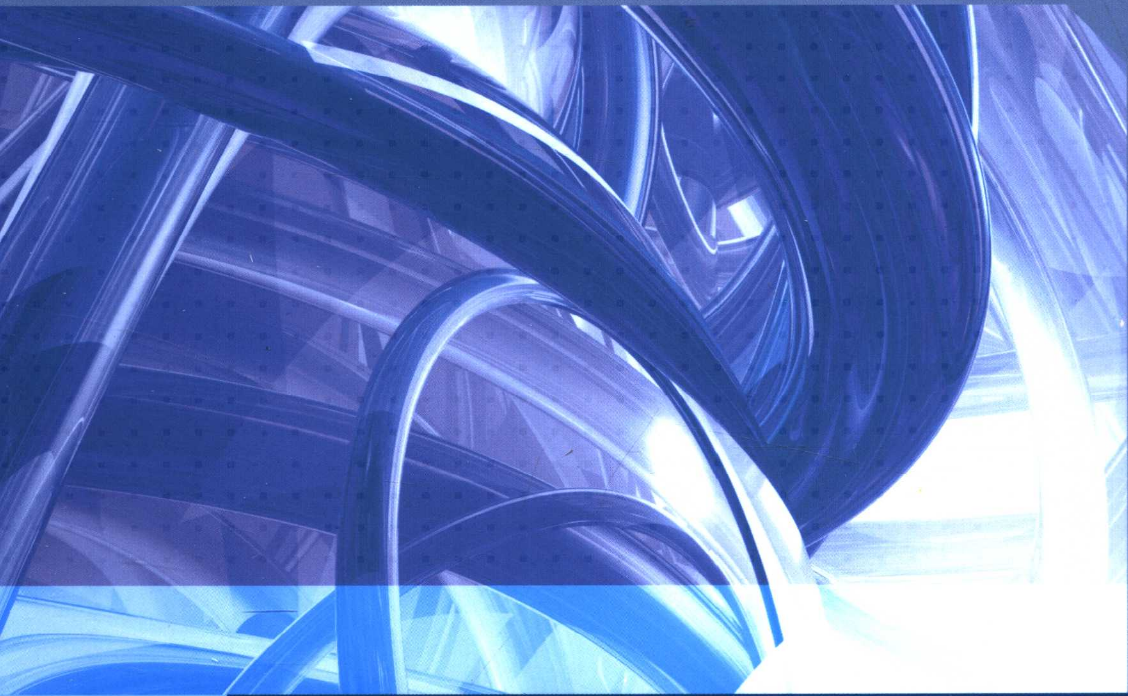
普通高等教育“十一五”国家级规划教材



数学物理方法

周明儒 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学物理方法

周明儒　编著

高等教育出版社

内容简介

本书紧密结合物理教学实际，阐述简明，条理清晰，着力揭示数学概念和方法的物理背景，注意介绍必要的理论。例题和习题切合物理专业学生的特点和需要，突出解题方法。书中将复变函数和数学物理方程的基础知识作为教学的基本内容，一些扩展的或较深的知识（包括张量）作为选学内容。该书重视数学科学精神和思想方法的熏陶，将16个阅读材料作为教材的有机组成部分，其中包括对复变函数理论和数学物理方程创立过程的介绍，以及对13位著名数学家的简介，供学生自己阅读思考。同时注意学习方法的提示或示范。本书可供物理类专业本科教学使用，也可作为电子工程、信息与计算科学等专业的教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法/周明儒编著.—北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022618-8

Ⅰ.数… Ⅱ.周… Ⅲ.数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第176944号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 王文颖　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 宗小梅
版式设计 马敬茹　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2008年1月第1版
印　　张	19	**印　　次**	2008年1月第1次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	23.90元

物料号　22618-00

前　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是作者在20多年前编写的《数学物理方法》一书的基础上，总结近20多年来的教学实践，并对不同类型高校的数理方法教学情况进行调研之后编写的。可作为物理类专业本科数学物理方法课程的教材，也可作为电子工程、信息与计算科学等专业的教材。

物理学中的数学方法包含了极其丰富的内容，但作为物理类专业基础课之一的数学物理方法，其主要目的是为学生进一步学习电动力学、量子力学等理论物理课程提供必要的数学基础，并为学生进一步深造创造条件。考虑到当前本课程大都不超过72学时，以及不同院校学生的不同情况，我们将复变函数和数学物理方程的基础知识作为教学的基本内容，放在第一篇和第二篇中用宋体字排印；一些扩展的或较深的知识作为选学内容，用楷体字排印。选学内容有些散见于第一篇和第二篇中，而保角映射、变分法和张量等则集结为第三篇。选学内容供任课教师视情况取舍，也可留给有兴趣、有余力的学生自学。张量在力学和物理学中有着广泛的应用，我们根据教学需要作了介绍。

