Life Insurance Actuarial

全国高等院校财经类专业规划教材
风险管理与保险精算系列教材

寿险精算

编著　李勇权

中国财政经济出版社

财经教材

全国高等院校财经类专业规划教材
风险管理与保险精算系列教材

寿险精算

编著　李勇权

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

寿险精算/李勇权编著．—北京：中国财政经济出版社，2006.10
（风险管理与保险精算系列教材）
ISBN 7-5005-9357-0

Ⅰ．寿…　Ⅱ．李…　Ⅲ．人寿保险-精算学-教材　Ⅳ．F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 109490 号

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E-mail：cfeph @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　16.5 印张　370 000 字
2006 年10月第 1 版　2006 年10月北京第 1 次印刷
印数：1—3 060　定价：30.00元
ISBN 7-5005-9357-0/F·8120
（图书出现印装问题，本社负责调换）

编写说明

南开大学保险专业于1984年设立，是我国恢复保险教育后在高等院校中首批设立的保险专业之一，并已建立以精算学科为特色的多层次的保险人才培养体系。近二十多年来，保险专业始终坚持开放式的、与国内外有关单位广泛协作和联合办学的指导思想，形成独具特色的学科建设和人才培养的办学模式，在教学、科研和学科建设等方面取得了长足的发展，已成为我国高等院校中一个多方向、多层次、结构合理、国内外相结合的办学特色。“南开保险”在我国保险教育界和实务界，以至国外保险界都享有一定的声誉。

教材是教育的基础。加强教材建设应当是院校学科发展始终不渝的任务。多年来，南开大学保险系在教材建设上也取得一些成果，曾出版过多本保险专业教材，其中有的保险专业教材在国内教育界具有重要的影响。此次，我们之所以又推出这一套新的南开大学保险、精算教材，其主要原因有：一是随着我国及国际保险业的发展，保险的基本理论也在不断创新和发展，从而需要将有些相对成熟的发展成果吸收到教材中作为基本理论或基本方法；二是随着保险教育的发展，保险专业研究生教育已成为保险人才教育和培养的突出问题。多年来，国内保险教育主要以本科生教育为主，已出版的保险专业系列或非系列的教材也多数是以本科生为主要对象，相对而言，适用于保险专业研究生学习用的教材却显得匮乏。随着各校研究生教育的发展，这种状况和矛盾显得日益严重和突出。所以，出版一套具有新意的，并适合保险专业研究生或高年级本科生教学用的教材显然是必要的。对于该套教材建设的总体指导思想是成熟并完成一本，就出一本。教材建设同样应是“有所为，有所不为”。

从总体上看，我们设想的该套教材的基本特点应是内容和安排较新，其适用对象不仅包括高等院校的保险专业的研究生，而且包括高年级的保险本科生。此外，也适用保险公司的高级管理人员的业务培训。参加编写该套教材的作者主要是南开大学保险系的教师，他们多年从事保险教学，不仅具有扎实的保险学、精算学的理论功底，而且具有丰富的教学经验。当然，作为具有创新意义的教材，其不足或错误在所难免。望读者批评、指正。

该套教材的出版得到了中国财政经济出版社的大力支持，也得到了台湾富邦保险公司的支持，在此一并表示感谢！

南开大学风险管理与保险学系

2004年8月1日

有关精算符号的说明（代序）

精算符号是精算学科不同于其他学科的一个重要方面，认识（熟悉并掌握）精算符号是学习精算的第一步。

精算符号对于学习精算是非常重要的！精算符号是精算界先辈们的一大创造，有非常好的特性：简练、清晰、富含信息。其早在100多年前就出现并被使用，而100多年后的今天依然得到广泛的使用[①]，仅此一点，足以说明这种符号的创造性和不可替代性。

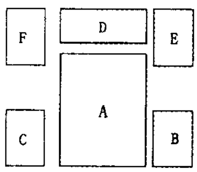
初学精算者不容易掌握众多的精算符号，往往被精算符号弄得晕头转向，甚至望精算符号而生畏，有的就此被吓退，而“不敢”学精算了。

对于已经具备一定保险和统计学基础的人来说，笔者认为掌握精算符号实际上是精算入门所需最重要的一步。

鉴于此，掌握精算符号的规律和规则，对于学习精算就显得特别重要。

下面，我们介绍精算符号的一般规则[②]，以帮助读者更快、更好地掌握精算符号，从而更高效地学习精算。

精算符号可以用下图来表示：



图中A、B、C、D、E、F表示一个精算符号可能具有的各部分组成的位置，A部分是一个精算符号的主体部分，是每个精算符号都不可少的部分，其他部分则是辅助部分，可以有，也可以没有。

