丘成桐主编

数学翻译丛书

有限群的线性表示

Linear Representations of Finite Groups

■ Jean-Pierre Serre 著

■ 郝钢新 译

高等教育出版社
Higher Education Press

丘成桐主编

数学翻译丛书

有限群的线性表示

Linear Representations of Finite Groups

Jean-Pierre Serre 著

郝钢新 译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01–2007–1420

Translation from the English language edition:

Linear Representations of Finite Groups by Jean-Pierre Serre and Leonhard L. Scott.

图书在版编目 (CIP) 数据

有限群的线性表示/ (法) 塞尔 (Serre, J.-P.) 著; 郝钢新译. 北京: 高等教育出版社, 2007.6

(数学翻译丛书/ 丘成桐主编)

书名原文: Linear Representations of Finite Groups

ISBN 978-7-04-022040-7

I. 有··· II.①塞···②郝··· III.①有限群–群论②线性群–群论 IV.O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 039607 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010–58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800–810–0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010–58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中国农业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007 年 6 月第 1 版
印　　张	13.5	**印　　次**	2007 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	210 000	**定　　价**	26.00 元

物料号　22040–00

策划编辑　王丽萍

责任编辑　王丽萍

封面设计　王凌波

版式设计　马静如

责任校对　金　辉

责任印制　张泽业

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流，无论到国外留学或邀请外地到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助．但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多．基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了．很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益．高等教育出版社和海外的国际出版社有鉴及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作，参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等．我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识．海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢．

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

序

这本书由三部分组成，每部分的程度和目的有所不同.

第一部分最初是为量子化学工作者而写的. 它阐述了由 Frobenius 所建立的关于线性表示与特征标之间的对应关系. 这是在数学里以及量子化学或物理里经常要用到的基本结果. 我已试图仅用群的定义和线性代数的初步知识，将证明写得尽可能初等. 例子 (第五章) 都是从对于化学工作者有用的那些中选出来的.

第二部分是 1966 年为巴黎高等师范学院 (L' École Normale) 二年级学生所写的教程. 它在以下几点完善了第一部分:

(a) 表示的级和特征标的整性 (第六章);

(b) 诱导表示, Artin 定理和 Brauer 定理及其应用 (第七章 — 第十一章);

(c) 有理性问题 (第十二章和第十三章).

所用到的是线性代数中这样一些方法 (比第一部分里的意义广泛一些): 群代数, 模, 非交换张量积, 半单代数.

第三部分是对 Brauer 理论的一个介绍: 从特征零过渡到特征 p (和相反的情形). 我无所顾忌地使用了 Abel 范畴的语言 (投射模, Grothendieck 群). 对于这一类问题来说, 这种语言是非常合适的. 主要结果是:

(a) 分解同态映射是满射: 在特征 p 里的一切不可约表示都可以 "虚假地" 提升到特征零里 (即提升到一个适当的 Grothendieck 群内).

(b) 方–Swan 定理: 当所考虑的群是 $p-$可解的时候,"虚假地" 这

个词可以从上述论断中去掉.

在这一部分里还给出了关于 Artin 表示的若干应用.

我以愉快的心情感谢:

Gaston Berthier 和 Josiane Serre, 他们同意我转录第一部分, 这原是作为附录写在他们所著的《量子化学》一书中的;

Yves Balasko, 他根据一些讲义写出了第二部分的初稿;

Alexandre Grothendieck, 他同意我转录第三部分, 这部分最初是在他的代数几何讨论会 (Séminaire de Géométrie Algébrique, I. H. E. S., 1965/1966) 上发表的.

目　　录

第一部分

表示和特征标

第一章

线性表示通论

1.1 定义

令 V 是复数域 $\mathbf{C}$ 上一个向量空间, $\mathrm{GL}(V)$ 是由 V 到自身的一切同构所组成的群. 按照定义, $\mathrm{GL}(V)$ 的一个元素 a 是 V 到 V 内的一个线性映射, 它有一个逆映射 a^{-1}; 这个逆映射也是线性的. 当 V 具有一个 n 元有限基 (e_i) 时, 每一个线性映射 $a: V \to V$ 由一个 n 阶矩阵 (a_{ij}) 所确定, 系数 a_{ij} 都是复数; 这些系数是将像 $a(e_j)$ 通过基 (e_i) 来表示:

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$$

而得到的.

说 a 是一个同构相当于说 a 的行列式 $\det(a) = \det(a_{ij})$ 不等于零. 因此, 群 $\mathrm{GL}(V)$ 可以与一切 n 阶可逆矩阵所组成的群等同起来.

现在设 G 是一个有限群, 具有单位元 1 和运算 $(s,t) \mapsto st$. 群 G 到群 $\mathrm{GL}(V)$ 内的一个同态 ρ 叫做 G 在 V 内的一个线性表示. 换句话说, 对于每一元素 $s \in G$, 令 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个元素 $\rho(s)$ 与它对应, 使得对于 $s, t \in G$, 等式

$$\rho(st) = \rho(s) \cdot \rho(t)$$

成立 (我们常把 $\rho(s)$ 写作 ρ_s). 由上面的等式可以推出:

$$\rho(1) = 1; \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

当 ρ 被给定时, 我们就说 V 是 G 的一个表示空间 (或者为了简单起见, 就说 V 是 G 的一个表示). 今后我们只限于考虑 V 是有限维向量空间的情形. 这并不是一个过分的限制. 事实上, 对于多数应用来说, 人们感兴趣的只是 V 的有限个元素 x_i, 并且总可以找到 V 的一个有限维子表示 (稍后将定义, 参看 1.3), 它包含这些 x_i: 就取由这些 x_i 的像 $\rho_s(x_i)$ 所生成的子空间作为表示空间.

现在设 V 是有限维的, 令 n 是它的维数. 我们也称 n 是所考虑的表示的级. 令 (e_i) 是 V 的一个基, 令 R_s 是 ρ_s 关于这个基的矩阵. 我们有

$$\det(R_s) \neq 0; \quad R_{st} = R_s \cdot R_t, \quad s, t \in G.$$

如果令 $r_{ij}(s)$ 表示矩阵 R_s 的系数, 那么第二个公式变成

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) r_{jk}(t).$$

反之, 给了满足上面等式的可逆矩阵 $R_s = (r_{ij}(s))$, 相应地就有 G 在 V 内的一个线性表示 ρ; 这就是说, 用 "矩阵形式" 给出一个表示.

设 ρ 和 ρ' 是同一个群 G 分别在向量空间 V 和 V' 内的表示. 这两个表示说是等价的 (或同构的), 如果存在一个线性映射 $\tau: V \to V'$, 它把 ρ "变为" ρ', 也就是说, 以下等式成立:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau, \text{ 对一切 } s \in G.$$

当 ρ 和 ρ' 是通过矩阵形式分别由 R_s 和 R'_s 给出时, 这个等式的意义就是, 存在一个可逆矩阵 T 使得

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \text{ 对一切 } s \in G,$$

或写成 $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$. 我们可以把这样的两个表示看作同一个 (对于每一 $x \in V$ 令 $\tau(x) \in V'$ 与它对应); 特别, ρ 和 ρ' 有相同的级.

1.2 基本例子

(a) 群 G 的一个 1 级表示是一个同态 $\rho: G \to \mathbf{C}^*$, 这里 $\mathbf{C}^*$ 表示非零复数乘法群. 因为 G 的每一元素都是有限阶的, 所以 ρ 的值 $\rho(s)$ 都是单位根. 特别, 我们有 $|\rho(s)| = 1$.