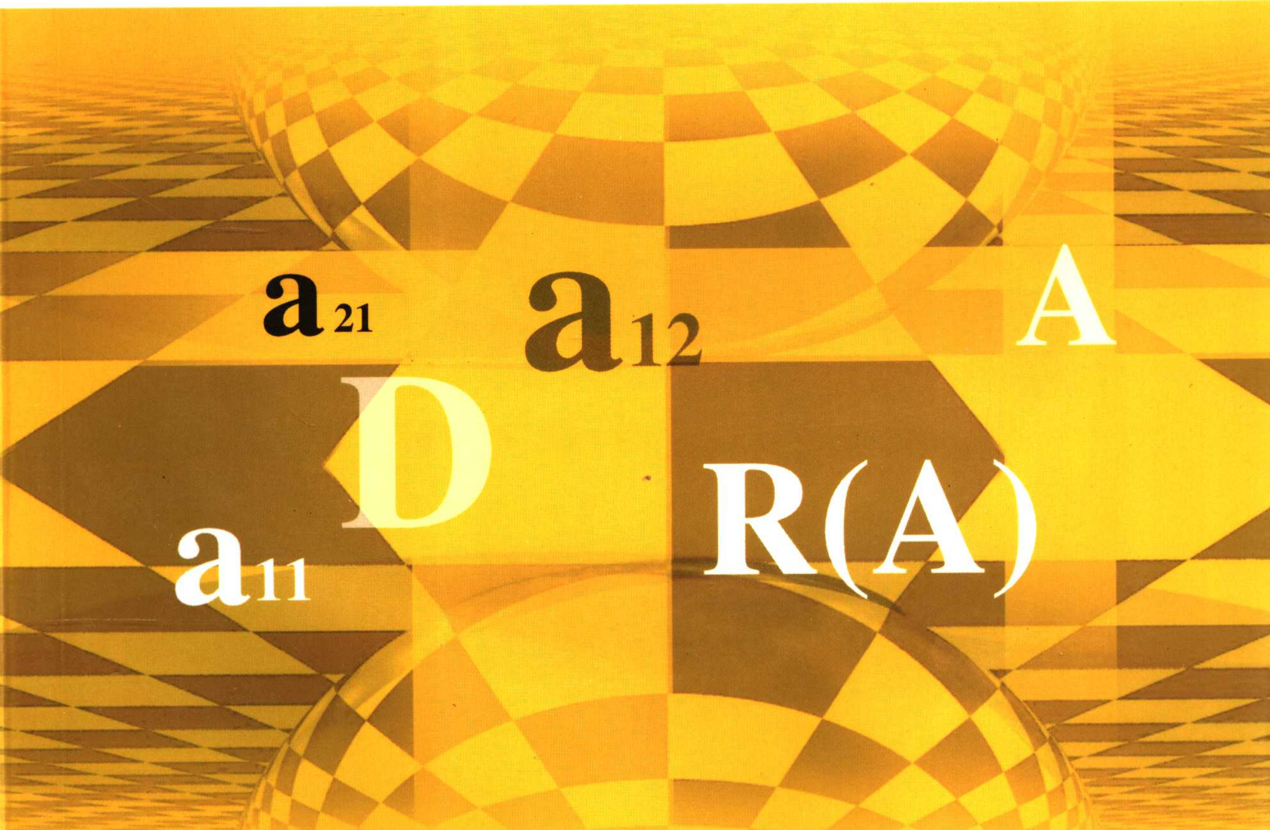
21世纪高等学校经济数学教材

线性代数

◆ 费伟劲 主编
◆ 梁治安 主审



复旦大學 出版社

21 世纪高等学校经济数学教材

线性代数

主编　费伟劲
主审　梁治安

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/费伟劲主编. —上海:复旦大学出版社,2007.1
(21世纪高等学校经济数学教材)
ISBN 978-7-309-05314-2

Ⅰ.线… Ⅱ.费… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第162580号

线性代数
费伟劲 主编

出版发行 复旦大學 **出版社** 上海市国权路579号 邮编200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 梁 玲
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海华文印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 16.75
字 数 300千
版 次 2007年1月第一版第一次印刷
印 数 1—5 100

书 号 ISBN 978-7-309-05314-2/O·386
定 价 25.00元

内 容 提 要

本书由上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写，系高等经济管理类院校使用的经济数学系列教材之一.

