普通高等学校教材

TEXTBOOK FOR HIGHER EDUCATION

LISAN SHUXUE

离散数学

廖虎 主编

廖虎 余庆红 张云鹏 编

张遵廉 主审

西北工业大学出版社

O158/128
2007

高等学校教材

离散数学

廖　虎　主编
廖　虎　余庆红　张云鹏　编
张遵廉　主审

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书系统地介绍了离散数学基础知识。主要内容有命题逻辑、谓词逻辑、集合、二元关系、函数、代数、群论、格与布尔代数、图论和特殊图等。本书具有内容系统、概念清晰、证明严谨的特点，各部分相对独立而又相互联系，各章都配有典型的例题，各节后还配有适量的习题，以便于读者理解和掌握所学的知识。

本书可作为高等理工院校计算机软件和应用专业的本科、研究生教材，也可以供有关从事计算机工程的技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/廖虎主编．—西安：西北工业大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5612-2254-6

Ⅰ．离… Ⅱ．廖… Ⅲ．离散数学—高等学校—教材 Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 101841 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 **邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西丰源印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：15.5
字　　数：371 千字
版　　次：2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：23.00 元

前 言

离散数学是一门相对于“连续数学”而命名的数学分支，是现代数学一个重要组成部分，也是计算机科学基础理论的核心，是随着计算机科学的发展而建立起来的新兴基础学科。离散数学主要研究离散量的结构和相互之间的关系，其研究对象一般是有限空间，因此它能充分描述计算机科学离散性的特点。

离散数学课是介绍离散数学各分支的基本概念、基本理论、基本研究方法和研究工具的课程。它的内容丰富且涉及面广，离散数学广泛应用于计算机技术和软件专业的诸领域。从计算到信息处理，从计算机理论科学到计算机应用技术，从计算机软件到计算机硬件，都与离散数学密切相关。

自 20 世纪 70 年代以来，离散数学课程已成为计算机科学与技术的核心专业基础课程，是计算机软件专业本科生必修的专业基础课。一方面，它为后续课程，如数据结构、编译原理、操作系统、数据库原理、人工智能和算法分析等提供必要的数学基础；另一方面，通过对离散数学的学习，可以培养和提高学生的抽象思维和逻辑推理能力，为今后继续学习和工作打下坚实的数学基础。

本书是在作者多年从事离散数学课教学实践并参考国内外多种教材的基础上编写而成的，编写过程中力求做到内容通俗流畅、简明扼要。书中对每个部分的内容从章节、例题、练习题的精选都是按照步步启发的模式安排的，这有利于施教者在教学过程中的发挥。每章的各小节均配有适量的习题。

全书共分 10 章，其中第 1～4 章由廖虎编写；第 5～7 章由余庆红编写；第 8～10 章由张云鹏编写。全书由廖虎任主编。西北工业大学张遵廉教授审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见，在编辑出版过程中，得到西北工业大学出版社雷军、王夏林同志的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在不当和疏漏之处，恳请读者批评指正。

作 者

2006 年 10 月

符 号 表

逻 辑

1. $\neg P$　　非 P
2. $P \vee Q$　　P 或 Q
3. $P \wedge Q$　　P 并且 Q
4. $P \rightarrow Q$　　P 蕴含 Q
5. $P \leftrightarrow Q$　　P 等值于 Q
6. $P \Rightarrow Q$　　P 永真蕴含 Q
7. $P \Leftrightarrow Q$　　P 恒等于 Q
8. $\forall$　　全称量词
9. $\exists$　　存在量词

集 合

1. $a \in A$　　a 是集合 A 的元素（a 属于 A）
2. $a \notin A$　　a 不属于 A
3. $A \subseteq B$　　集合 A 包含于集合 B 中
4. $A \subset B$　　集合 A 真包含于集合 B 中
5. $\varnothing$　　空集合
6. U　　全集合（论述域）
7. $A \cup B$　　集合 A 和集合 B 的并
8. $A \cap B$　　集合 A 和集合 B 的交
9. $A - B$　　集合 B 关于集合 A 的相对补
10. $\overline{A}$　　集合 A 的绝对补
11. $\rho(A)$　　A 的幂集合
12. $\bigcup_{i \in s} A_i$　　$\{x \mid \exists i(i \in S \wedge x \in A_i)\}$
13. $\bigcap_{i \in s} A_i$　　$\{x \mid \forall i(i \in S \rightarrow x \in A_i)\}$
14. $A \times B$　　A 和 B 的笛卡儿乘积
15. $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$　　$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿乘积
16. $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$　　有序 n 重组

