高等院校信息与通信工程系列教材

通信原理学习辅导

张甫翊 张若渊 编著

清华大学出版社

高等院校信息与通信工程系列教材

通信原理学习辅导

张甫翊 张若渊 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书以使用较广泛的樊昌信、张甫翊等编著的《通信原理》(第5版)书中之习题和某大学近期的“通信原理”考研入学试题为讨论对象。内容涉及通信系统构成、随机信号分析、信道与噪声、模拟调制系统、数字基带传输、正弦载波数字传输、模拟信号的数字传输、数字信号最佳接收、差错控制编码、伪随机序列和同步原理。

各章提供教学大纲的知识点,以明确教学要求。每章解题中都指出解题根据,给出解题过程,以便于读者理解。为方便学习,书末给出通信原理的“常用公式”和“索引”。

本书可作为学习“通信原理”课程的本科生和研究生的辅导书,也可作为研究生入学考试的参考书。同时可作为相关大学教师和科学技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

通信原理学习辅导/张甫翊,张若渊编著.—北京:清华大学出版社,2007.6
(高等院校信息与通信工程系列教材)
ISBN 978-7-302-15131-9

Ⅰ.通… Ⅱ.①张… ②张… Ⅲ.通信理论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TN911

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第059888号

责任编辑: 陈国新 李玮琪
责任校对: 梁 毅
责任印制: 王秀菊
出版发行: 清华大学出版社 **地 址:** 北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn **邮 编:** 100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机: 010-62770175 **邮购热线:** 010-62786544
投稿咨询: 010-62772015 **客户服务:** 010-62776969
印 刷 者: 北京市人民文学印刷厂
装 订 者: 三河市兴旺装订有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 185×260 **印 张:** 10.5 **字 数:** 245千字
版 次: 2007年6月第1版 **印 次:** 2007年6月第1次印刷
印 数: 1~4000
定 价: 16.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177转3103 产品编号:022416-01

高等院校信息与通信工程系列教材编委会

出版说明

信息与通信工程学科是信息科学与技术的重要组成部分。改革开放以来，我国在发展通信系统与信息系统方面取得了长足的进步，形成了巨大的产业与市场，如我国的电话网络规模已位居世界首位，同时该领域的一些分支学科出现了为国际认可的技术创新，得到了迅猛的发展。为满足国家对高层次人才的迫切需求，当前国内大量高等学校设有信息与通信工程学科的院系或专业，培养大量的本科生与研究生。为适应学科知识不断更新的发展态势，他们迫切需要内容新颖又符合教改要求的教材和教学参考书。此外，大量的科研人员与工程技术人员也迫切需要学习、了解、掌握信息与通信工程学科领域的基础理论与较为系统的前沿专业知识。为了满足这些读者对高质量图书的渴求，清华大学出版社组织国内信息与通信工程国家级重点学科的教学与科研骨干以及本领域的一些知名学者、学术带头人编写了这套高等院校信息与通信工程系列教材。

该套教材以本科电子信息工程、通信工程专业的专业必修课程教材为主，同时包含一些反映学科发展前沿的本科选修课程教材和研究生教学用书。为了保证教材的出版质量，清华大学出版社不仅约请国内一流专家参与了丛书的选题规划，而且每本书在出版前都组织全国重点高校的骨干教师对作者的编写大纲和书稿进行了认真审核。

祝愿《高等院校信息与通信工程系列教材》为我国培养与造就信息与通信工程领域的高素质科技人才，推动信息科学的发展与进步做出贡献。

北京邮电大学

陈俊亮

2004年9月

前　言

“通信原理”课程是大学本科教育“通信工程专业”和“电子信息工程专业”的专业基础课，通常安排在大学高年级开课，该课要求先修“信号与系统”（对于确定性信号）、“概率论与随机过程”、“线性代数”、“特殊函数”和“数字逻辑原理”等课程。此课有时安排为研究生的低年级课程，也常作为报考某些专业研究生的必试科目。许多学习者希望有一本《通信原理学习辅导》来帮助自己深入掌握其基本内容，为此编写了这本书。书中例题基本上按课程教学大纲要求来选取。教学大纲随课程安排时数和学校专业不同，会有很大差别，阅读的内容可按学校大纲灵活选取。本书适合大专院校电子信息类专业的读者学习参考，对从事通信事业的工程技术人员也是一本良好的参考书。