本书紧密结合物理教学实际，力求阐述简明，条理清晰，着力揭示数学概念和方法的物理背景，注意介绍必要的理论。例题和习题切合物理专业学生的特点和需要，突出解题方法。对一些不便介绍的理论与证明，也指出了作者认为写得较好或者较易看懂的参考书和章节，以利学有余力的学生进行自学和研究。

教材注意演绎与归纳的有机结合，如分离变量法，先对混合问题的简化作演绎处理，然后在按本征函数展开及分离变量法的理论基础中归纳总结。对于教学中的一些难点，根据不同情况作了处理，例如，将多值函数的支点和黎曼面归入选学内容；将特殊函数难点分散，逐步解决：先在常微分方程解析理论中引出一些特殊函数，使学生通过例题和习题了解、熟悉它们的一些性质，然后在介绍球函数和柱函数时，一气呵成地将亥姆霍兹方程分离变量并给出一般解，进而再通过求解实际问题加深学生对特殊函数的了解。

在教学实践中我们认识到，在传授数学知识的同时，应当重视数学科学精神和思想方法的熏陶，因此我们将16个阅读材料作为整个教材的有机组成部分。其中包括对复变函数理论和数学物理方程创立过程的简要介绍，以及对13位著名数学家的简介，供学生自己阅读思考，使他们对学科建立的背景与前人艰辛开拓、不断进取的精神有一个粗略的了解；对一些著名数学家的生平、成就、思想和

人品有一点立体的感受，不仅知其名，也能知其人。阅读这些材料将有助于学生加深对书中出现的大量人名、公式、定理的理解和认识。此外，我们在教材的正文和习题中也注意了学习方法的提示或示范；将第二篇的小结作为一个阅读材料供学生参考；书末还专门附了一个索引，以便于学生复习和查阅。

教学实践表明，讲授本书的基本内容约需 72 学时（内含习题课 12 学时）。书中例题较多，有的可作为习题课的内容。对于只有 54 课时的学校，可以根据本专业的教学要求对教材内容作适当处理，例如解析开拓、应用留数计算定积分、球面平均法和泊松公式、分离变量法的理论基础、柱函数、拉普拉斯变换等内容，有的可作简要介绍，有的可以不讲。

书中定义、定理、推论和注，均在各章按序编号，如：定理 2.5 表示第 2 章第 5 个定理；习题编号与章节一致，如习题 1.3 表示§1.3 的习题；为了行文的简洁和教学的方便，公式均在每一节按序编号，当需引用其他章节的公式时再按通常的记法写出章与节的序号，如：(6.1.3)表示§6.1 中(3)式。

本书在 1982—1985 年间的编写过程中，得到了复旦大学李大潜、南开大学潘忠诚、山东师范大学梁尚志、南京师范大学邹庭桂、徐州师范学院苏耀中、吴报强等教授的热情指导和帮助。在这次编写过程中，我征求过 10 所院校 30 多位同行的意见，今年 2 月将初稿印出后，我一边在本校物理系讲授，一边广泛征求意见。徐州师范大学石开屏、狄尧民、苏简兵教授，东南大学王明新教授，上海交通大学纪志刚教授，淮阴师范学院朱汉清、孙智宏教授等又提供了十分宝贵的意见、建议和帮助。徐州师范大学教务处、数学科学学院和物理与电子工程学院的领导和老师们给予了大力支持和热情帮助；物理系的历届学生在他们的学习过程中甚至在毕业后，也提出过不少好的意见和建议。在此向这些老师和同学一并表示衷心的感谢！

本书在编写中参考了国内外不少优秀的教材和专著，从中得到启发和教益，谨向这些作者深表谢意。

本书在编写中也得到了高等教育出版社高等理工出版中心数学分社的大力支持和帮助，在此谨向数学分社，向李艳馥、马丽、王文颖等同志表示诚挚的感谢！

由于作者水平的限制，书中难免有缺点甚至错误，敬请读者们批评指正。

周明儒

2007 年 8 月 8 日

目　录

第一篇　复变函数论

第二篇 数学物理方程

第三篇 选学内容

第一篇　复变函数论

复变函数的理论,在流体力学、空气动力学、热力学、电磁学、弹性理论、理论物理、天体力学等学科中有着广泛的应用.本篇介绍复变函数理论的一些基本、常用的知识,这些知识既是学习物理所需要的,也是学习第二篇数学物理方程的基础.