全书共分 7 章：行列式，矩阵，向量空间简介，线性方程组，矩阵的特征值问题，二次型，MATLAB 软件及投入产出模型简介. 本书科学、系统地介绍了线性代数的基本内容，重点介绍了线性代数的方法及其在经济管理中的应用，每章均附有习题，书末附有习题的参考答案或提示.

本书可作为高等经济管理类院校的数学基础课程教材，同时也适合财经类高等教育自学考试、各类函授大学、夜大学使用，也可作为财经管理人员的学习参考书.

前　言

为适应我国高等教学的飞速发展和数学在各学科中更广泛的应用，根据高等教育面向21世纪发展的要求，上海财经大学应用数学系、上海金融学院应用数学系、上海商学院基础教学部教师合作编写了“21世纪高等学校经济数学教材”——《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》.

针对使用对象的特点，结合作者多年的教学实践和教学改革的实际经验，在这套系列教材的编写过程中，我们注重了以下几方面的问题：

1. 适应我国在21世纪经济建设和发展的需要，着眼于培养“厚基础，宽口径，高素质”的财经人才，注重加强基础课程，特别是数学基础课程.

2. 作为高等经济管理类院校数学基础课程的教材，在注意保持数学学科本身结构的科学性、系统性、严谨性的同时，力求深入浅出，通俗易懂，突出有关理论、方法的应用和简单经济数学模型的介绍.

3. 注意培养学生的学习兴趣，扩大学生的视野，使学生了解线性代数创立发展的背景，提高学生对数学源流的认识，在每章后附有数学家简介或介绍该章节的数学背景，介绍在数学创立发展的过程中作出过伟大贡献的著名数学家.

4. 注意兼顾经济管理学科各专业学生，既能较好地掌握所学知识，又能满足后继课程及学生继续深造的需要. 为此，将线性代数习题分为两部分，习题(A)为基础题，习题(B)为提高题.

参加《线性代数》一书编写的有上海财经大学应用数学系顾桂定教授(第一、二章)，及张远征副教授(第五、六章)，上海商学院基础教学部费伟劲副教授(第三、七章)，上海金融学院应用数学系洪永成老师(第四章)，最后由费伟劲对全书进行了统稿.

在本教材编写过程中，我们得到了上海财经大学、上海金融学院、上海商学院的重视和支持，并得到了复旦大学出版社的鼎力相助，特别是范仁梅老师的认真负责，在此一并致谢.

限于学识与水平，本书的缺点与错误在所难免. 恳请专家和读者批评指正.

编者

2007年1月

目 录

第一章 行　列　式

行列式是在线性方程组的研究中引进的概念. 目前更多地成了研究矩阵性质的一个重要工具. 在本章中,我们介绍一般 n 阶行列式的定义及其一些基本性质,行列式展开定理. 最后是著名的 Cramer 法则. 本章的重点是行列式的计算和 Cramer 法则;难点是一般 n 阶行列式的计算. 一般而言,对于四阶或以上阶的行列式,首先都要利用行列式性质化其至某些容易计算的具有特殊结构的行列式,或展开成低阶行列式再进行计算.

§1.1　n 阶行列式

一、二阶和三阶行列式

由 $2^2=4$ 个数,按下列形式排成 2 行 2 列的方阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称为二阶行列式,其定义为一个具有 2!项的代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

其中 a_{ij} 称为行列式的**元素**,每个元素有两个足标,第 1 个足标 i 表明它所在行的行数;第 2 个足标 j 表明它所在列的列数.

