



丘成桐主编
数学翻译丛书

有限群的线性表示

Linear Representations of Finite Groups

■ Jean-Pierre Serre 著

■ 郝钢新 译



高等教育出版社
Higher Education Press



丘成桐主编
数学翻译丛书

0152.6
1=2
2007

有限群的线性表示

Linear Representations of Finite Groups

■ Jean-Pierre Serre 著

■ 郝钊新 译



高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01-2007-1420

Translation from the English language edition:

Linear Representations of Finite Groups by Jean-Pierre Serre and Leonhard L. Scott.

Copyright © 1977 Springer-Verlag New York, Inc.

Springer is a part of Springer Science+Business Media.

All Rights Reserved.

图书在版编目 (CIP) 数据

有限群的线性表示/ (法) 塞尔 (Serre, J.-P.) 著; 郝柄新译. 北京: 高等教育出版社, 2007.6

(数学翻译丛书/ 丘成桐主编)

书名原文: Linear Representations of Finite Groups

ISBN 978-7-04-022040-7

I. 有… II. ①塞…②郝… III. ①有限群-群论②线性群-群论 IV. O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 039607 号

Copyright © 2007 by Higher Educational Press, International Press.

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	中国农业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2007 年 6 月第 1 版
印 张	13.5	印 次	2007 年 6 月第 1 次印刷
字 数	210 000	定 价	26.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 22040-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

策划编辑	王丽萍
责任编辑	王丽萍
封面设计	王凌波
版式设计	马静如
责任校对	金 辉
责任印制	张泽业

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流，无论到国外留学或邀请外地到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助。但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多。基本上所有中国的教科书都是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了。很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益。高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴于此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作，参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等。我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识。海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢。

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

序

这本书由三部分组成, 每部分的程度和目的有所不同.

第一部分最初是为量子化学工作者而写的. 它阐述了由 Frobenius 所建立的关于线性表示与特征标之间的对应关系. 这是在数学里以及量子化学或物理里经常要用到的基本结果. 我已试图仅用群的定义和线性代数的初步知识, 将证明写得尽可能初等. 例子 (第五章) 都是对于化学工作者有用的那些中选出来的.

第二部分是 1966 年为巴黎高等师范学院 (L' École Normale) 二年级学生所写的教程. 它在以下几点完善了第一部分:

(a) 表示的级和特征标的整性 (第六章);

(b) 诱导表示, Artin 定理和 Brauer 定理及其应用 (第七章 — 第十一章);

(c) 有理性问题 (第十二章和第十三章).

所用到的是线性代数中这样一些方法 (比第一部分里的意义广泛一些): 群代数, 模, 非交换张量积, 半单代数.

第三部分是对 Brauer 理论的一个介绍: 从特征零过渡到特征 p (和相反的情形). 我无所顾忌地使用了 Abel 范畴的语言 (投射模, Grothendieck 群). 对于这一类问题来说, 这种语言是非常合适的. 主要结果是:

(a) 分解同态映射是满射: 在特征 p 里的一切不可约表示都可以“虚假地”提升到特征零里 (即提升到一个适当的 Grothendieck 群内).

(b) 方-Swan 定理: 当所考虑的群是 p -可解的时候, “虚假地”这

个词可以从上述论断中去掉.

在这一部分里还给出了关于 Artin 表示的若干应用.

我以愉快的心情感谢:

Gaston Berthier 和 Josiane Serre, 他们同意我转录第一部分, 这原
是作为附录写在他们所著的《量子化学》一书中的;

Yves Balasko, 他根据一些讲义写出了第二部分的初稿;

Alexandre Grothendieck, 他同意我转录第三部分, 这部分最初是
在他的代数几何讨论会 (Séminaire de Géométrie Algébrique, I. H. E.
S., 1965/1966) 上发表的.