第一章 解析函数

复变函数理论研究的主要对象是解析函数. 本章先简要回顾复数及其运算，再介绍复变函数和解析函数的概念以及函数解析的条件，然后给出一些常用的初等解析函数，并以平面场的复势为例，说明解析函数的一个应用.

§1.1 复数及其运算

一、基本概念

方程 $x^2+1=0$ 没有实数解，人们引进了**虚数单位** $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，称形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数为**复数**，其中 x 和 y 是实数. x 称为复数 z 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}\,z$；y 称为复数 z 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}\,z$. 实部为 0，虚部不为 0 的复数，称为**纯虚数**；而虚部为 0 的复数就是实数.

如果两个复数 z_1 和 z_2 的实部和虚部分别相等，则称它们相等，记为 $z_1=z_2$.

一个复数对应一对实数 (x,y)，从而可以和平面上坐标为 (x,y) 的点相对应(图 1.1). 由于 x 轴上的点对应实数，故称它为**实轴**；y 轴上除去原点的点对应纯虚数，故称它为**虚轴**，这样的平面称为一个**复平面**. 全体复数可以和复平面上的点建立一一对应的关系.

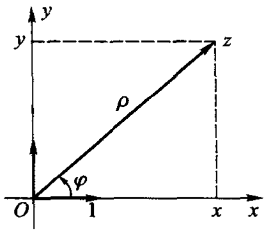


图 1.1

在复平面上，一个复数也对应了一个从坐标原点到点 (x,y) 所引的向量，进而可以将全体复数作为一个以实数为分量的二维向量空间，并借助复数来研究二维向量场.

如图 1.1，设 x 轴正向到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的夹角为 φ，$\overrightarrow{Oz}$ 的长度 ρ 称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$，则有

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\mathrm{Re}\,z=x=\rho\cos\varphi,$$
$$\mathrm{Im}\,z=y=\rho\sin\varphi.$$

从而复数除了可用代数式 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示外，还有三角表示式：

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi).$$

利用著名的欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi,$$

即得复数的指数表示式：

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

实轴的正向到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的夹角 φ 称为复数 z 的**辐角**(argument)，记为 $\mathrm{Arg}\,z$，它可以有无穷多个值，其中每两个值相差 2π 的整数倍，但只有一个值满足条件 $0\leqslant\arg z<2\pi$（或取 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$），称它是**辐角的主值**，记为 $\arg z$. 于是

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi\quad(k\text{ 为整数}).$$

$z=0$ 时辐角无意义.

复数 $z=x+\mathrm{i}y=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 和 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ 互为**共轭复数**. $\bar{z}$ 也常记为 z^*.

二、运算公式

设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k=\rho_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}\ (k=1,2)$，则有

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0),$$

$$z^n=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

复数的加减乘除运算和实数运算一样满足交换律、结合律、分配律.

注意到复数相加与向量相加的规律是一致的，而力、速度、加速度等物理量可以用向量来表示，因此也就可以用复数来表示这些物理量.

有关共轭复数和模的运算有下列公式：

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z=2x;$$

$$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,z=2\mathrm{i}y;$$

$$z\bar{z}=|z|^2=\rho^2=x^2+y^2;$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\quad\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\quad\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\quad(\text{三角形不等式}).$$

此外，由模的定义，显然有 $|x+\mathrm{i}y|\leqslant|x|+|y|$.

三、扩充复平面与复球面

和数轴上的实数不同，复平面上的复数可以沿着任意方向趋向于无穷远. 人们借鉴制作地图的测地投影法，将复平面上的点与球面上的点建立起对应关系，引进了无穷远点，建立了扩充复平面的概念.

如图 1.2 所示，球面与复平面相切于原点 O，过 O 的直径的另一端点 N 为北极，O 为南极. 设 z 是复平面上的任意一点，N 与 z 的连线交球面于点 P，令 P 与 z 相对应，则除去一点 N 后的球面就与复平面上的点之间建立了一一对应. 复平面上以原点为中心的一个圆周 C，就和球面上的一个圆周 Γ（纬线）相对应. 当点 z 沿射线 OA 趋于无穷远处时，其对应点 P 则沿大圆弧 OPN 趋于 N，从而，圆周 C 的半径越大，圆周 Γ 就越趋于北极 N. 因此北极 N 可以看做是与复平面上的一个模为无穷大、辐角不定的假想点相对应，这个假想点称为**无穷远点**，记作 ∞. 加上了无穷远点的复平面称为**扩充复平面**，与它对应的球面称为**复球面或黎曼球面**.