一、主题部分A

这部分是精算符号的最重要部分，这部分通常由一些字母组成，下面介绍一些常见的、位于这一重要位置的字母及其含义：

i：利率

---

① 不同的学科对同一内容可以有不同的表示方法，精算所涉及的许多内容，在不同的学科也有涉及。例如，年金是精算学科中重要的内容，也是其他会计或财务管理课程中重要的内容，但是有关表示的方法则完全不同；另外对概率的表示，精算与概率统计课程中的表述有很大的不同，虽然是各有所长，但作者认为，精算的表示方法有其非常独特之处。

② 只是一般的规则，并不代表全部，并且，最好是在遇到陌生精算符号时再阅读相应的规则，这样对照将提高熟悉精算符号的效率。

v：贴现因子
δ：利息强度
d：贴现率
l：生存人数
p：生存概率
q：死亡概率
μ：致命力
m：死亡中心率
L：区间暴露数
T：终身暴露数
A：限定保额（单位福利保险金）保险的精算现值
(IA)：单增保额（保险福利单增）保险的精算现值
(DA)：单减保额（保险福利单减）保险的精算现值
E：精算贴现因子
a：年金现值
s：年金终值
(Ia)：单增年金现值
(Da)：单减年金现值
P：责任保费
V：责任准备金
S：工资函数
Z：平均工资函数

二、右下角位置 B

位置 B 是主体部分（位置 A）的下标部分，这部分的内容是用来限定主体部分的对象的，如：

x 或 30：一个小写字母或一个数字代表的是主体所涉及对象在开始时的年龄，如 a_x、A_{30}；

$\overline{n|}$或$\overline{20|}$：这种符号给出一种定期的情况，如 $A_{x:\overline{n|}}$、$A_{25:\overline{30|}}$；

xyz 或 $x:y:z$ 或 $20:\overline{30|}$：两个或多个字母或数字表示连生态，如${}_tp_{xyz}$、A_{xy}、$\ddot{a}_{xy}$；

$\diagup\overline{\quad}\diagdown$：这个符号是在可能引起混淆时以来强调连生态的；

$\overline{xyz}$：最后生存者状态，如 $e_{\overline{xyz}}$、$A_{\overline{xy}}$。

三、左下角位置 C

位置 C 用来表示期限，如：

n 或 10：单个数字或符号表示主题符号所涉及的期限，一般期限的起点来自右下角位置 B，如${}_{10}q_{20}$、${}_tp_x$；

$n|m$ 或 $n|$：竖线表示延期，竖线左边的数字（符号）表示延期的时间，其右边的数字（符号）表示主题所涉及的期限，如${}_{n|}\ddot{a}_x$、${}_{t|u}q_x$。

四、正上方位置 D

位置 D 主要用来表示主题符号的连续（或频率）情况，常见的符号有如下三种：

¨：放在 a 或 s 上用来表示年金是期初支付的，如 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$；

—：用来表示主题符号对应的频率是连续进行的情况，如 $\bar{a}_x$、$\bar{s}_{x:\overline{n}|}$；

o：用来表示福利或寿命是完全的，如 $\mathring{a}_x$、$\mathring{e}_{x:\overline{n}|}$。

五、右上角位置 E

位置 E 主要用来显示年金的支付频率或可分配年金的支付次数，或者用来显示精算现值的一些特殊的计算基础，如 $s_{\overline{n}|}^{(12)}$，$\ddot{a}_{20:\overline{50}|}^{\{12\}}$以及 $\ddot{a}_{60}^{r}$等。

六、左上角位置 F

位置 F 主要用来显示保费的支付年限或在矩规则下的年金或保险，如${}_{5}^{h}V_{30}$，${}^{2}\ddot{a}_x$ 等。

李勇权

目　录

Contents

第一章

生命表基础

寿险精算的主要讨论都建立在确定生命(如被保险人)生存情况的基础上。精算学的发展始于对生命表的研究。

第一节 基本概念

首先，我们用符号(x)表示 x 岁的生命/人，用 $T(x)$表示(x)从现在直到死亡之间的时间长度，显然，(x)在何时死亡是未知的、是不确定的，因此 $T(x)$不是一个确定的数，而是一个随机变量，$T(x)$为(x)的未来生命时间长度随机变量。