字符串集合

1. Σ　　字母表
2. Λ　　空串
3. $\| x \|$　　串 x 的长度
4. Σ^+　　字母表 Σ 上的所有非零有限长度串的集合
5. Σ^*　　$\{\Lambda\} \cup \Sigma^+$
6. AB　　连接积 $\{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$
7. A^n　　$\{x_1, x_2, \cdots, x_n \mid x_i \in A\}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

数

1. $\mathbf{N}$	自然数集合$\{0,1,2,\cdots\}$
2. $\mathbf{Z}$	整数集合
3. $\mathbf{Z}_+$	正整数集合
4. $\mathbf{Q}$	有理数集合
5. $\mathbf{Q}_+$	正有理数集合
6. $\mathbf{R}$	实数集合
7. $\mathbf{R}_+$	正实数集合
8. (a,b)	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a < x < b\}$
9. $[a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$
10. $(a,b]$	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a < x \leqslant b\}$
11. $[a,b)$	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a \leqslant x < b\}$
12. (a,∞)	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge x > a\}$
13. $[a,\infty)$	$\{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge x \geqslant a\}$
14. $\mathbf{N}_k$	$\{0,1,2,\cdots,k-1\}$

关系和划分

1. aRb	a 对 b 有关系 R
2. I_A 或 E_A	集合 A 上的相等关系
3. $\langle A,R\rangle$	集合 A 上关系 R 的有向图
4. $R_1 \circ R_2$	R_1 和 R_2 的合成关系
5. R^n	关系 R 自身 n 次合成
6. $r(R)$	关系 R 的自反闭包
7. $s(R)$	关系 R 的对称闭包
8. $t(R)$	关系 R 的传递闭包
9. $\widetilde{R}$	关系 R 的逆关系
10. $\overline{R}$	关系 R 的补关系
11. $\sim$	等价关系
12. $\leqslant, \prec$	偏序
13. $<$	拟序
14. $a \equiv b(\bmod k)$	a 与 b 模 k 等价
15. $[a]_R$	在等价关系 R 下,a 的等价类
16. π	划分
17. A/R	等价关系 R 诱导的 A 的划分

函　数

1. $f(a)$	函数 f 对于自变元 a 的值
2. $f:A \to B$	具有前域 A 陪域 B 的函数 f

3. $f(A)$	在映射 f 下，集合 A 的象
4. $f \circ g$	函数 g 和 f 的合成
5. A^B	从集合 B 到集合 A 的所有函数的集合
6. 1_A 或 I_A	A 上的恒等函数
7. f^{-1}	函数 f 的逆函数
8. $f^{-1}(A)$	在函数 f 下，A 的原象
9. $f\|_A$	函数 f 到集合 A 的限制
10. Ψ_A	集合 A 的特征函数
11. $P_1 \diamondsuit P_2$	置换 P_1 和 P_2 右合成

基　数

1. $\|A\|$	集合 A 的基数

代数和布尔代数

1. $\langle A, \circ, \Delta, k\rangle$	具有载体 A、二元运算 $\circ$、一元运算 Δ、常数 k 的代数
2. $+_k$	模 k 加法
3. $\times_k$	模 k 乘法
4. $A \times A'$	代数 A 和 A' 的积代数
5. $A/\sim$	在同余关系 $\sim$ 下，代数 A 的商代数
6. $\mathrm{lub}(A)$	集合 A 的最小上界
7. $\mathrm{glb}(A)$	集合 A 的最大下界

图　论

1. $\langle V, E\rangle$	具有顶点集合 V 和边集 E 的图
2. $\langle a, b\rangle$	从节点 a 到节点 b 的有向边
3. (a, b)	从节点 a 到节点 b 的无向边
4. $[a, b]$	节点 a 和 b 之间的边
5. $\deg(v)$	顶点 v 的度数（次数）
6. $W(i, j)$	边 $[i, j]$ 的权

目 录

第 1 章 命题逻辑

第 1 节 命 题

逻辑学是研究推理的科学，可分为**形式逻辑**和**数理逻辑**两个部分. 它们的最大区别在于，形式逻辑允许有二义性，而数理逻辑不允许.