樊昌信、张甫翊、吴成柯、徐炳祥编著的教材《通信原理》（第 5 版），是一本国家级重点教材，在各大学获得广泛使用。本书以此教材的内容和习题为主要讨论对象，致力于让读者更好地掌握该课程的知识点，熟悉基本公式计算和常见的解题技巧。本书分为 12 章，主要内容包括绪论、随机信号分析、信道与噪声、模拟调制系统、数字基带传输、正弦载波数字传输、模拟信号的数字传输、数字信号的最佳接收、差错控制编码、伪随机序列、同步原理以及硕士生入学试题精解。除第 12 章外，每章分两节，第 1 节给出该章教学大纲的知识点，第 2 节为习题精解。

读者需先消化好《通信原理》（第 5 版）相应章节内容，重点注意本书列出的教学大纲知识点，然后恰当选择其后练习作自我检查，最后再对照阅读本书的题解。学生尤其不要为完成教师布置的作业而使用本书作简单抄袭。

为方便学习，本书中使用以下标记，阅读时请注意。(1)如习题的题头前的序号 1-2，表示该题是《通信原理》（第 5 版）教材习题的第 1-2 题。(2)如在解题过程中的“(2.2-1)式”，属本书的公式编号，这时编号前无页码出现。(3)又如在解题过程中的“见教材第××页(×.×-3)式”，指的是见《通信原理》（第 5 版）教材中的第××页(×.×-3)式。

为便于解题，书中在**附录**中列出通信中一些常用公式。对于涉及“概率论与随机过程”和“信号与系统”等先修课程的公式，这里省略。

为方便由“通信问题”找相应习题，书后提供了“**索引**”。

另外，对于习题或试题中有很大争议性的题目则在书中省略，不作讨论，并标记有：（略）。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏或错误，诚心希望读者指正。

编　者

2007 年 3 月于西安电子科技大学

目　录

第 1 章　绪　论

1.1 本章教学大纲的知识点

模拟通信系统框图，数字通信框图，数字通信与模拟通信的比较。单工通信，全双工通信，半双工通信。信息量，信源熵（平均信息量）。传码率（码元速率），传信率（信息速率）。多进制信号传码率，多进制信号传信率，传码率与传信率的换算。频带利用率。误码率（码元差错率），误信率（比特差错率）。

1.2 习题精解

1-1 设英文字母 E 出现的概率为 0.105，x 出现的概率为 0.002。试求 E 及 x 的信息量。

解：根据符号信息量定义，见教材第 7 页(1.4-3)式，$I=-\log_2 P(x)$，得

$$I(E)=-\log_2(0.105)=3.25\text{bit}$$

$$I(x)=-\log_2(0.002)=8.97\text{bit}$$

1-2 某信息源的符号集由 A、B、C、D 和 E 组成，设每一符号独立出现，其出现概率分别为 1/4，1/8，1/8，3/16 和 5/16。试求该信息源符号的平均信息量。

解：根据每符号（字母）平均信息量定义，见教材第 8 页(1.4-9)式。$H(x)=-\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\log_2 P(x_i)$ 有

$$H(x)=-(1/4)\log_2(1/4)-2\times(1/8)\log_2(1/8)-(3/16)\log_2(3/16)-(5/16)\log_2(3/16)=2.23\text{bit/字母}$$

1-3 解法同题 1-2，略。

1-4 一个由字母 A、B、C、D 组成的字，对于传输的每一个字母用二进制脉冲编码 00 代替 A，01 代替 B，10 代替 C，11 代替 D，每个脉冲宽度为 5ms：

