全国高等农林院校"十一五"规划教材

概率论与数理统计

徐 梅 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校"十一五"规划教材

概率论与数理统计

徐　梅　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 徐梅主编．—北京：中国农业出版社，2007.2
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-11393-0

Ⅰ．概… Ⅱ．徐… Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 163756 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑 龙永志

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2007 年 1 月第 1 版　　2007 年 2 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16　　印张：15.25
字数：268 千字
定价：22.00 元

内容提要

本书是概率论与数理统计课程教材，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等内容.

本书选材合理、内容全面、语言流畅、深入浅出. 适合作为农林院校各专业学生概率论和数理统计课程教材，也适合广大科技工作者参考.

编写人员名单

主　　编： 徐　梅

副 主 编： 王增辉　张好治

参编人员： 王忠瑞　高德宝　闫善文

张　丽　郭　英

主　　审： 刘振忠

前　言

概率论与数理统计是从数量方面研究随机现象规律性的数学学科，是一门理论联系实际最为活跃的学科之一，它的概念、理论和方法被广泛地应用在国民经济的各个领域和部门．学习这门课程，对于培养学生能力、提高学生素质，使学生更好地适应将来所从事的学习和科研工作是十分有利的．

本教材依据东北地区农林院校共同制定的《概率论与数理统计》教材大纲，从各院校教学实际出发，参考众多现行的教材，同时考虑到我国高等教育正经历着从精英教育向大众化教育转变的实际，在保证教材内容体系完整性的基础上，对课程内容、授课的难度、习题的选配等方面都作了一些必要的尝试和努力．教材重点突出、结构合理、语言精练、通俗易懂．

本书是全国高等农林院校"十一五"规划教材，由黑龙江八一农垦大学、吉林农业大学和莱阳农学院等院校有多年教学经验的教师共同编写，主编由黑龙江八一农垦大学徐梅教授担任．编写分工情况是：第一章由高德宝编写；第二章由张丽编写；第三章由张好治编写；第四、七章由徐梅编写；第五章由王忠瑞编写；第六章由王增辉编写；第八章由郭英编写；第九章由闫善文编写．

本书由黑龙江八一农垦大学刘振忠教授担任主审．

参加编写和审稿的教师为本书的出版付出了艰辛的努力，尽管如此，本书错误在所难免，希望广大读者不吝赐教．

编　者

2006 年 11 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象及其规律性的数学学科，是统计学的理论基础．本章介绍概率论的基本概念——样本空间、事件和概率，并进一步讨论事件间的关系及其运算、概率的性质及计算方法等，这些都是进一步学习概率论的基础．

第一节　随机事件

一、随机现象

现实世界中发生的现象千姿百态，但概括起来无非是两类：一类称为确定性现象，另一类称为随机现象．

所谓确定性现象，是指在一定条件下必然发生的现象．例如，标准大气压下，将水加热到 100 ℃，“水沸腾”是必然出现的现象，只要保持上述条件不变，任何人重复上述试验并进行观察，该现象的结果总是确定的．同性电荷相互排斥这种现象也是这样．这类现象的结果是能够准确预言的．

所谓随机现象，指在一定条件下，可能发生也可能不发生的现象．例如，我们随意地抛掷一枚硬币，对落下后的硬币进行观察，会出现“正面向上”或“反面向上”2 种可能的结果，但试验之前并不能准确地预言究竟是哪一个结果出现．又如，从含有不合格品的一批某种产品中，任意抽取一件检验，其检验结果可能是合格品，也可能是不合格品，我们在事先也不能够准确地预言．

对随机现象进行 1 次或少数几次观察，其出现哪一个结果是带有偶然性的，但在大量重复观察时，某个试验结果在试验中出现的可能性具有某种规律性，我们将这种规律性称为统计规律性．概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

二、随机试验

为了获得随机现象的统计规律性，必须在相同的条件下大量重复地做试验，概率论中将对随机现象的观察或为观察随机现象而进行的试验称为随机试验，简称为试验，并约定随机试验应具备以下 3 个特征：

(1) 试验能在相同条件下重复进行;

(2) 试验可能出现的结果不止一个,所有结果事先都是知道的;

(3) 每次试验都会出现上述可能结果中的某一个,但事先不能确定哪一个结果会出现.