目 录

第一部分 表示和特征标	1
第一章 线性表示通论	3
1.1 定义	3
1.2 基本例子	4
1.3 子表示	5
1.4 不可约表示	7
1.5 两个表示的张量积	8
1.6 对称方和交错方	9
第二章 特征标理论	11
2.1 表示的特征标	11
2.2 Schur 引理, 基本应用	14
2.3 特征标的正交关系	16
2.4 正则表示的分解	19
2.5 不可约表示的个数	21
2.6 一个表示的典型分解	23
2.7 表示的显分解	25

第三章 子群. 群的积. 诱导表示	28
3.1 Abel 子群	28
3.2 两个群的积	30
3.3 诱导表示	32
第四章 紧群.	37
4.1 紧群	37
4.2 紧群上的不变测度	37
4.3 紧群的线性表示.	38
第五章 例子.	40
5.1 循环群 C_n	40
5.2 群 C_∞	41
5.3 二面体群 D_n	41
5.4 群 D_{nh}	43
5.5 群 D_∞	44
5.6 群 $D_{\infty h}$	45
5.7 交错群 \mathfrak{A}_4	46
5.8 对称群 \mathfrak{S}_4	47
5.9 立方体群	48
参考文献 (第一部分).	50
第二部分 在特征零情形的表示	53
第六章 群代数	55
6.1 表示和模	55
6.2 $\mathbb{C}[G]$ 的分解.	56
6.3 $\mathbb{C}[G]$ 的中心.	58
6.4 整元的基本性质.	59
6.5 特征标的整性质. 应用	60

第七章 诱导表示. Mackey 判定	64
7.1 导引	64
7.2 诱导表示的特征标. 互反公式.	65
7.3 在子群上的限制.	69
7.4 Mackey 的不可约性判定	69
第八章 诱导表示的例子	71
8.1 正规子群. 对于不可约表示的级的应用	71
8.2 与一个 Abel 群的半直积	72
8.3 几类有限群回顾.	74
8.4 Sylow 定理	76
8.5 超可解群的线性表示	77
第九章 Artin 定理	79
9.1 环 $R(G)$	79
9.2 Artin 定理的表述	81
9.3 第一个证明	82
9.4 (i) \Rightarrow (ii) 的第二个证明	84
第十章 Brauer 的一个定理	86
10.1 p -正则元素. p -初等子群	86
10.2 由 p -初等子群所产生的诱导特征标	87
10.3 特征标的构造	88
10.4 定理 18 和 18' 的证明	91
10.5 Brauer 定理	91
第十一章 Brauer 定理的应用	94
11.1 特征标的刻画	94
11.2 Frobenius 的一个定理	96
11.3 Brauer 定理的逆	98
11.4 $A \otimes R(G)$ 的谱	99

第十二章 有理性问题	104
12.1 环 $R_K(G)$ 和 $\bar{R}_K(G)$	104
12.2 Schur 指标	106
12.3 在割圆域上的可实现性	108
12.4 群 $R_K(G)$ 的秩	109
12.5 Artin 定理的一般化	111
12.6 Brauer 定理的一般化	112
12.7 定理 28 的证明	114
第十三章 有理性问题: 例子	118
13.1 有理数域的情形	118
13.2 实数域的情形	123
参考文献 (第二部分)	128
第三部分 Brauer 理论导引	131
第十四章 群 $R_K(G)$, $R_k(G)$ 和 $P_k(G)$	133
14.1 环 $R_K(G)$ 和 $R_k(G)$	133
14.2 群 $P_k(G)$ 和 $P_A(G)$	134
14.3 $P_k(G)$ 的结构	135
14.4 $P_A(G)$ 的结构	136
14.5 对偶性	139
14.6 标量扩张	141
第十五章 cde 三角形	143
15.1 $c: P_k(G) \rightarrow R_k(G)$ 的定义	143
15.2 $d: R_K(G) \rightarrow R_k(G)$ 的定义	144
15.3 $e: P_k(G) \rightarrow R_K(G)$ 的定义	146
15.4 cde 三角形的基本性质	147
15.5 例: p' -群	148
15.6 例: p -群	149
15.7 例: p' -群与 p -群的积	149

第十六章 若干定理	151
16.1 cde 三角形的性质	151
16.2 对 e 的像的刻画	153
16.3 通过特征标对投射 $A[G]$ -模的刻画	154
16.4 投射 $A[G]$ -模的例: 亏指数为零的不可约表示	157
第十七章 证明	159
17.1 群的变更	159
17.2 模表示情形的 Brauer 定理	160
17.3 定理 33 的证明	161
17.4 定理 35 的证明	163
17.5 定理 37 的证明	164
17.6 定理 38 的证明	166
第十八章 模特征标	169
18.1 表示的模特征标	169
18.2 模特征标的无关性	171
18.3 重新表述	173
18.4 d 的一个截影	175
18.5 例: 对称群 \mathfrak{S}_4 的模特征标	176
18.6 例: 交错群 \mathfrak{A}_5 的模特征标	179
第十九章 对 Artin 表示的应用	183
19.1 Artin 和 Swan 表示	183
19.2 Artin 和 Swan 表示的有理性	185
19.3 一个不变量	186
附录	187
参考文献 (第三部分)	189
记号索引	191