(1) 不同的字母是独立等可能出现时，试计算传输的平均信息速率；

(2) 若每个字母出现的可能性分别为 $P_A=1/5$，$P_B=1/4$，$P_C=1/4$，$P_D=3/10$，试计算传输的平均信息速率。

解：(1) 根据教材第 7 页(1.4-3)式，I(任一字母)$=-\log_2(1/4)=2\text{bit}$。

依据教材第 8 页(1.4-9)式，得

$$H(x)=(1/4)\times 2+(1/4)\times 2+(1/4)\times 2+(1/4)\times 2=2\text{bit/字母}$$

根据传码率（码元速率，字母速率）的定义，见教材第 10 页，有

$$R_B = \frac{1\text{s}}{2\times 5\times 10^{-3}\text{s}} = 100\text{Baud}$$

把它代入传码率与传信率(信息速率)的关系式,见教材第 10 页(1.5-1)式,有

$$R_b = R_B \times H(x) = 100\times 2 = 200\text{bps}$$

(2) 根据第 8 页(1.4-9)式,得

$$H = (1/5)\log_2 5 + 2\times(1/4)\log_2 4 + (3/10)\log_2(10/3) = 1.985\text{bit/ 字母}$$

根据教材第 10 页(1.5-1)式,得

$$R_b = R_B \times H = 100\times 1.985 = 198.5\text{bps}$$

1-5 国际莫尔斯电码用点和划的序列发送英文字母,划用持续 3 单位的电流脉冲表示,点用持续 1 个单位的电流脉冲表示;且划出现的概率是点出现概率的 1/3:

(1) 计算点和划的信息量;

(2) 设点和划的出现相互独立,试计算点和划的平均信息量。

解:(1) 根据题意有

$$P(\text{点}) + P(\text{划}) = 1,\quad P(\text{划}) = (1/3)P(\text{点})$$

$$P(\text{划}) = 1/4,\quad P(\text{点}) = 3/4$$

把它们代入教材第 7 页(1.4-3)式,得

$$I(\text{划}) = -\log_2(1/4) = 2\text{bit}$$

$$I(\text{点}) = -\log_2(3/4) = 0.415\text{bit}$$

(2) 依据教材第 8 页(1.4-9)式,有

$$H = (1/4)\log_2 4 + (3/4)0.415 \approx 0.5 + 0.31 = 0.81\text{bit/ 符号}$$

1-6 设一信息源由 128 个不同符号组成。其中 16 个出现的概率为 1/32,其余 112 个出现概率为 1/224。信息源每秒发出 1000 个符号,且每个符号彼此独立。试计算该信息源的平均信息速率。

解:根据教材第 8 页(1.4-9)式,有

$$H(\text{符号}) = 16\times(1/32)\log_2 32 + 112\times(1/224)\log_2 224$$

$$\approx 2.5 + 0.5\times 2.35/0.301 = 2.5 + 3.903 = 6.403\text{bit/ 符号}$$

依据传码率(码元速率,字母速率)的定义,见教材第 10 页,有 $R_B = 1000(\text{Baud})$。把它代入教材第 10 页(1.5-1)式,有

$$R_b = R_B \times H = 1000\times 6.403 = 6403\text{bps}$$

1-7 对于二电平数字信号,每秒钟传输 300 个码元,问此传码率 $R_B =$? 若该数字信号 0 和 1 出现是独立等概的,那么传信率 R_b 等于多少?

解:根据传码率(码元速率,字母速率)的定义,见教材第 10 页,有

$$R_B = 300\text{Baud}$$

依据教材第 8 页(1.4-9)式,代入独立等概,得

$$H = (1/2)\log_2 2 + (1/2)\log_2 2 = 1$$

那么,所求传信率为

$$R_b = R_B \times H = 300\times 1 = 300\text{bps}$$

1-8 若题 1-2 中信息源以 1000Baud 速率传送信息,则传送 1 小时的信息量为多少?

传送 1 小时可能达到的最大信息量为多少？

解：(1)
$$R_b = R_B \times H = 1000 \times 2.23 = 2.23 \times 10^3 \text{bps}$$
$$I = T \times R_b = 3600 \times 2.23 \times 10^3 = 8.028 \times 10^6 \text{bit}$$

(2) 信源等概时有最大熵，所以有
$$H_{\max} = \log_2 5 \approx 2.32 \text{bit/ 字母}$$
$$I_{\max} = T \times R_{b\max} \approx 3600 \times 1000 \times 2.32 = 8.352 \times 10^6 \text{bit}$$

1-9　如果二进独立等概信号，码元宽度为 0.5ms，求 R_{B2} 和 R_{b2}；有四进制信号，码元宽度为 0.5ms，求传码率 R_{B4} 和独立等概时的传信率 R_{b4}。