我们来看一个试验.

设袋中有 3 个颜色不同、大小一样的小球,其中红、黄、白色球各 1 个. 我们所做的试验是从袋中随意地取出一个小球并观察小球的颜色. 该试验的可能结果有 3 种,即取出的是红球、黄球和白球. 显然这个试验满足上述 3 个条件,因此是一个随机试验.

我们常用 E 表示随机试验,下面是一些试验的例子:

E_1:同时抛掷 2 枚硬币,观察分值面(以后我们称其为正面)出现的情况.

E_2:在一条生产线上,检测 24 h 内生产出的产品中次品的数目.

E_3:射手向一目标射击,观察射手直到命中目标为止所射击的次数.

E_4:观察某地的年降雨量.

E_5:在一批灯泡中,随意抽取 1 只,以小时为单位,测试灯泡的寿命.

三、样本空间与随机事件

对于随机试验来说,尽管在每次试验之前不能预知其试验结果,但试验所有可能的结果是已知的. 我们将随机试验 E 所有可能结果组成的集合称为该试验的样本空间,记为 Ω,每一个试验结果称为样本空间的样本点,记为 ω.

下面我们写出上段随机试验 E_1 到 E_5 的样本空间.

E_1:$\Omega=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

E_2:$\Omega=\{0,1,2,\cdots,n\}$,其中 n 为 24 h 内生产出的产品数目.

E_3:$\Omega=\{1,2,\cdots\}$.

E_4:$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}=[0,+\infty)$.

E_5:$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}=[0,+\infty)$.

对于后 2 个样本空间,虽然实际上年降雨量与灯泡的寿命是有限的,但为了数学上处理的方便,我们将样本空间进行了适当扩大,这是允许的.

在样本空间的基础上,我们就可以定义随机事件了.

定义 称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件,简称事件. 特别地,由一个样本点组成的单点集 $\{\omega\}$,称为基本事件. 事件通常用大写的字母 A,B,C 等表示,称某个随机事件发生,当且仅当该事件所包含的样本点出现.

例如,在试验 E_1 中,2 枚硬币同时出现正面就是一个基本事件,而出现正面这一事件由于包含了不止一个样本点,就不是一个基本事件,通常称为复合事件.

在试验 E 中，由于样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集，因而也是随机事件，因为 Ω 含有所有的样本点，所以每次试验必定有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必定发生，因而称 Ω 为必然事件，今后必然事件就用 Ω 表示. 又因为空集 $\varnothing$ 也是 Ω 的子集，因而也是随机事件，由于它不包含任何样本点，故每次试验 $\varnothing$ 必定不会发生，我们称 $\varnothing$ 为不可能事件，今后不可能事件就用 $\varnothing$ 来表示.

四、事件间的关系及其运算

在实际问题中，往往要在一个随机试验下同时研究几个事件以及它们之间的联系. 例如，在检查某些圆柱形产品时，要求它的长度和直径都合格才算合格. 这时，要考虑“产品合格”、“产品不合格”、“直径合格但长度不合格”等等事件. 显然，这些事件相互之间是有联系的，因此，我们有必要来研究事件之间的关系及事件之间的一些运算.

由于随机事件是样本空间的子集，故我们可以利用集合论的知识来描述事件之间的关系和运算，而且事件之间的关系及运算与集合的关系及运算是相对应的.

1. 事件的包含　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，那么称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 是事件 B 的子事件，记作 $A\subset B$. 例如，“直径不合格”必然导致“产品不合格”，所以，“直径不合格”是“产品不合格”的子事件. 为了方便起见，规定对于任一事件 A，$\varnothing\subset A$，显然，对任一事件 A，有 $A\subset\Omega$.