汉英名词索引. 194

英汉名词索引. 199

第一部分

表示和特征标

第一章

线性表示通论

1.1 定义

令 V 是复数域 \mathbb{C} 上一个向量空间, $GL(V)$ 是由 V 到自身的一切同构所组成的群. 按照定义, $GL(V)$ 的一个元素 a 是 V 到 V 内的一个线性映射, 它有一个逆映射 a^{-1} ; 这个逆映射也是线性的. 当 V 具有一个 n 元有限基 (e_i) 时, 每一个线性映射 $a: V \rightarrow V$ 由一个 n 阶矩阵 (a_{ij}) 所确定, 系数 a_{ij} 都是复数; 这些系数是将像 $a(e_j)$ 通过基 (e_i) 来表示:

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

而得到的.

说 a 是一个同构相当于说 a 的行列式 $\det(a) = \det(a_{ij})$ 不等于零. 因此, 群 $GL(V)$ 可以与一切 n 阶可逆矩阵所组成的群等同起来.

现在设 G 是一个有限群, 具有单位元 1 和运算 $(s, t) \mapsto st$. 群 G 到群 $GL(V)$ 内的一个同态 ρ 叫做 G 在 V 内的一个线性表示. 换句话说, 对于每一元素 $s \in G$, 令 $GL(V)$ 的一个元素 $\rho(s)$ 与它对应, 使得对于 $s, t \in G$, 等式

$$\rho(st) = \rho(s) \cdot \rho(t)$$

成立 (我们常把 $\rho(s)$ 写作 ρ_s). 由上面的等式可以推出:

$$\rho(1) = 1; \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

当 ρ 被给定时, 我们就说 V 是 G 的一个表示空间 (或者为了简单起见, 就说 V 是 G 的一个表示). 今后我们只限于考虑 V 是有限维向量空间的情形. 这并不是一个过分的限制. 事实上, 对于多数应用来说, 人们感兴趣的只是 V 的有限个元素 x_i , 并且总可以找到 V 的一个有限维子表示 (稍后将定义, 参看 1.3), 它包含这些 x_i : 就取由这些 x_i 的像 $\rho_s(x_i)$ 所生成的子空间作为表示空间.

现在设 V 是有限维的, 令 n 是它的维数. 我们也称 n 是所考虑的表示的级. 令 (e_i) 是 V 的一个基, 令 R_s 是 ρ_s 关于这个基的矩阵. 我们有

$$\det(R_s) \neq 0; R_{st} = R_s \cdot R_t, \quad s, t \in G.$$

如果令 $r_{ij}(s)$ 表示矩阵 R_s 的系数, 那么第二个公式变成

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s)r_{jk}(t).$$

反之, 给了满足上面等式的可逆矩阵 $R_s = (r_{ij}(s))$, 相应地就有 G 在 V 内的一个线性表示 ρ ; 这就是说, 用“矩阵形式”给出一个表示.

设 ρ 和 ρ' 是同一个群 G 分别在向量空间 V 和 V' 内的表示. 这两个表示说是等价的 (或同构的), 如果存在一个线性映射 $\tau: V \rightarrow V'$, 它把 ρ “变为” ρ' , 也就是说, 以下等式成立:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \quad \text{对一切 } s \in G.$$

当 ρ 和 ρ' 是通过矩阵形式分别由 R_s 和 R'_s 给出时, 这个等式的意义就是, 存在一个可逆矩阵 T 使得

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \quad \text{对一切 } s \in G,$$

或写成 $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$. 我们可以把这样的两个表示看作同一个 (对于每一 $x \in V$ 令 $\tau(x) \in V'$ 与它对应); 特别, ρ 和 ρ' 有相同的级.

1.2 基本例子

(a) 群 G 的一个 1 级表示是一个同态 $\rho: G \rightarrow \mathbf{C}^*$, 这里 \mathbf{C}^* 表示非零复数乘法群. 因为 G 的每一元素都是有限阶的, 所以 ρ 的值 $\rho(s)$ 都是单位根. 特别, 我们有 $|\rho(s)| = 1$.