例如，陈述句"你吃饱了"在形式逻辑中可以理解为"你的确是吃的过饱了"，或者"你这个人的行为很无聊，如同吃饱饭撑的". 这就是形式逻辑的二义性，一个陈述句可能表示两个意思.

数理逻辑是将形式逻辑数学符号化，是用数学的方法研究推理的科学. 先介绍逻辑学的基础 —— **命题逻辑**. 命题是逻辑学中的基本单位. 陈述语句是逻辑学的形式语言，也可以称为**断言**. 命题逻辑就是以命题为对象进行的逻辑推理.

一、命题

在特定的范围、时间和空间内具有唯一确定的真假性，这样的陈述语句就是**命题**.

一个命题是一个或真或假而不能两者都是的断言. 如果命题是真，它的真值为真，如果命题是假，它的真值是假.

例 1.1 判断下述的问题是否是命题：

(1) 今天下雪；

(2) 2 是偶数而 3 是奇数；

(3) $3+3=6$；

(4) 陈胜起义那天，杭州下雨；

(5) 2020 年人类将登上火星.

解 以上都是命题，(1) 的真值取决于今天的天气；(2) 和(3) 是真；(4) 已无法查明它的真值，但它是或真或假，将它归属于命题；(5) 目前尚未确定其真假，但到 2020 年时它是有真值的，应归属于命题.

例 1.2 判断下述的问题是否是命题：

(1) $x+y>4$.

(2) $x=3$.

(3) 真好啊！

(4) 你去哪里？

解 (1) 和(2) 是断言，不是命题，因为它的真值取决于 x 和 y 的值. (3) 和(4) 都不是断言，所以不是命题. 自然语句中有陈述句、祈使句、疑问句和感叹句，其中能判断真假的只有陈述句.

例 1.3 分析问题：一个人说："我正在说谎."

解 他是在说谎还是在说真话呢？如果他讲真话，那么他所说的是真，也就是他在说谎. 从而，可以得出结论，如果他讲真话，那么他是在说谎.

另一方面，如果他是说谎，那么他说的是假. 因为他承认他是说谎，所以他实际上是在说真话. 从而，可以得出结论，如果他是说谎，那么他是讲真话.

从以上分析，得出既非说谎也不是讲真话. 这样，断言"我正在说谎"事实上不能指定它的真假，所以不是命题. 这种断言叫**悖论**.

例如，学生甲在教师乙处学习法律，约定学成后甲才支付学费 2 000 元，同时规定学生甲和教师乙在同一场官司中，师生分别作为控辩双方，学生方获胜为学成的标准.

学业结束后学生拒绝支付学费，他认为，教师，您可以通过打官司解决问题. 如果教师官司打输了，我自然不支付学费；如果教师官司打赢了，说明我还没有学成，根据先前的约定，我仍然可以不支付学费.

这也是个悖论的例子，无论教师乙怎样努力，在签合同时就被学生甲算计进去了.

若一个命题已不能分解成更简单的命题，则这个命题叫**原子命题**或**本原命题**. 在例 1.1 中(1)，(3)，(4)，(5) 都是本原命题，但(2) 不是，因为它可写成"2 是偶数"和"3 是奇数"两个命题.

命题和本原命题常用大写字母 P，Q，R 表示. 如用 P 表示"4 是质数"，则记为

P：4 是质数

二、命题连接词

命题和原子命题常可通过一些连接词构成新命题，这种新命题叫**复合命题**. 例如：

P：明天下雪，　Q：明天下雨

是两个命题，利用连接词"不""并且""或"等可分别构成新命题"明天不下雪""明天下雪并且明天下雨""明天下雪或者明天下雨"等，即"非 P""P 并且 Q""P 或 Q"等.

在代数式 $x+3$ 中，"x""3"叫**运算对象**，代数中的运算对象分变量(x) 和常量(3)；命题演算同样对原子命题有**变元**(P) 和**常元**(真、假) 之分.