2. 事件的相等　对于任意两事件 A 和 B，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即两事件 A 与 B 互为包含，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$，这时事件 A 和 B 为样本空间的同一个子集. 例如，在投一颗骰子时，若设 A 为“出现 1，3，5 点”，B 为“出现的点数为奇数”，则 $A=B$.

3. 和事件　事件 A 与事件 B 至少发生一个的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A\cup B$. 例如，“产品不合格”便是“直径不合格”与“长度不合格”两事件的和事件.

和事件可以推广到更多的事件上去，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

4. 积事件　事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB. 例如，“产品合格”就是“直径合格”与“长度合格”两事件的积事件. 积事件也可以推广到更多的事件上去，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

5. 互不相容事件（或互斥事件）　如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件（或称互斥事件）. 显然，基本事

件间是互不相容的. 如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意 2 个都是互不相容事件，那么称这组事件为两两互不相容事件.

对于互不相容事件 A、B，和事件 $A \cup B$ 有时记作 $A+B$.

6. 互逆事件(或对立事件)　如果事件 A 与事件 B 满足 $A \cup B=\Omega, AB=\varnothing$，即在一次试验中事件 A 与 B 有且只有一个发生，则称事件 A 与事件 B 为互逆事件(或对立事件). 一般地，将事件 A 的逆事件记为 $\overline{A}$，例如，“直径合格”与“直径不合格”互为逆事件；“产品合格”与“产品不合格”也是互为逆事件. 对于任一事件 A，显然有：$\overline{A}A=\varnothing, A\cup\overline{A}=\Omega$.

由于 $\overline{A}A=\varnothing$，所以互逆事件一定是互不相容事件，但反之不然. 例如，投一枚骰子，事件 A=“出现的点数为奇数”与事件 B=“出现的点数为 4”是互不相容事件，但不是互逆事件.

7. 差事件　事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$. 例如，事件“直径合格但长度不合格”便是事件“直径合格”与事件“长度合格”的差事件. 显然，$A-B=A\overline{B}$.

由于事件中的关系及运算与集合之间的相应关系及运算是一致的，因此，事件之间的关系与运算可以用集合表示如下(图 1 - 1).

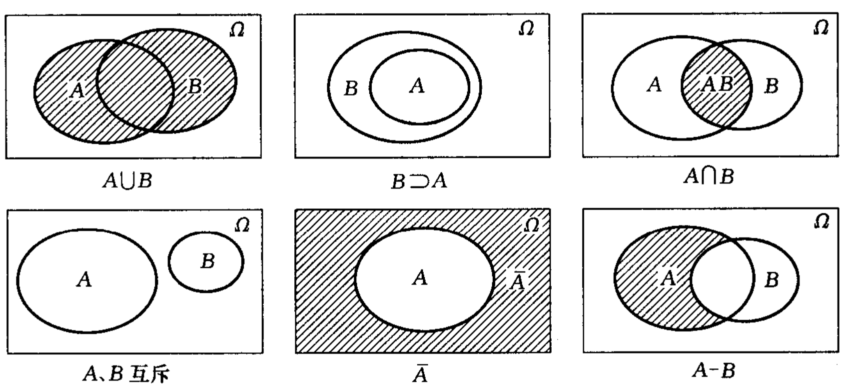

图 1 - 1

有了以上的定义，我们就可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的运算关系来分析事件间的关系. 不过，要注意学会用概率论的语言来解释这些关系及运算，并且会用这些运算关系来表示一些事件.

与集合的运算一样，事件之间的运算满足下列定律.

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup$

$(A\cap C)$.

(4) 德摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些定律都可以推广到任意有限多个事件上去.