二阶行列式(1.1)的右端又称为行列式的展开式,二阶行列式的展开式可以用所谓**对角线法则**得到,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$
$$(-)\qquad\qquad(+)$$

其中实线称为行列式的主对角线；虚线称为行列式的次对角线. 主对角线上两个元素的乘积带正号；次对角线上两个元素的乘积带负号，所得 2！=2 项的代数和即为二阶行列式的展开式.

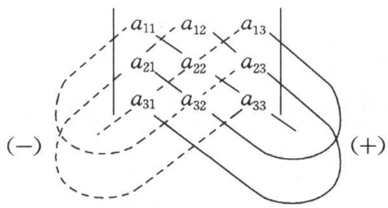
例 1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 0-(-2)\times 3=6.$$

类似地，由 $3^2=9$ 个数按下列形式可组成 3 行 3 列的三阶行列式，其定义为一个具有 3!项的代数和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.2}$$

三阶行列式的展开式也可以用**对角线法则**得到，为方便记忆用下图表示：



其中沿主对角线方向的每条实线上 3 个元素的乘积带正号；沿次对角线方向的每条虚线上 3 个元素的乘积带负号，所得 3！=6 项的代数和即为三阶行列式的展开式.

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\times(-5)\times(-1)+0\times 0\times 1+1\times 2\times 1-1\times(-5)\times 1-0\times 1\times(-1)-3\times 2\times 0$$
$$=15+0+2-(-5)-0-0=22.$$

例3 λ 满足什么条件时,行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$.

解 $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1)\lambda + 4\times3\times0 + (-1)\times0\times1 - (-1)\cdot(\lambda+1)\cdot0 - 4\times1\cdot\lambda - (\lambda-2)\cdot0\times3$$

$$= \lambda[(\lambda-2)(\lambda+1)-4] = \lambda(\lambda-3)(\lambda+2) = 0,$$

故当 $\lambda = 0$, 或 $\lambda = 3$, 或 $\lambda = -2$ 时,行列式等于零成立.

为引出一般 n 阶行列式的定义,我们先介绍有关排列与逆序等概念.

二、排列与逆序数

定义 1.1 由前 n 个自然数 1, 2, …, n 组成的有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$,称为一个 **n 级排列**,其中 p_i 为 1, 2, …, n 中的某个数,i 表示这个数在 n 级排列中的位置.

如 1, 2, 3 三个自然数,213 是一个三级排列,此时 $p_1=2$, $p_2=1$, $p_3=3$; 312 也是一个三级排列,此时 $p_1=3$, $p_2=1$, $p_3=2$. 值得指出的是上述定义中的"有序"两个字,123 和 213 是两个不同的排列;而 31524 则是一个五级排列.

根据定义 1.1,显然,所有 n 级不同排列的总数是 $n(n-1)\cdots2\cdot1 = n!$.

定义 1.2 在一个排列中的两个数,如果排在前面的数大于排在后面的数,则称它们构成一个**逆序**;一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**. n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如,三级排列 231,由于 2 与 1 构成一个逆序,3 与 1 也构成一个逆序,故 $\tau(231) = 2$.

定义 1.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例4 计算 $\tau(32415)$ 和 $\tau(31425)$.

解 在五级排列 32415 中,有逆序(3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1),所以 $\tau(32415) = 4$. 这是一个偶排列.

在排列 31425 中,有逆序(3, 1), (3, 2), (4, 2),所以 $\tau(31425) = 3$. 这是一个奇排列.

例 5 试求 $\tau(12\cdots n)$ 和 $\tau(n(n-1)\cdots 21)$.

解 很明显，在 n 级排列 $12\cdots n$ 中没有逆序，所以 $\tau(12\cdots n)=0$，这是一个偶排列，它具有自然顺序，故又常称为自然排列.

在 n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中，只有逆序没有顺序，由等差数列求和公式易得

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

该排列的奇偶性与 n 的取值有关，当 $n=4k$，或 $n=4k+1$（k 是非负整数）时，是偶排列；否则为奇排列.

定义 1.4 把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动就得到另一个排列. 这样一个变换称为一个**对换**.