解：(1) 根据传码率定义，见教材第 10 页，有
$$R_{B2} = (1/T) = 1 \text{秒} /0.5\text{ms} = 2000\text{Baud}$$
因二进独立等概信号的每码元信息量为 1bit，所以
$$R_{b2} = 2000\text{bps}$$

(2) 依据传码率定义，见教材第 10 页，有
$$R_{B4} = (1/T) = 1\text{s}/0.5\text{ms} = 2000\text{Baud}$$
因四进独立等概信号的每码元信息量为 2bit，所以传信率
$$R_{b4} = 4000\text{bps}$$

第 2 章　　随机信号分析

2.1 本章教学大纲的知识点

随机过程，狭义平稳随机过程(严平稳过程)，宽平稳随机过程(广义平稳过程)，各态历经过程。相关函数，功率谱密度。高斯(正态)随机过程，概率积分函数，误差函数，补误差函数。窄带随机过程，包络分布，相位分布，瑞利分布，均匀分布。白噪声，白噪声相关函数，带限白噪声。正弦波加窄带高斯随机过程，广义瑞利分布。随机过程通过线性系统，高斯过程通过线性系统。

2.2 习题精解

2-1 设随机过程可表示成 $\xi(t)=2\cos(2\pi t+\theta)$，式中 θ 是一个离散随机变量，且

$$P(\theta=0)=1/2,\quad P(\theta=\pi/2)=1/2$$

试求 $E[\xi(1)]$ 及 $R_\xi(0,1)$。

解：
$$\begin{aligned}E[\xi(1)] &= E[2\cos(2\pi+\theta)] = 2E[2\cos\theta]\\ &= 2[(\cos 0)\times(1/2)+\cos(\pi/2)\times(1/2)] = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_\xi(0,1) &= E[\xi(0)\xi(1)] = E[2\cos(\theta)\times 2\cos(2\pi+\theta)] = 4E(\cos^2\theta)\\ &= 4[\cos^2 0]\times(1/2)+\cos^2(\pi/2)\times(1/2) = 2\end{aligned}$$

2-2 设 $Z(t)=X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t$ 是一随机过程，若 X_1 和 X_2 是彼此独立且具有均值为 0、方差为 σ^2 的正态随机变量，试求：

(1) $E[Z(t)]$、$E[Z^2(t)]$；

(2) $Z(t)$的一维分布密度函数 $f_1(z)$；

(3) $B(t_1,t_2)$与 $R(t_1,t_2)$。

解：(1)
$$\begin{aligned}E[Z(t)] &= E[X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t]\\ &= \cos\omega_0 tE(X_1)-\sin\omega_0 tE(X_2)=0 \qquad (2.2\text{-}1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[Z^2(t)] &= E[X_1\cos\omega_0 t-X_2\sin\omega_0 t]^2\\ &= E[X_1^2\cos^2\omega_0 t-2X_1X_2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t+X_2^2\sin^2\omega_0 t]\\ &= \cos^2\omega_0 tE[X_1^2]-2\cos\omega_0 t\sin\omega_0 tE(X_1X_2)+\sin^2\omega_0 tE[X_2^2]\end{aligned}$$

$E[X_1^2]$和 $E[X_2^2]$就是题中给定的方差值 σ^2，注意其均值都为 0；又因为 X_1 和 X_2 是彼此独立，所以 $E(X_1X_2)=0$。

把以上两个结果代入上面 $E[Z^2(t)]$式中，得

$$E[Z^2(t)] = (\cos^2\omega_0 t)\sigma^2 + (\sin^2\omega_0 t)\sigma^2 = \sigma^2 \quad (2.2\text{-}2)$$

(2) 因为 X_1 和 X_2 是正态随机变量，$Z(t)$是 X_1 和 X_2 的线性组合，所以 $Z(t)$是正态的。利用(2.2-1)式和(2.2-2)式，即可写出其一维正态概率密度