例 1　向指定目标射击 3 枪,以 A_1,A_2,A_3 分别表示事件"第一、二、三枪击中目标". 试用 A_1,A_2,A_3 表示以下各事件:(1) 只击中第一枪;(2) 只击中一枪;(3) 至少击中一枪;(4) 击中次数不多于二枪;(5) 至少击中二枪;(6) 三枪都未击中.

解　(1) 事件"只击中第一枪"意味着第一枪击中,第二枪和第三枪都不中,就是事件 A_1 发生,而事件 A_2、A_3 均未发生,所以事件"只击中第一枪"可以表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2) 事件"只击中一枪"并没指定哪一枪击中,3 个事件"只击中第一枪"、"只击中第二枪"、"只击中第三枪"中任意一个发生,都意味着"只击中一枪"发生. 同时上述 3 个事件是两两互斥的,所以事件"只击中一枪"可以表示为:

$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 或 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

(3) 事件"至少击中一枪"就是事件"第一、第二、第三枪至少有一枪击中",所以这事件可以表示为:$A_1\cup A_2\cup A_3$,也可以表示为:

$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

(4) 事件"击中次数不多于二枪"就是"一枪未中"、"击中一枪"、"击中两枪"的和事件,故可以表示为:

$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或$\overline{A_1A_2A_3}$.

(5) 事件"至少击中二枪"就是"击中两枪"、"击中三枪"事件的和事件,故可以表示为:$A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1A_2A_3$.

(6) 三枪都未击中为$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

注:本例中,向指定目标射击三枪为一个试验,A_1,A_2,A_3 的任意一个组合都为一个事件.

例 2　某人加工了 3 个零件,设事件 A_i 表示"加工的第 i 个零件是合格品"$(i=1,2,3)$,试用文字叙述下列事件.

$A_1\cup A_2,A_1\cup A_2\cup A_3,A_1A_2A_3,A_3-A_2,A_3\overline{A}_2,\overline{A_1\cup A_2},\overline{A}_1\overline{A}_2,\overline{A}_2\cup\overline{A}_3,\overline{A_2A_3},A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

解　$A_1\cup A_2$ 表示前 2 个零件至少 1 个合格.

$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示 3 个零件至少 1 个合格.

$A_1A_2A_3$ 表示 3 个零件都合格.

$A_3-A_2=A_3\overline{A}_2$ 表示第 3 个合格但第 2 个不合格.

$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1\ \overline{A}_2$ 表示前 2 个零件均不合格.

$\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 = \overline{A_2 A_3}$表示后 2 个零件至少 1 个不合格.

$A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$ 表示 3 个零件中至少 2 个合格.

第二节　随机事件的概率

对于随机事件来说，它在一次试验中，可能发生，也可能不发生. 人们在长期的观察和试验中发现，随机事件虽然有其偶然性的一面，但在多次重复试验中，它的发生却往往呈现一定的规律性，即它出现的可能性的大小是可以度量的，我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 随机事件发生的可能性的大小通常用区间[0,1]中的一个数值来刻画，我们把用来刻画随机事件出现可能性大小的数值，称为这个随机事件的概率. 概率是概率论中最基本的概念之一，下面我们给出几种概率的定义.

一、概率的统计定义

我们先给出频率的定义.

定义 1　设在相同条件下进行的 n 次试验中，事件 A 发生了 n_A 次，则称 n_A 为事件 A 发生的频数，而称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在 n 次试验中发生的频率.

事件 A 的频率反映了事件 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生的越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大. 人们发现，当试验次数很大时，事件 A 发生的频率总会在某个确定的数值附近摆动，随机事件频率的这种特性称为频率的稳定性.

为了研究在抛掷硬币的试验中，"出现正面"这一事件发生的规律，历史上一些知名的科学家曾做了大量试验，其部分试验结果如下表(表 1 - 1).

表 1 - 1

试验者	抛掷次数 n	正面向上的次数 μ	正面向上的频率
德莫根	2 408	1 061	0.440 6
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5