我们注意到，在例 4 中，32415 是偶排列，经互换 2 与 1 的位置，得到排列 31425. 而 $\tau(31425)=3$，故排列 31425 是奇排列. 事实上，这里蕴藏着一个一般性的规律.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证明 首先考虑相邻两数的对换的情形. 设排列

$$a_1\cdots a_s pqb_1\cdots b_t \tag{1.3}$$

经过 p，q 对换变成

$$a_1\cdots a_s qpb_1\cdots b_t. \tag{1.4}$$

显然，在排列(1.3)，(1.4)中 p 或 q 与前面和后面的各数所构成的逆序都相同，不同只是 p，q 的次序. 如果(1.3)中 p，q 构成一个逆序，则经过对换，排列(1.4)比排列(1.3)的逆序数减少一个；如果(1.3)中 p，q 不构成一个逆序，则经过对换，排列(1.4)比排列(1.3)的逆序数增加一个. 不论增加 1 还是减少 1，排列(1.3)与(1.4)的逆序数的奇偶性肯定不同了.

再考虑不相邻两数的对换的情形. 设排列

$$a_1\cdots a_s pc_1\cdots c_r qb_1\cdots b_t \tag{1.5}$$

经过 p，q 对换变成

$$a_1\cdots a_s qc_1\cdots c_r pb_1\cdots b_t. \tag{1.6}$$

不难看出，该对换可以通过若干次相邻两数的对换来实现. 譬如先把排列(1.5)经过 $r+1$ 次相邻两数的对换变成

$$a_1\cdots a_s c_1\cdots c_r qpb_1\cdots b_t. \tag{1.7}$$

再把排列(1.7)经过 r 次相邻两数的对换变成(1.6). 于是,总共进行了 $2r+1$ 次相邻两数的对换,把排列(1.5)变成了排列(1.6),$2r+1$ 是奇数. 前面已证明,相邻两数的一个对换改变排列的奇偶性,因而奇数次相邻两数的对换改变排列的奇偶性. ▌

定理 1.2 全部 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中奇偶排列各占一半,且为$\frac{n!}{2}$个.

证明 设全部 n 级排列中有 s 个奇排列和 t 个偶排列,则 $s+t=n!$. 把每个奇排列的最左边的两个数对换,由定理 1.1 可知 s 个奇排列都变成偶排列,且它们彼此不同,所以 $s\leqslant t$;把每个偶排列的最左边的两个数对换,同理可得 $t\leqslant s$,故必有 $s=t=\frac{n!}{2}$. ▌

如三级排列中,在所有 $3!=6$ 种排列中,有奇排列 3 个:321, 213, 132;偶排列 3 个:123, 231, 312.

三、n 阶行列式的定义

为简单起见,在本章中我们总是在实数域 R 上讨论问题. 事实上,所有后面的定义、定理都可相应地推广到复数域 C 上.

为了引出一般 n 阶行列式定义,我们先来考察三阶行列式定义(1.2)中右端代数和的特征:

(1) 共有 $3!=6$ 项相加,其最后结果是一个数值;

(2) 每项有 3 个数相乘:$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,而每个数取自不同行不同列,即行足标固定为 123,列足标则是 1, 2, 3 的某个排列 $p_1p_2p_3$;

(3) 每项的符号由列足标排列 $p_1p_2p_3$ 的奇偶性决定,即 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 项前的符号是$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

故三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}, \tag{1.8}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对所有不同的三级列足标排列 $p_1p_2p_3$ 的对应项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 求和,共有 $3!$项.

类似地,我们可以给出一般 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由 n^2 个数组成的 n 行 n 列的 n 阶行列式定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \tag{1.9}$$

其中 $\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对所有不同的 n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的对应项 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 求和，共有 $n!$项. n 阶行列式一般可记作 D_n 或 D；有时也可记作 $\det(a_{ij})$或$|a_{ij}|$.

特别地，一阶行列式$|a_{11}|$就是数 a_{11}.