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-z^2/(2\sigma^2)]$$

(3)
$$\begin{aligned}
R(t_1,t_2) &= E[Z(t_1)Z(t_2)] && \leftarrow \text{根据教材第 15 页(2.2-6) 式}\\
&= E\{[X_1\cos\omega_0 t_1 - X_2\sin\omega_0 t_1][X_1\cos\omega_0 t_2 - X_2\sin\omega_0 t_2]\}\\
&= \cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 E(X_1^2) + \sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2\ E(X_2^2) && \leftarrow X_1 \text{ 与 } X_2 \text{ 独立}\\
&= \sigma^2[\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2 + \sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2]\\
&= \sigma^2\cos\omega_0(t_2 - t_1) = \sigma^2\cos\omega_0\tau\\
B(t_1,t_2) &= R(t_1,t_2) - E[Z(t_1)]E[Z(t_2)] && \leftarrow \text{根据教材第 15 页(2.2-7) 式}\\
&= R(t_1,t_2) && \leftarrow \text{用(2.2-1) 式}\\
&= \sigma^2\cos\omega_0\tau
\end{aligned}$$

其中，$\tau = t_2 - t_1$。

2-3　求乘积 $Z(t)=X(t)Y(t)$的自相关函数。已知 $X(t)$与 $Y(t)$是统计独立的平稳随机过程，且它们的自相关函数分别为 $R_X(\tau)$、$R_Y(\tau)$。

解：
$$\begin{aligned}
R_Z(t_1,t_2) &= E[Z(t_1)Z(t_2)] && \leftarrow \text{根据教材第 15 页(2.2-6) 式}\\
&= E[X(t_1)\cdot Y(t_1)\cdot X(t_2)\cdot Y(t_2)]\\
&= E[X(t_1)X(t_2)]\cdot E[Y(t_1)Y(t_2)] && \leftarrow \text{已知 } X(t) \text{ 与 } Y(t) \text{ 独立}\\
&= R_X(\tau)\cdot R_Y(\tau) && \leftarrow \text{已知 } X(t) \text{ 与 } Y(t) \text{ 皆平稳}
\end{aligned}$$

讨论：两个独立平稳随机过程相乘后的过程，其自相关函数是平稳的，且等于各自相关函数的乘积。

2-4　若随机过程 $Z(t)=m(t)\cos(\omega_0 t+\theta)$，其中，$\omega_0$ 是某常数，$m(t)$是宽平稳随机过程，且自相关函数 $R_m(\tau)$为

$$R_m(\tau) = \begin{cases} 1+\tau, & -1<\tau<0 \\ 1-\tau, & 0\leqslant\tau<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

θ 是服从均匀分布的随机变量，它与 $m(t)$彼此统计独立。

(1) 证明 $Z(t)$是宽平稳的；

(2) 绘出自相关函数 $R_Z(\tau)$的波形；

(3) 求功率谱密度 $P_Z(\omega)$及功率 S。

解：(1) 依据宽平稳随机过程定义，见教材第 15 页，做如下证明。

$$\begin{aligned}
E[Z(t)] &= E[m(t)\cos(\omega_0 t+\theta)]\\
&= E[m(t)]E[\cos(\omega_0 t+\theta)] && \leftarrow \text{已知 } m(t) \text{ 与 } \theta \text{ 独立}\\
&= a\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta && \leftarrow \text{因为 } m(t) \text{ 是宽平稳}, \theta \text{ 是均匀分布}\\
&= 0\\
R_Z(t_1,t_2) &= E[Z(t_1)Z(t_2)] && \leftarrow \text{根据教材第 15 页(2.2-6) 式}
\end{aligned}$$

$$= E[m(t_1)\cos(\omega_0 t_1 + \theta)m(t_2)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)]$$
$$= E[m(t_1)m(t_2)] \cdot E[\cos(\omega_0 t_1 + \theta)\cos(\omega_0 t_2 + \theta)]$$
$$= R_m(\tau) \cdot E\{(1/2)\cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\theta] + (1/2)\cos\omega_0(t_2 - t_1)\}$$
$$= R_m(\tau) \cdot \{(1/2)E\cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\theta] + (1/2)E\cos\omega_0(t_2 - t_1)\}$$
$$= R_m(\tau) \cdot [0 + (1/2)\cos\omega_0(t_2 - t_1)]$$
$$= (1/2)R_m(\tau)\cos\omega_0\tau \quad (\tau = t_2 - t_1) \tag{2.4-1}$$