"+"叫运算符，$x+3$ 表示运算结果. 在命题演算中，也用同样术语. 连接词就是命题演算中的运算符，叫**逻辑运算符号**或**逻辑连接词**. 常用的连接词有以下 5 个.

1. 否定符号 $\neg$

设 P 表示命题，那么"P 不真"是另一命题，表示为 $\neg P$，叫做 P 的**否定**，读做"非 P". 对于两个相互矛盾的命题，不可能都是假的，必有一个为真，这就是**排中律**. 如果 P 是假，则 $\neg P$ 是真，反之亦然. 所以，否定符号 $\neg$ 可以按表 1.1 所示定义. 归纳为非真即假，非假即真.

表 1.1

P	$\neg P$	P	$\neg P$
假	真	0	1
真	假	1	0

表 1.1 叫**真值表**，定义运算符的真值表是指明如何用运算对象的真值，来决定一个应用运算符的命题的真值. 真值表的左边列出运算对象的真值的所有可能组合，结果命题的真值

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

列在最右边的一列. 为了便于阅读，我们通常用符号 T(true) 或 1 代表真，符号 F(false) 或 0 代表假. 一般在公式中采用 T 和 F，在真值表中采用 1 和 0.

例 1.4　求下列命题的否定.

(a)P：4 是质数.

(b) Q：这些都是男同学.

解　(a)$\neg P$:4 不是质数.

或者　　　$\neg P$:4 是质数，是不对的.

(b)$\neg Q$:这些不都是男同学.

翻译成　　"这些都不是男同学"是错的.

原命题为 P,非命题 $\neg P$,一般的理解为：并非 P,即在命题前加"并非"二字. 例如：

P:上海是一个处处都清洁的城市.

$\neg P$:并非上海是一个处处都清洁的城市.

而不能写成"上海是一个处处都不清洁的城市".

2. 合取词 $\wedge$

如果 P 和 Q 是命题，那么"P 并且 Q"也是一命题，记为 $P \wedge Q$，称为 P 和 Q 的**合取**，读做"P 与 Q"或"P 并且 Q". 合取词 $\wedge$ 的定义如表 1.2 所示. 从真值表可知,$P \wedge Q$ 是真当且仅当 P 和 Q 俱真. 归纳为 P,Q 同真时,$P \wedge Q$ 为真,其余为假.

表 1.2 描述了合取运算的真值情况. 例如：

P：王华的成绩很好.

Q：王华的品德很好.

$P \wedge Q$：王华的成绩很好并且品德很好.

表　1.2

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表　1.3

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. 析取符号 $\vee$

如果 P 和 Q 是命题，则"P 或 Q"也是一命题，记作 $P \vee Q$，称为 P 和 Q 的**析取**，读做"P 或 Q". 析取符号"$\vee$"的定义如表 1.3 所示. 从真值表可知 $P \vee Q$ 为真，当且仅当 P 或 Q 至少有一为真. 归纳为 P,Q 同假时,$P \vee Q$ 为假,其余为真.

表 1.3 描述了析取运算的真值情况,可以看出合取与析取有对偶的关系.

例如：

(a) P:今晚我写字.

Q:今晚我看书.

$P \vee Q$：今晚我写字或看书.

(b) P:今年是闰年.

Q:今年她生孩子.

$P \vee Q$：今年是闰年或者今年她生孩子.

逻辑运算符号可以将两个无关的命题连接成一新命题.

"或"字常见的含义有两种：一种是**"可兼或"**，如例1.6中的"或"，它不排除今晚既看书又写字这种情况. 另一种是**"排斥或"**，例如"人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛"中的"或"，它表示非此即彼，不可兼得. 运算符号"$\vee$"表示可兼或，排斥或用"$\vee$"上加一横线表示，即"$\overline{\vee}$".

析取符号"$\vee$"是自然语言中的"或""或者"的逻辑抽象，而在自然语言中，"或"是多义的，如表1.4所示.