显然，n 阶行列式的定义中，其展开式具有类似于三阶行列式的 3 项特征，即

(1) 共有 $n!$项相加，其最后结果是一个数值；

(2) 每项有 n 个数相乘：$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$，而每个数取自 n 阶行列式的不同行不同列，且行足标固定为自然排列 $12\cdots n$，列足标则是 n 级排列中的某个排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$；

(3)每项的符号由列足标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的奇偶性决定，且 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 项前的符号是$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)}$. 由定理 1.2 知，其中带正号和负号的项各占一半.

例 6 利用行列式的定义证明

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

证明 由定义

$$D_4 = \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}.$$

它共有 4!项代数和，其中含有零因子的项一定为零，可以不必考虑，所以只需考虑可以不为零的项. 在这样的项中，必然有一个因子来自第 1 行(因为 $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$)，只能是元素 a_{11}；必然有一个因子来自第 2 行，有元素 a_{21}，a_{22}可供选择，但元素 a_{21}与元素 a_{11}同在第 1 列，不会乘在一起，从而只能是 a_{22}；必然有一个因子来自第 3 行，有元素 a_{31}，a_{32}，a_{33}可供选择，但元素 a_{31}与元素 a_{11}同在第 1 列，不会乘在一起，元素 a_{32}与元素 a_{22}同在第 2 列，不会乘在一起，只能是 a_{33}；必然有一个因子来自第 4 行，有元素 a_{41}，a_{42}，a_{43}，a_{44}可供选择，但元素 a_{41}与元素 a_{11}同在第 1 列，不会乘在一起，元素 a_{42}与元素 a_{22}同在第 2 列，不会乘在

一起，元素 a_{43} 与元素 a_{33} 同在第 3 列，不会乘在一起，只能是 a_{44}. 这说明可以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 这一项，由于该项列足标排列的逆序数 $\tau(1234)=0$，所以 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 项前面应取正号，因此

$$D_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

例 6 的结论可推广到一般 n 阶下**三角行列式**的计算：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 7 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3\times4\times(-1)\times1=-12.$

例 8 已知 $a_{12}a_{3i}a_{61}a_{5j}a_{43}a_{25}$ 是 6 阶行列式中带负号的一项，则 i，j 应取何值.

解 由 $a_{12}a_{3i}a_{61}a_{5j}a_{43}a_{25}=a_{12}a_{25}a_{3i}a_{43}a_{5j}a_{61}$，而 i，j 只能在 4 和 6 中取值. 当 $i=4$，$j=6$ 时，列足标排列是 254361，是偶排列，取正号；故应取 $i=6$，$j=4$，此时列足标是一奇排列 256341，取负号.

在 n 阶行列式的定义 1.5 中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素的行足标按自然顺序排列起来. 事实上，数的乘法是可以交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意写的，我们同样也可以将各项的列足标按自然顺序排列. 于是，n 阶行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}. \tag{1.10}$$

下面我们来证明(1.10)式与定义(1.9)式是等价的.

也就是要证明 $\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

交换等式左端和式中各项 $a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 的乘积因子 a_{q_ii} 的位置，使得

$$a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}=a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

我们假设这些因子经过 m 次的位置对换而完成. 于是排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 经 m 次对换成自然顺序排列 $12\cdots n$;与此同时排列 $12\cdots n$ 经同样的 m 次对换成排列 $p_1p_2\cdots p_n$. 由定理 1.1 知,排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 与排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 具有相同的奇偶性. 于是

$$\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \quad \blacksquare$$

事实上,n 阶行列式更一般的定义是:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \tag{1.11}$$

§1.2 行列式的基本性质

当行列式的阶数 n 较大时,直接用行列式的定义去计算行列式的值是一件很困难的事. 以计算一个 18 阶行列式为例,要做乘法运算 $18!\approx 6.4\times 10^{15}$ 次以上,如果用每秒可进行 1 000 万次乘法的计算机去算,也得要花 20 年左右时间. 在本节中介绍的行列式的基本性质,不仅可以用来简化行列式的计算,而且还能在行列式的理论研究中发挥重要作用.

行列式 D 的行与列对应互换后得到的行列式称为 D 的**转置行列式**,记作 D^{T},即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$