■ 数理化解题方法与技巧丛书 ■

初中数学解题方法与技巧

新课标

主编／刘绪占　副主编／李绍法

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

新课标

■ 数理化解题方法与技巧丛书 ■

初中**数学**解题方法与技巧
初中**物理**解题方法与技巧
初中**化学**解题方法与技巧
高中**数学**解题方法与技巧
高中**物理**解题方法与技巧
高中**化学**解题方法与技巧

责任编辑　李绍建
封面设计　李　枫

ISBN 978-7-5351-1718-2

定价：19.80 元

■数理化解题方法与技巧丛书■

初中数学解题方法与技巧

新课标

主　编／刘绪占
副主编／李绍法

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

初中数学解题方法与技巧/刘绪占等编著.—武汉:湖北教育出版社.
ISBN 978-7-5351-1718-X

Ⅰ.初… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课-初中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 04163 号

出版 发行:湖北教育出版社 武汉市青年路 277 号
网址:http://www.hbedup.com 邮编:430015 电话:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北开元印刷有限公司印刷 (437100·咸宁市温泉路 58 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32 14 印张
版 次:2007 年 1 月第 3 版 2007 年 1 月第 1 次印刷
字 数:311 千字 印数:1—6 000

ISBN 978-7-5351-1718-X/G·1403 定价:19.80 元

学而时习之，不亦说乎？

默而识之，学而不厌，诲人不倦，何有于我哉？

逝者如斯夫！不舍昼夜。

——孔子

修订说明

为了帮助广大中学生提高数学思维的能力，熟练运用各种解题方法与技巧，根据现行的教学大纲和数学课程改革的要求，尤其是初中数学新课标提出的任务和发展方向，我们对原《初中数学解题方法与技巧》一书进行了全面修订．力图在保持原书特色的基础上，更为突出“全新”和“实用”两大亮点．

本书按“基本方法篇”、“思想方法篇”和“中考热点篇”三部分展开，对解初中数学题的思路与方法进行了多方探讨，既介绍了一般的数学方法，又重视数学思想的培养，并辩证地阐述了解题过程中转化和变通的常用方法，不但能使人知其然，而且能知其所以然，极便读者掌握和运用．在“中考热点篇”中，根据近年来各类不同题型中考题的自身特点，全面归纳总结出不同的解题方法与技巧，这些方法与技巧覆盖面广，实用性强．

本书对各种思路、方法与数学思想的讲授，力求深入浅出，对例题的讲解，侧重于思考途径的分析和一般方法的归纳，以利于读者领会这些思路与方法的要领，培养举一反三的能力．我们相信，这样做对提高初中学生的数学素养将颇有裨益．

本书所选例题，源于课本，适当拓宽与加深，内容丰富，知识覆盖面广，方法全面、灵活，技巧性强．每讲后面附有习题，供读者练习，书后附有答案或提示，便于读者自学．

本书可作为初中学生学习数学之参考；也可以作为数学竞赛辅导材料；对初中数学教师，也有一定的参考价值．

本书主编为刘绪占，副主编为李绍法，参加编写的人员还有

谷平、谢雪梅、熊萍、谷平、程琛、盛锐、周兴军、杨文、刘松、尚炜、兰雄、尤光明、赵亮、徐世群、聂中元、刘行强、皮松林、周绍文.

由于我们的水平有限，缺点错误在所难免，望读者不吝赐教.

编　者

2006年12月

目 录

初中数学解题方法与技巧

第一篇　基本方法篇

第一章　配方法 …… 1

一、在代数式恒等变形中的应用 …… 2

二、在方程中的应用 …… 5

三、在根式中的应用 …… 7

四、在函数中的应用 …… 10

五、在平面几何中的应用 …… 11

习题一 …… 14

第二章　换元法 …… 16

一、整体换元 …… 17

二、倒数换元 …… 22

三、比值换元 …… 26

习题二 …… 29

第三章　待定系数法 …… 31

一、在多项式除法中的应用 …… 32

二、在因式分解中的应用 …… 33

三、在解方程中的应用 …… 35

四、在代数式恒等变形中的应用 …… 37

五、在求函数解析式中的应用 …… 39

习题三 …… 43

第四章　判别式法 …… 46

一、在代数式恒等变形中的应用 …… 46

二、在方程（组）中的应用 …… 49
三、在函数中的应用 …… 52
四、在几何、三角中的应用 …… 55
习题四 …… 58
第五章　面积法 …… 61
一、求面积 …… 62
二、等积变形 …… 63
三、用面积法研究线段、角的关系 …… 66
习题五 …… 70
第六章　坐标法 …… 73
一、什么是坐标法 …… 73
二、如何建立坐标系 …… 75
三、应用举例 …… 78
习题六 …… 82
第七章　构造法 …… 85
一、构造方程 …… 86
二、构造函数 …… 89
三、构造图形 …… 90
四、构造研究对象 …… 93
五、构造反例 …… 94
习题七 …… 96
第八章　归纳法 …… 98
一、什么是归纳法 …… 98
二、完全归纳法应用举例 …… 101
三、不完全归纳法——科学发现的钥匙 …… 104
习题八 …… 107
第九章　反证法 …… 111
一、什么是反证法 …… 111
二、关于反设 …… 113