用 X 表示(x)死亡时的年龄。显然，X 也是一个随机变量，并且有 $T(x)=X-x$。称 X 为(x)的寿命随机变量。

如果$(x)=(0)$，即一个新生婴儿，那么很显然，新生婴儿的未来生命时间长度恰好等于其寿命，$T(0)=X$。

现在假设新生儿的寿命随机变量 X 是一个连续型随机变量，并且其分布函数为 $F_X(x)$，即

$$F_X(x)=\Pr(X\leqslant x)\qquad x\geqslant 0 \tag{1-1A}$$

显然，$F_X(x)$为新生儿将在 x 岁之前死亡的概率。

与上述死亡概率对应，定义生存函数 $s_X(x)$为：

$$\begin{aligned} s_X(x)&=1-F_X(x)\\ &=\Pr(X>x)\qquad x\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1-1B}$$

即 $s_X(x)$为新生儿将在 x 岁仍然活着的概率。

我们约定 $F_X(0)=0$，或 $s_X(0)=1$，即所考虑的(0)是活着的。

[例 1-1] 假设某地区新生婴儿的寿命随机变量在(0，100)上服从均匀分布，求：

(1)该地区新生婴儿寿命随机变量的分布函数；

(2)该随机变量的生存函数；

(3)该地区新生婴儿将在(55，81)之间死亡的概率。

解：

$$
\begin{aligned}
(1)F_X(x) &= \Pr(X \leqslant x)\\
&= \int_0^x \frac{1}{100}dx\\
&= x/100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)s_X(x) &= \Pr(X > x)\\
&= 1 - F_X(x)\\
&= (100 - x)/100
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\Pr(55 < X \leqslant 81) &= s_X(55) - s_X(81)\\
&= 0.26
\end{aligned}
$$

接下来考虑一般的(x)。

首先，(x)将在 $y(>x)$岁仍然生存的概率为：

$$\Pr(X > y \mid X > x) = s_X(y)/s_X(x) \tag{1-2A}$$

或

$$
\begin{aligned}
F_{T(x)}(y-x) &= \Pr(T(x) < y - x)\\
&= [F_X(y) - F_X(x)]/s_X(x)\\
&= [s_X(x) - s_X(y)]/s_X(x)
\end{aligned} \tag{1-2B}
$$

其在 y 岁之前死亡的概率为：

$$
\begin{aligned}
\Pr(x < X \leqslant y \mid X > x) &= [F_X(y) - F_X(x)]/s_X(x)\\
&= [s_X(x) - s_X(y)]/s_X(x)
\end{aligned} \tag{1-2C}
$$

或

$$
\begin{aligned}
s_{T(x)}(y-x) &= \Pr(T(x) > y - x)\\
&= s_X(y)/s_X(x)
\end{aligned} \tag{1-2D}
$$

在精算学里，通常用符号 p、q 来表示生存和死亡的概率，更具体地，用符号${}_tp_x$ 表示(x)将在 t 年后仍然生存的概率，${}_tq_x$ 表示(x)将在接下来的 t 年内死亡的概率。即

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \Pr[T(x) > t]\\
&= \Pr(X > x + t \mid X > x)\\
&= s_X(x+t)/s_X(x)\\
&= s_{T(x)}(t) \qquad t \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1-2E}
$$

和

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &= 1 - {}_tp_x\\
&= \Pr(T(x) \leqslant t)\\
&= F_{T(x)}(t)\\
&= [s_X(x) - s_X(x+t)]/s_X(x) \qquad t \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1-2F}
$$

当$(x) = (0)$时，因为 $T(x) = T(0) = X$，所以

$$
\begin{aligned}
{}_tq_0 &= \Pr[T(0) = X \leqslant t]\\
&= F_X(x) \qquad t \geqslant 0
\end{aligned}
$$

$_tp_0 = s_X(x) \qquad x \geqslant 0$

特别地，$t=1$ 时，可以将上述符号左下角的 t 省略不写，即

$$
\begin{aligned}
q_x &= \Pr[(x)\text{将在未来 1 年内死亡}] \\
&= \Pr[T(x) \leqslant 1] \\
p_x &= \Pr[(x)\text{将活到年龄 } x+1] \\
&= \Pr[T(x) > 1]
\end{aligned}
$$

另外，用 $t|$ 来表示延期 t(年)。因此，对于 (x) 将在 t 年后的 u 年内死亡的概率，我们可以用 $_{t|u}q_x$ 来表示，即

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \Pr[t < T(x) \leqslant t+u] \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\
&= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

上式中，如果 $u=1$，则可简记为 $_{t|}q_x$。

[例 1-2] 对例 1-1 所述地区的 (x)，求 $_tp_x$ 和 $_tq_x$，其中 $x+t \leqslant 100$。

解：由例 1-1 知，

$s_X(x) = (100-x)/100$

所以，

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= s(x+t)/s(x) \\
&= (100-x-t)/(100-x) \\
{}_tq_x &= 1 - s(x+t)/s(x) \\
&= t/(100-x)
\end{aligned}
$$

