果对任意 $x \in D$，总有

$$f(-x) = -f(x) \quad [\text{或} f(-x) = f(x)],$$

则称 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数).

例如，$f(x) = x^3$ 是奇函数，$g(x) = x^2$ 是偶函数，因为对任意 $x \in \mathbf{R}$，总有

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$
$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x).$$

又如三角函数中，正弦函数 $y = \sin x$ 是奇函数，余弦函数 $y = \cos x$ 是偶函数，而 $y = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

在坐标平面上,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4. **周期性** 设函数 $y=f(x)$,$x\in D$. 若存在常数 $T\neq0$,使对任意 $x\in D$,总有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$为周期函数,T 称为$f(x)$的一个周期. 显然,若 T 为$f(x)$的一个周期,则 $kT(k=\pm1,\pm2,\cdots)$也都是它的周期. 所以一个周期函数一定有无穷多个周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

如三角函数中,$\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为2π 的周期函数,$\tan x$ 和 $\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

但并非任何周期函数都有最小正周期. 例如常量函数$f(x)=C$ 是周期函数,任何实数都是它的周期,因而不存在最小正周期.

周期函数的图形在每个区间$[x+kT,x+(k+1)T]$上都是一样的,其中 k 为任意整数,x 为 x 轴上任意一点.

三、分段函数与反函数

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式来表示,通常称这种形式的函数为分段函数,例如符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0,\ x=0\\ 1,\ x>0\end{cases}$ 和取整函数$[x]=n,n\leqslant x<n+1,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$都是分段函数. 它们的图形如图 1-3 和图 1-4 所示.

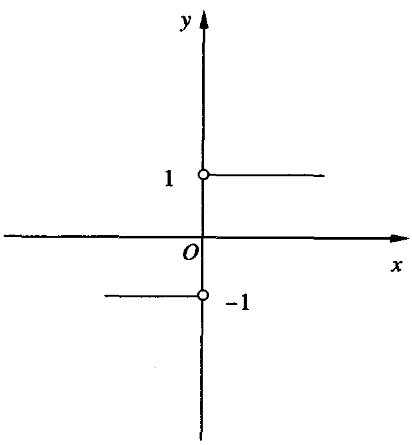


图 1-3

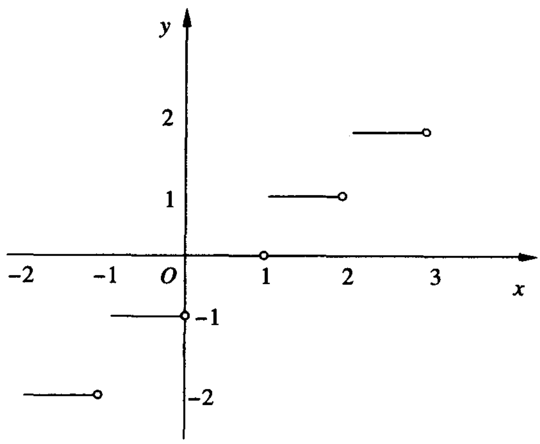


图 1-4

考察定义在集合 D 上的函数 $y=f(x)$,其中 x 是自变量,y 是因变量,x 可以独立取值,y 却按确定的法则随 x 而定. 换句话说,函数 $y=f(x)$所要反映的是 y 怎样随着 x 而定的法则. 当然,我们也可以考察 x 随 y 而定的法则. 由此引出如下反函数的概念.

定义 2 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W. 若对 W 中每一值 y_0,D 中必有一个值 x_0,使$f(x_0)=y_0$,则令 x_0 与 y_0 相对应,便可在 W 上确定一个函数,称此函数为函数