表 1.4

或的含义		例如		说明
连接词	可兼或	可兼容	今天晚会上我或者唱歌或者跳舞，也可以边唱边跳	两者至少有一个发生，不排斥两者都发生的情况
	排斥或	不可兼容	他下午2:00上街或在教室听课	非此即彼，不可兼
非连接词		去主楼需要6分钟或8分钟		近似"6至8分钟"

4. **蕴含符号 →**

如果P和Q是命题，那么"P蕴含Q"也是命题，记为$P \to Q$，称为**蕴含**(也可写为涵)**式**，读做"P蕴含Q"或"如果P，那么Q"，是典型的因果关系.

运算对象P叫做**前提**、**假设**或**前件**，而Q叫做**结论**或**后件**. 逻辑推理经常用到这种因果关系，蕴含符号定义如表1.5所示. 命题$P \to Q$是假，当且仅当P是真而Q是假. 归纳为条件为真，结论为假时，$P \to Q$为假，其余为真.

表 1.5

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表1.5描述了蕴含运算的真值情况. 经常把"→"(条件命题)简称为**单条件命题**，以区别后面的双条件命题.

例1.5 将下列命题符号化.

(1) P：天不下雨，Q：草木枯黄.

(2) R：G是正方形，S：G的四边相等.

(3) W：桔子是紫色的，V：大地是不平的.

解 (1) 如果天不下雨，那么草木枯黄：$P \to Q$.

(2) 如果G是正方形，那么G的四边相等：$R \to S$.

(3) 如果桔子是紫色的，那么大地是不平的：$W \to V$.

在日常生活中用蕴含式来断言前提和结论之间的因果或实质关系，如例1.7的(1)和(2)，这样的蕴含式叫**形式蕴含**. 然而，在命题演算中，一个蕴含式的前提和结论并不需要有因果和实质联系，这样的蕴含式叫**实质蕴含**，如例1.5(3)中，桔子的颜色和大地的外形之间没有因果和实质关系存在，但蕴含式$W \to V$是真，因为前提是假而结论是真，这就是常说的**"善意推断"**，即条件为假时，条件命题永真. 例如："如果太阳从西边出来，那么每个星期我们就休息5天"，这个命题的前件是假的，无论后面的结论是什么，整个条件命题是真的.

蕴含式$P \to Q$可以用多种方式陈述："若P，则Q""P是Q的充分条件""Q是P的必要条件""Q每当P""P仅当Q"等. 如例1.5(2)中的$R \to S$可陈述为"G是正方形的必要条件是它的四边相等".

给定原命题 $P \to Q$，把 $Q \to P$ 叫做命题 $P \to Q$ 的**逆命题**；$\neg P \to \neg Q$ 叫做命题 $P \to Q$ 的**否命题**；$\neg Q \to \neg P$ 叫做命题 $P \to Q$ 的**逆否命题**. 其中原命题与逆否命题，逆命题与否命题是同真值的，在命题演算中可以互相置换. 例如：

P：如果天下雨，Q：那么地上湿，$P \to Q$（真）

逆命题：如果地上湿，那么天下雨.

否命题：如果天不下雨，那么地上不湿.

这样就不一定为真，也可能是洒水车刚刚过去洒过水了. 但逆否命题"如果地上不湿，那么天没下雨"是真的.

例 1.6　设 P：他有时间，Q：他会帮助你，则 $P \to Q$ 表示命题"如果他有时间，那么他会帮助你". 分析这个命题的真值：

解　(1) 他有时间，他也帮助了你. 这时他兑现了诺言，承诺 $P \to Q$ 为真.

(2) 他有时间，他却没有帮助你. 这时他违背诺言，承诺 $P \to Q$ 为假.

(3) 他没有时间，他帮助了你. 这时他没有违背诺言，承诺 $P \to Q$ 为真.

(4) 他没有时间，他也没有帮助你. 这时他没有违背诺言，承诺 $P \to Q$ 为真.

5. 等价符号 $\leftrightarrow$

如果 P 和 Q 是命题，那么"P 等价于 Q"也是命题，记为 $P \leftrightarrow Q$，称为**逻辑等值式**，读做"P 等价于 Q". 等价符号"$\leftrightarrow$"定义如表 1.6 所示. 归纳为 P,Q 同真、假时，$P \leftrightarrow Q$ 为真，其余为假.