本例中，如果 $x+t>100$，则有，

$_tp_x = 0$

$_tq_x = 1$

考虑连续随机变量 $T(x)$ 的整数部分，用 $K(x)$ 表示之，即 $K(x) = [T(x)]$。同时令 $S(x) = T(x) - K(x)$。分别称 $K(x)$ 和 $S(x)$ 为 (x) 的简略未来生命时间长度随机变量和 (x) 的未来生命时间长度剩余随机变量。我们有

$$
\begin{aligned}
\Pr[K(x) = k] &= \Pr[k \leqslant T(x) < k+1] \\
&= \Pr[k < T(x) \leqslant k+1] \\
&= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x \\
&= {}_kp_xq_{x+k} = {}_{k|}q_x \qquad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
\tag{1-4}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{K(x)}(y) &= \Pr[K(x) \leqslant y] \\
&= \sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x \\
&= {}_{k+1}q_x
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\Pr[(K=k)\cap(S \leqslant s)] &= \Pr[(K < T \leqslant k+s)] \\
&= {}_kp_{x\,s}q_{x+k}
\end{aligned}
$$

$$f(s \mid X>x)=f_{T(x)}(x+s)$$
$$={}_s p_x \mu_{x+s}$$

在不致引起混淆的情况下，可以将 $T(x)$ 简记为 T，将 $K(x)$ 简记为 K，将 $S(x)$ 简记为 S。

[例 1-3] 对例 1-1 所述地区的$(x)(x<75)$，求其未来生命时间长度的整数部分为 25 岁的概率。

解：
$$\Pr[K(x)=25]=\Pr[25 \leqslant T(x)<26]$$
$$={}_{25}p_x-{}_{26}p_x$$
$$=[s(x+25)-s(x+26)]/s(x)$$
$$=1/(100-x)。$$

定义
$$\mu(x)=\frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}=\frac{-s'(x)}{s(x)}=\frac{-d\ln s(x)}{dx} \tag{1-5}$$
为致命力或死力。

由定义，我们有
$$-\mu(y)dy=d\ln s(y)$$
从而有
$${}_t p_x=\exp\left[-\int_x^{x+t}\mu(y)dy\right]=\exp\left[-\int_0^t\mu(x+s)ds\right] \tag{1-6}$$
特别地，$x=0$ 时，有
$${}_x p_0=s_X(x)=\exp\left[-\int_0^x\mu(s)ds\right] \tag{1-7}$$
于是
$$F_X(x)=1-s_X(x)=1-\exp\left[-\int_0^x\mu(s)ds\right]$$
$$F'_X(x)=f_X(x)=\mu(x)\exp\left[-\int_0^x\mu(s)ds\right]={}_x p_0\mu(x)$$
令 $F_{T(x)}(t)$ 和 $f_{T(x)}(t)$ 分别记 $T(x)$ 的分布函数和概率密度函数，因为
$$F_{T(x)}(t)={}_t q_x$$
所以
$$f_{T(x)}(t)=\frac{d}{dt}F_{T(x)}(t)$$

$$= \frac{d}{dt}{}_tq_x$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{1 - exp\left[-\int_x^{x+t}\mu(y)dy\right]\right\}$$
$$= \left\{-\frac{d}{dt}\left[-\int_x^{x+t}\mu(y)dy\right]\right\}exp\left[-\int_x^{x+t}\mu(y)dy\right]$$
$$= {}_tp_x\mu(x+t) \qquad t \geqslant 0 \tag{1-8}$$

于是

$${}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x\mu(x+s)ds$$

特别地

$${}_\infty q_x = \int_0^\infty {}_tp_x\mu(x+t)dt$$
$$= 1$$

另外，

$$\frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = -\frac{d}{dt}{}_tp_x$$
$$= {}_tp_x\mu(x+t) \tag{1-9}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} {}_npx = 0$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}(-ln_np_x) = \infty$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^{x+n}\mu(y)dy = \infty$$