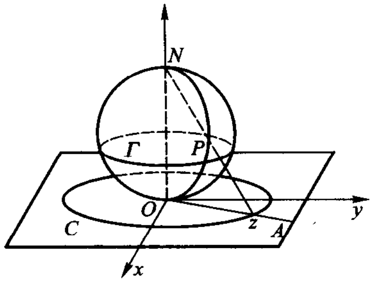


图 1.2

习题　1.1

1. 将下列复数分别用三角式和指数式表示出来：

(1) i；　(2) -1；　(3) $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$；　(4) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$；　(2) $\dfrac{a+b\mathrm{i}}{a-b\mathrm{i}}$.

3. 画出下列各式表示的几何图形：

(1) $\mathrm{Re}\, z=-2$；　(2) $|z|=1$；　(3) $-1<\mathrm{Im}\, z\leqslant 1$；

(4) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$；　(5) $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$.

4. 说明 $z-z_0=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 的几何意义，这里 z_0 是一复数，R 为一正数，$0\leqslant\varphi<2\pi$.

5. 说明以 $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 去乘复数 z 的几何意义.

6. 指出 $z^4+1=0$ 的哪几个根所对应的点在上半平面？

7. 已知流体在点 P 的速度 $v=-1+\mathrm{i}$，求其大小和方向.

8. 利用几何方法证明关于复数模的三角形不等式.

§1.2 复变函数

一、区域及有关概念

平面上一点 P 的一个 ε **邻域**,是指所有与点 P 的距离小于 ε 的点的集合;若点 P 属于点集 E,且 P 有一邻域全含于 E 内,则称 P 是 E 的一个**内点**;全部由内点组成的点集叫做**开集**.若点 P(不必属于 E)的任一邻域内都有 E 的无穷多个点,则称 P 是 E 的一个**聚点或极限点**;若 $P\in E$ 又不是 E 的聚点,则称 P 为 E 的**孤立点**;若点 P 的任一邻域内都既有属于 E 的点又有不属于 E 的点,则称 P 是 E 的一个**边界点**,E 的全部边界点组成的集合称为 E 的**边界**,常记为 ∂E.

如果点集 E 的任意两点均可用一条全在 E 中的折线连接起来,则称 E 为**连通集**;连通的开集称为**区域**.

在复平面上,$|z|<R$ 表示所有与原点的距离小于 R 的点集,即以原点为中心、R 为半径的圆域(又称圆盘)(图 1.3a).$|z-z_0|<R$ 则为以 z_0 为中心、R 为半径的圆盘.$0<a<|z-z_0|<b$ 表示以 z_0 为中心,半径分别为 a 和 b 的两个圆周所围成的环域(图 1.3b).若 $a=0$,则称 $0<|z-z_0|<b$ 为点 z_0 的一个**去心邻域**.

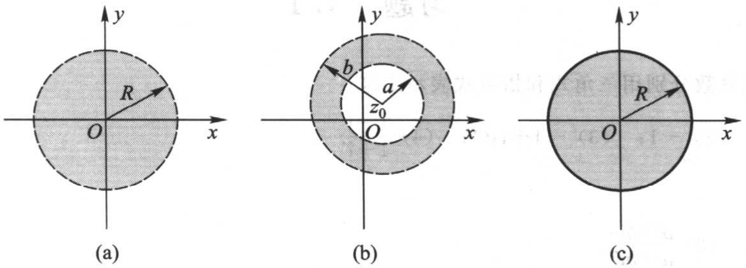


图 1.3

区域 D 与其边界 B 的并集称为**闭区域**,通常记为 $\overline{D}=D+B$.例如,上述环域的边界由两个圆周 $|z-z_0|=a$ 与 $|z-z_0|=b$ 组成;$a\leqslant|z-z_0|\leqslant b$ 是一个闭圆环;而 $|z|\leqslant R$ 则为一闭圆盘(图 1.3c).

在区域 D 内,如果任一自身不相交的连续闭曲线(即**简单闭曲线**),都可在 D 内经过连续变形而收缩为一点,则称 D 为**单连通区域**(“无洞”的区域),否则称为**复连通区域**(“有洞”的区域).例如圆盘是单连通区域,圆环和点 z_0 的去心邻域都是复连通区域.