表 1.6 描述了等价运算的真值情况. 经常把"$\leftrightarrow$"简称为**双条件命题**. 把蕴含式和等价式的真值表加以比较，可知，如果 $P \leftrightarrow Q$ 是真，那么 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 俱真；反之，如果 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 俱真，那么 $P \leftrightarrow Q$ 是真. 由于这些理由，$P \leftrightarrow Q$ 也读做"P 是 Q 的充要条件"或"P 当且仅当 Q".

表　1.6

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如，断言"一个数是偶数当且仅当该数能被 2 整除"可表示为 $P \leftrightarrow Q$，其中 P 和 Q 分别表示"一个数是偶数"和"一个数能被 2 整除".

如果 P 和 Q 是命题，复合命题"P 当且仅当 Q"有时简称为双条件命题，且表示为 $P \leftrightarrow Q$.

从以上 5 个定义可看出，数理逻辑符号之真值由其真值表唯一确定，而不由命题的含义确定.

使用以上 5 个数理逻辑符号，可将一些语句翻译成逻辑式. 翻译时为了减少圆括号（一般不用其他括号）的使用，作以下约定，运算符号结合力的强弱顺序为

$$\neg\ ,\ \wedge\ ,\ \vee\ ,\ \to\ ,\ \leftrightarrow$$

凡符合此顺序的，括号均可省去. 相同的运算符号，按从左至右次序计算时，最外层的圆括号可以省去，类似于四则运算中"先乘除，后加减". 例如：

$$(((P \wedge Q) \vee R) \to ((R \vee P) \vee Q))$$

可写成

$$(P \wedge Q \vee R) \to R \vee P \vee Q$$

但有时为了看起来清楚醒目，也可以保留某些原本可省去的括号.

例 1.7　用逻辑符号表达下列命题.

(a) 他既有理论知识又有实践经验.

(b) 说小学生编不了程序，或说小学生用不了个人计算机，那是不对的.

解 (a) 设 P 表示"他有理论知识"，Q 表示"他有实践经验"，则"他既有理论知识又有实践经验"可表示为 $P \wedge Q$.

(b) 设 P:小学生会编程序，Q:小学生会用个人计算机。则上句可表示为 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$.

例 1.8 用逻辑符号表达下列命题：

(1) 如果明天不是雨夹雪，则我去学校.

(2) 如果明天不下雨并且不下雪，则我去学校.

(3) 如果明天下雨或下雪，则我不去学校.

(4) 明天我将雨雪无阻一定去学校.

(5) 当且仅当明天不下雪并且不下雨时，我才去学校.

解 设 P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我去学校，则有：

(1)"如果明天不是雨夹雪，则我去学校"可写成 $(P \wedge Q) \rightarrow R$；

(2)"如果明天不下雨并且不下雪，则我去学校"可写成 $\neg P \wedge \neg Q \rightarrow R$；

(3)"如果明天下雨或下雪，则我不去学校"可写成 $P \vee Q \rightarrow \neg R$；

(4)"明天，我将雨雪无阻一定去学校"可写成

$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$；

(5)"当且仅当明天不下雪并且不下雨时，我才去学校"可写成 $\neg P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$.

三、命题变元和命题公式

通常，如果 P 代表真值未指定的任意命题，就称 P 为**命题变元**，以"真"、"假"为其变化域；如果 P 代表一个真值已指定的命题，就称 P 为**命题常元**，就是 T(1) 和 F(0).

但由于在命题演算中并不关心具体命题的涵义，只关心命题的真假值. 因此，可以形式地定义它们.

单个命题变元和命题常元叫**原子公式**，由以下形成规则生成的公式叫**命题公式**（简称**公式**）.

(1) 单个原子公式是命题公式.

(2) 如果 A 和 B 是命题公式，则 $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 是命题公式.

(3) 只有有限步应用(1) 和(2) 生成的公式才是命题公式.

这种定义叫**归纳定义**，也叫**递归定义**，在第 3 章中将详细讲. 由这种定义产生的公式也叫**合式公式**. 一个命题公式(合式公式）如同一个函数表达式，相当于由命题变元和命题常元取代函数式中的变量和常量，由五个命题逻辑符号取代函数式中的各种运算.

命题公式的真假值一般不能确定. 当命题公式中所有命题变元代以真值（或者说对命题变元赋定确定的真值）后，命题公式就确定了真值，变为了命题. 在不产生混乱时，把命题公式也叫做**命题**.