[例 1－4] 对于例 1－1 中的 X，求 $\mu(x)$。

解：因为

$$f(x) = 1/100$$
$$S(x) = 1 - F(x)$$
$$= (100 - x)/100$$

所以

$$\mu(x) = f(x)/S(x)$$
$$= 1/(100 - x)$$

第二节 生 命 表

生命表通常由一些给出每一个年龄的 q_x、l_x、d_x 以及一些其他的衍生函数在一些年龄上的值的表组成。在给出这种表之前，我们先讨论其中一些函数的意义。

一、生命表函数与生存函数

考虑一群新生婴儿，共 $l_0=100000$ 名。每个婴儿的死亡情况是相互独立并且具有相同的概率分布，他们的生存情况由生存函数 $s(x)$给出。

令 $L(x)$表示这群人在 x 岁还活着的人数。用 $j=1,2,\cdots,l_0$ 来记这些人，则有

$$L(x)=\sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

其中 I_j 为 j 的示性函数，即

$$I_j=\begin{cases}1 & \text{如果 } j \text{ 生存到 } x\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}E[I_j]&=\Pr\{j \text{ 在 } x \text{ 岁还活着}\}\\&=\Pr\{T(0)>x\}\\&=s(x) \qquad j=1,2,\cdots,l_0\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}E[L(x)]&=\sum_{j=1}^{l_0}E[I_j]\\&=l_0 s(x)\end{aligned}$$

记 $l_x=E[L(x)]$，即 l_x 为 l_0 个新生儿中预期生存到 x 岁的人数，于是

$$l_x=l_0 s(x) \tag{1-10}$$

由于不同新生儿的生存情况是相互独立的，所以 I_j 相互独立。于是，由

$$L(x)=\sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

知 $L(x)$服从参数为 $n=l_0$，$p=s(x)$的二项分布。

令 ${}_nD_x$ 为这 l_0 个新生儿在 x 和 $x+n$ 岁之间死亡的人数，并记 ${}_nd_x=E[{}_nD_x]$。因为新生儿在 x 和 $x+n$ 岁之间死亡的概率为 $s(x)-s(x+n)$，所以有

$$\begin{aligned}{}_nd_x&=E[{}_nD_x]\\&=l_0[s(x)-s(x+n)]\\&=l_x-l_{x+n}\end{aligned} \tag{1-11}$$

$n=1$ 时可以将 ${}_nd_x$ 和 ${}_nD_x$ 中的右下标略去，即

$$\begin{aligned}d_x&=E[D_x]\\&=l_0[s(x)-s(x+1)]\\&=l_x-l_{x+1}\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}\mu(x)&=-\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx}\\&=-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}\end{aligned} \tag{1-12}$$

有

$$-dl_x = l_x\mu(x)dx \tag{1-13}$$

及

$$-d\ln l_x = -\mu(x)dx$$

从而

$$l_b = l_a exp\left[-\int_a^b \mu(y)dy\right] \qquad \forall a,\ b \in \mathrm{R}$$

令 $a=0$，$b=x$，则有

$$l_x = l_0 exp\left[-\int_0^x \mu(y)dy\right] \tag{1-14A}$$

令 $a=x$，$b=x+n$，有

$$l_{x+n} = l_x exp\left[-\int_x^{x+n} \mu(y)dy\right] \tag{1-14B}$$

及

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} dl_y$$

$$= \int_x^{x+n} l_y\mu(y)dy \tag{1-14C}$$

因为 l_0 可以被看成是具有同一生存函数 $s(x)$ 的新生儿的个数，为了方便起见，可称之为随机生存组。

二、生命表举例

表 1-1 是我们作为示范的生命表，它是“中国人寿保险业经验生命表(1990—1993)”的仿制表。

表 1-1 中国人寿保险业经验生命表(1990—1993)(男)(仿)

年龄	生存数	死亡数	生存率	死亡率	生存人年数		平均余命
x	l_x	d_x	p_x	q_x	L_x	T_x	$\mathring{e}_x$
0	1,000,000	3,037	0.996963	0.003037	998,481.5	73,641,338.0	73.64
1	996,963	2,150	0.997843451	0.0021565	995,888.0	72,642,856.5	72.86
2	994,813	1,603	0.998388642	0.0016114	994,011.5	71,646,968.5	72.02
3	993,210	1,242	0.998749509	0.0012505	992,589.0	70,652,957.0	71.14
4	991,968	992	0.998999968	0.0010000	991,472.0	69,660,368.0	70.22
5	990,976	813	0.999179597	0.0008204	990,569.5	68,668,896.0	69.29
6	990,163	683	0.999310215	0.0006898	989,821.5	67,678,326.5	68.35
7	989,480	587	0.999406759	0.0005932	989,186.5	66,688,505.0	67.40
8	988,893	514	0.999480227	0.0005198	988,636.0	65,699,318.5	66.44
9	988,379	463	0.999531556	0.0004684	988,147.5	64,710,682.5	65.47
10	987,916	432	0.999562716	0.0004373	987,700.0	63,722,535.0	64.50
11	987,484	426	0.999568601	0.0004314	987,271.0	62,734,835.0	63.53