二、复变函数

设 E 是复平面上的一个点集，若对 E 中每个复数 z，按照一定的法则，有一个或多个复数 w 与之对应，则称在 E 上定义了一个复变函数，记作

$$w=f(z).$$

E 叫做该函数的定义域，它通常为区域. w 值的全体称为该函数的值域.

若自变量 z 的每一个值只有一个 w 值与之对应，则称此函数为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 今后如不声明，均指单值函数.

因为复数 z 相当于一对实数 (x,y)，$w=f(z)$ 是复变数 z 的函数，实际上也就是实变数 x,y 的函数：

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

即复变函数可以归结为一对实二元函数.

(1) 实函数中的许多定义可以直接移植到复函数中来. 例如：

极限　设 $w=f(z)$ 在点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点，a 是一个复常数. 如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $z\in E$ 且 $0<|z-z_0|<\delta$，就有 $|f(z)-a|<\varepsilon$，则称当 z 沿 E 趋于 z_0 时，$f(z)$ 有极限 a，记作

$$\lim_{z\to z_0,z\in E} f(z)=a.$$

在不会产生混淆的情况下，上面的极限式中可以省去 $z\in E$.

应当特别强调的是，在复平面上，点 z 可以从四面八方沿着不同的路径趋于 z_0，即所谓“全面极限”. 而对于一元实函数的极限来说，$x\to x_0$ 只需 x 沿 x_0 的左右两个方向趋于它. 因此复变函数极限存在的条件要比一元实函数苛刻得多，这是复变函数理论与微积分不同的根源.

连续　设 $w=f(z)$ 在点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点且 $z_0\in E$，若

$$\lim_{z\to z_0,z\in E} f(z)=f(z_0),$$

则称 $f(z)$ 在 z_0 连续.

(2) 复函数的许多性质可以通过实函数来表达. 例如：

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a+ib$　等价于 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=a$，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=b$.

$f(z)$ 在 z_0 连续等价于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

(3) 复函数与实函数具有一些相似的性质. 例如：

连续函数的和、差、积、商(分母不为 0)及其复合仍然连续.

有界闭域 D 上的连续函数 $f(z)$，必在 D 上一致连续，且 $|f(z)|$ 有最大值、最小值.

但是，应当强调指出，复函数与实函数有着质的区别，它有实函数所不具有

的许多性质.例如,实函数有一阶导数未必有二阶导数,而在§2.3我们将看到,复变函数如在某个区域内有一阶导数,则有任意阶导数.复变函数的特殊性正是我们应当特别注意并要着重研究的.

§1.3 解析函数

一、导数

定义 1.1 设 $w=f(z)$ 定义于区域 D, $z_0\in D$,若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,其值有限,则称 $f(z)$ 在点 z_0 **可导(或可微)**.这个极限值称为 $f(z)$ 在点 z_0 的**导数**,记作 $f'(z_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$.

注意,上述定义中 $\Delta z\to 0$ 的方式是任意的,即当 z 在复平面上不论以何种方式趋于 z_0 时,都要求 $\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ 恒趋于同一个有限的极限.

与实函数一样,$f(z)$ 在点 z 可导必在点 z 连续,但反之不真.例如,函数 $f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处连续但处处不可导.事实上,因为

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{z}+\overline{\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z},$$

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\begin{cases}1, & \Delta y=0,\\ -1, & \Delta x=0,\end{cases}$$

当 $\Delta z\to 0$ 时没有极限.

因为复变函数的导数定义与一元实函数的导数定义在形式上完全相同,而且复函数与实函数的极限运算法则也相同,因此**实函数中关于和、差、积、商、复合函数、反函数等求导法则和公式可用于复函数**.

二、解析函数的定义

定义 1.2 若函数 $f(z)$ 在区域 D 的每一点处均可导,则称 $f(z)$ **在 D 内解析**,或称 $f(z)$ 是 D 内的**解析函数**.$f(z)$ **在点 z_0 解析**,是指 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内解析.$f(z)$ **在闭域 $\overline{D}$ 上解析**,是指 $f(z)$ 在包含 $\overline{D}$ 的某个区域内解析.

解析函数也称为**全纯函数**或**正则函数**.

注 1.1 *$f(z)$ 在点 z_0 可导未必在该点解析.例如,不难证明 $f(z)=|z|^2$ 在*