三、如何归谬 …… 114
四、何时宜用反证法 …… 116
五、反证法的联用与缩简 …… 119
习题九 …… 121

第二篇　思想方法篇

第十章　方程与不等式的思想 …… 123
一、求参数或待定系数的值或范围 …… 124
二、利用方程解平面几何计算题 …… 125
三、构造方程或不等式 …… 126
四、解应用题 …… 127
习题十 …… 129
第十一章　函数思想 …… 133
一、引入参数，建立函数关系 …… 133
二、利用函数求参数的值或范围 …… 135
三、运用函数方法解决几何问题 …… 138
四、利用函数解最值问题 …… 140
五、利用函数解决实际问题 …… 141
习题十一 …… 144
第十二章　分类讨论思想 …… 148
一、什么是分类讨论 …… 148
二、为什么要分类讨论 …… 149
三、分类的原则：不重复、无遗漏 …… 153
四、分类的关键：把握分类标准 …… 155
五、复杂问题的讨论方法：多级分类 …… 159
习题十二 …… 163
第十三章　转化思想 …… 166
一、转化条件 …… 167
二、转化结论 …… 169
三、转化解题手段 …… 170

四、转化思维角度……172
五、命题的等价转换……174
习题十三……177
第十四章　形数结合思想……181
一、以形示数……181
二、借数解形……185
三、形数结合……190
习题十四……196
第十五章　特殊与一般……200
一、特殊化……200
二、一般化……206
三、先退后进……210
习题十五……216
第十六章　整体思想……219
一、整体观察……219
二、整体变换……221
三、整体联想……223
四、整体换元……225
五、化零为整……226
六、优化整合……227
习题十六……229
第十七章　对称思想……232
一、简化解题过程……232
二、预测问题的结论……234
三、探索解题思路……237
四、应用对称思想解题……240
习题十七……245
第十八章　尝试与猜想……249
习题十八……258

第三篇　中考热点篇

第十九章　开放型问题……263
一、条件开放型……264
二、结论开放型……264
三、双向开放型……266
四、多向开放型……270
习题十九……271
第二十章　探索型问题……275
一、条件探索型……275
二、结论探索型……276
三、存在性探索型……277
四、规律性探索型……279
五、类比探索型……282
习题二十……285
第二十一章　阅读理解题……289
一、考查理解和应用新知识为主……289
二、考查算法、算理为主……291
三、考查思维能力为主……293
四、考查总结、归纳能力为主……296
习题二十一……300
第二十二章　实验操作题……305
一、图形的折展与剪拼……305
二、图形的绘制……308
三、模仿与创新……310
四、发现与论证……313
习题二十二……315
第二十三章　方案设计题……319
一、指令性设计……319
二、优化设计……321

三、开放性设计 …… 324
习题二十三 …… 327
第二十四章　动态几何问题 …… 331
一、动态几何中的不变量问题 …… 331
二、动态几何中的存在性问题 …… 333
三、动态几何中的最值问题 …… 334
四、动态几何中的函数问题 …… 336
五、动态几何中的方程问题 …… 338
习题二十四 …… 341
第二十五章　数学综合题 …… 345
一、代数知识综合题 …… 345
二、几何知识综合题 …… 346
三、方程与几何的综合问题 …… 348
四、函数与几何的综合问题 …… 351
习题二十五 …… 355
第二十六章　实际应用题 …… 357
一、方程（不等式）应用题 …… 357
二、函数应用题 …… 358
三、统计初步应用题 …… 360
四、简单概率应用题 …… 361
五、几何应用题 …… 362
六、跨学科应用题 …… 363
七、数学建模 …… 364
习题二十六 …… 367
习题答案与提示 …… 371

第一章

配 方 法

让我们先看一道数学题：

当 a、b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根.

这是全国初中数学竞赛的一道试题.

学生往往这样入手：由

$$\Delta=(2+2a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant 0$$

即 $$-8a^2-16b^2-16ab+8a-4\geqslant 0 \qquad (*)$$

往下，许多学生束手无策，有些学生则对（$*$）采取了如下变化：

$$2a^2+4b^2+4ab-2a+1\leqslant 0$$

即 $$(a+2b)^2+(a-1)^2\leqslant 0 \qquad (**)$$

（$**$）当且仅当 $a-1=0$，$a+2b=0$ 同时成立，即 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$时，原方程有实根.