例 1.9 说明 $(P \rightarrow (P \vee Q))$ 是命题公式.

解 (ⅰ) P 是命题公式	根据(1)
(ⅱ) Q 是命题公式	根据(1)
(ⅲ) $(P \vee Q)$ 是命题公式	根据(ⅰ)(ⅱ) 和(2)
(ⅳ) $(P \rightarrow (P \vee Q))$ 是命题公式	根据(ⅰ)(ⅲ) 和(2)

$\wedge Q$，$(P \rightarrow Q)$，$P \rightarrow \wedge Q$，$((PQ) \wedge R)$ 不是命题公式，因为它们不能由形成规则得出.

为了减少圆括号的使用，以后手写命题公式时，可按过去的约定省略.

对命题公式中的所有命题变元指定一组真值(赋值)，称为对该命题公式的一个**真值指派**，或对命题公式的一种解释；在命题变元赋定一组真值后，命题公式的真值就能确定下来.

例 1.10 用真值表表示命题 $\neg((P \vee Q) \wedge P)$.

解 如表 1.7 所示。

表 1.7

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge P$	$\neg((P \vee Q) \wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

两个命题公式，如果在同一组指派下有相同的真值，则称为**逻辑等价命题**，简称为**等价**. 两个命题公式逻辑等价就是两个命题公式有同样的真值，如同代数式中的恒等关系，习惯上用"$\Leftrightarrow$"表示两个命题公式逻辑等价. 例如，等值可以表示为

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

在逻辑学中没有量(大小)的概念，所以命题公式演算时不能用代数中的"$=$""$\geqslant$""$\leqslant$"等符号.

例 1.11 证明 $P \leftrightarrow Q$ 与 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 是逻辑等价命题.

证明 作真值表如表 1.8 所示.

表 1.8

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

因为后两列的真值完全一致，所以它们是逻辑等价命题.

五种命题数理逻辑符号 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$ 中，常见的是前面三个，后面两个可以用前三个替代，即

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

用真值表(见表 1.9)，仅对单条件命题的变形进行证明.

最后一个双条件命题的结论是很显然的.

表 1.9

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

习题 1.1

1. 判断下列语句是否是命题，若是命题，指出其真值.

(1) 上海位于中国的东部.

(2) $8 < 3$.

(3) 这个命题的真的.

(4) 一个整数为偶数当且仅当它能被 2 整除.

(5) 你说什么?

2. 将下列命题符号化.

(1) 他们明天或后天去看电影.

(2) 他如今不是在上海就是在杭州.

(3) 如果天不下雪和我有时间，那么我就去逛街.

(4) 天正在下雪，我也没有去逛街.

(5) 除非我得到认可，否则我不会告诉你.

(6) 说逻辑学枯燥无味和毫无价值，这是不对的.

(7) 如果你想中奖，你就得买奖票；如果你买了奖票，你一定是想中奖.

(8) 如果我不获得更多帮助，我不能完成这个任务.

3. 否定下列命题.

(1) 每个自然数都是偶数.

(2) 仅当你去我才去.

(3) 只要风调雨顺，农业就能获得丰收.

(4) 张三的每门课程都很优秀.

4. 写出下列命题的逆命题和否命题.

(1) 如果 $a \times b = 0$，则 $a = 0$ 或 $b = 0$.

(2) 如果张三生病了，那么就让李四去出差.

(3) 如果天下雨，我将不去.

5. 设 P 表示命题“他迟到了”，Q 表示命题“他错过了面试的机会”，R 表示“他找到了工作”. 试用陈述句复述下列命题.

(1) $P \rightarrow Q$.

(2) $P \vee Q \vee R$.

(3) $\neg (P \vee Q) \wedge R$.

(4) $P \leftrightarrow Q$.

(5) $(P \wedge Q) \rightarrow \neg R$.

6. 构造下列公式的真值表：

(1) $P \vee Q \wedge R$.

(2) $P \wedge Q \wedge R \vee \neg ((P \vee Q) \vee (P \vee S))$.

(3) $(\neg (P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \vee \neg R) \wedge S)$.

(4) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com