还有学生一开始就对原方程作如下变形：

$$[x^2+2(1+a)x+(1+a)^2]+(a^2+4ab+4b^2)$$
$$+[2a^2+2-(1+a)^2]=0$$

即 $$(x+1+a)^2+(a+2b)^2+(a-1)^2=0$$

因此 $$\begin{cases}a-1=0\\a+2b=0\\x+1+a=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-\dfrac{1}{2}\\x=-2\end{cases}$$

故当 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$时，原方程有实根 $x_1=x_2=-2$.

以上的成功,应归功于"配方".

把一个式子或一个式子的部分写成完全平方式或几个完全平方式的和的形式,这种方法叫做配方法.

配方法是恒等变形的重要手段,它既是数学的基本方法,又具有很强的技巧性.

使用配方法的立足点在于利用完全平方式的非负性,达到化简代数式、解特殊方程、求值、求变量或函数的取值范围、求最值、证明不等式、研究函数和平面图形的性质等方面的目的.

一、在代数式恒等变形中的应用

例1 已知 $m^2+n^2+mn+m-n+1=0$,则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的值等于 ( )

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

分析 不易找到联系条件式与待求式的桥梁.

条件式是一个 m、n 的二次六项式,通过恒等变形揭露其特殊性,是一种出路. 而条件式又具备 $a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc=0$ 的特点,自然想到配方.

解 选 B. 因为条件式可化为

$$\frac{1}{2}[(m+n)^2+(m+1)^2+(n-1)^2]=0$$

$\therefore$ $m=-1,n=1$

故$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=0$.

【点评】 可能有同学通过观察,猜想出 $m=-1,n=1$,也能得出正确结论,但毕竟不是通法. 如果把题型变为填空题或解答题,则猜想的方法还站不住脚,而应证明已知等式(看作 m、n 的二元方程)的解的唯一性.

例2 已知 $a-b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,$b-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,则 $a^2+b^2+c^2-$

$ab-bc-ac=$ ________________.

分析 若熟悉 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，则问题的解决将变得十分轻松.

解 $\because a-b=\sqrt{3}+\sqrt{2}, b-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,

$\therefore\ a-c=2\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)]$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2]$$

$$=\frac{1}{2}[10+12]=11$$

【点评】 下意识地掌握一些常用的结论，对提高解题能力是大有帮助的. 请熟练掌握以下基本恒等式

(1)$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

(2)$a^2+b^2+c^2+2ab\pm2bc\pm2ac=(a+b\pm c)^2$;

(3)$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ac=\frac{1}{2}[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2]$;

(4)$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例3 已知实数 x、y、z 满足 $x=6-y$, $z^2=xy-9$，试求 x、y、z 之值.

分析 注意题设条件等式只有 2 个，而未知元有 3 个，要想求出这 3 个未知量，还应挖掘条件等式中隐含的某种特殊关系. 先消去一个未知数(如 x)试试看.

解 把 $x=6-y$ 代入 $z^2=xy-9$ 中，得

$$z^2=(6-y)y-9=-(y-3)^2$$

即　　$z^2+(y-3)^2=0$　①

因为 y、z 是实数，故有 $z^2\geqslant0$，$(y-3)^2\geqslant0$.

欲使①式成立，必须 $z=0$，$y=3$，此时 $x=6-3=3$.

故实数 x、y、z 的值是 $x=y=3$，$z=0$.

【点评】 此题的解法应用了“完全平方式具有非负性”，“若有限个非负数的和为零，则每个非负数都为零”这两条基本性质.

例4 求证无论 x 为何实数，代数式 $x^2-4x+4.5$ 的值恒大于零.

分析 只要将代数式变形成一个完全平方式加一个正数的形式即可.

证 $x^2-4x+4.5=(x^2-4x+2^2)-2^2+4.5$

$$=(x-2)^2+0.5$$

$\because (x-2)^2\geqslant0$，$\therefore (x-2)^2+0.5>0$

所以不论 x 为何实数，代数式 $x^2-4x+4.5$ 的值恒大于零.

【点评】 本题采用了配常数项 2^2，使 $x^2-4x+2^2=(x-2)^2$. 有时需要配一次项，甚至配二次项（如本章例1）. 熟练、准确地进行各种形式的配方，是解题的基本功.

例5 已知 n 为正整数，且 $4^7+4^n+4^{1998}$ 是一个完全平方数，则 n 的值是________.

分析 对于这类题目许多同学感到无从下手，我们可以把原式稍作变形：

$$4^7+4^n+4^{1998}=2^{14}+2^{2n}+2^{3996}$$

如果上式右端可以表示为一个完全平方式，那么问题就解决了.

解 设 $2^{14}+2^{2n}+2^{3996}=(2^7+2^x)^2$　①

将 $(2^7+2^x)^2$ 展开后得

$$(2^7+2^x)^2=2^{14}+2\cdot2^7\cdot2^x+2^{2x}$$　②

由①、②得 $2^{14}+2^{2n}+2^{3996}=2^{14}+2^{8+x}+2^{2x}$，比较两边的指数得