可见，$Z(t)$的均值为常数，相关函数是时间间隔 τ 的函数，所以是宽平稳的。

(2) 由式(2.4-1)式可知，该波形是包络 $R_m(\tau)$(三角形)的余弦振荡，振荡角频率等于 ω_0。波形中设 $\omega_0=5\pi$。$R_Z(\tau)$波形如图 2.4-1 所示。

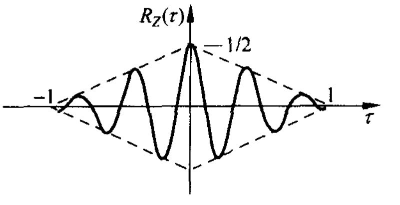

图 2.4-1 $R_Z(\tau)$波形

(3) 根据教材第 18 页(2.4-10)式，宽平稳过程的功率谱密度与相关函数呈傅氏变换对，所以可由(2.4-1)式做傅氏变换得到 $Z(t)$的功率谱密度 $P_Z(\omega)$。

根据傅氏变换理论，两个函数 $R_m(\tau)$和$(1/2)\cos\omega_0\tau$ 乘积的傅氏变换等于各函数傅氏变换的卷积。即

$$R_m(\tau) = \mathrm{tri}(\tau) \Longleftrightarrow \mathrm{Sa}^2(\omega/2)$$
$$(1/2)\cos\omega_0\tau \Longleftrightarrow (\pi/2)[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

所以有

$$P_Z(\omega) = (\pi/2)[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] * \mathrm{Sa}^2(\omega/2)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\pi/2)\{[\delta(u - \omega_0) + \delta(u + \omega_0)]\mathrm{Sa}^2[(\omega - u)/2]\}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{4}\{\mathrm{Sa}^2[(\omega - \omega_0)/2] + \mathrm{Sa}^2[(\omega + \omega_0)/2]\}$$

即为所求功率谱密度。

$$S = R_Z(0) = (1/2)R_m(0)\cos\omega_0 0 = 1/2$$

为所求总功率。

2-5 已知噪声 $n(t)$的自相关函数 $R_n(\tau)=(a/2)\mathrm{e}^{-a|\tau|}$，$a$ 为常数。

(1) 求 $P_n(\omega)$及 S；

(2) 绘出 $R_n(\tau)$及 $P_n(\omega)$的图形。

解：(1) 根据教材第 18 页(2.4-10)式，宽平稳过程的功率谱密度与相关函数成傅氏变换对，所以

$$P_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(a/2)\mathrm{e}^{-a|\tau|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{0}(a/2)\mathrm{e}^{a\tau-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau + \int_{0}^{\infty}(a/2)\mathrm{e}^{-a\tau-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$= (a/2)\left[\frac{1}{a - \mathrm{j}\omega} + \frac{1}{a + \mathrm{j}\omega}\right] = \frac{a^2}{a^2 + \omega^2} \tag{2.5-1}$$

依据教材第 16 页(2.4-1)式，噪声平均功率 $S=R_n(0)=a/2$。

(2) 本题中噪声自相关函数显然呈指数函数形状，可画出图形如图 2.5-1 所示。

根据已得到的(2.5-1)式，可画出 $P_n(\omega)$的图形如图 2.5-2 所示。

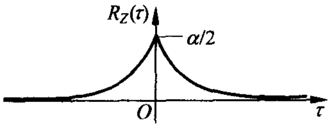

图 2.5-1　噪声相关函数图

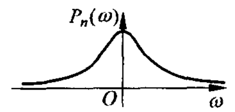

图 2.5-2　噪声功率谱密度图

2-6　$\xi(t)$是一个平稳随机过程，它的自相关函数是周期为 2s 的周期函数。在区间$(-1,1)$(s)上，该自相关函数 $R(\tau)=1-|\tau|$。试求 $\xi(t)$的功率谱密度 $P_\xi(\omega)$，并用图形表示。

解：若不考虑题给 $R(\tau)$的周期性，则 $R(\tau)$是三角函数 $\mathrm{tri}(\tau)$，依据参考文献[3]第 528 页附录 C 得到非周期 $R(\tau)$的傅氏变换为

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-1}^{1}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=\mathrm{Sa}^2(\omega/2) \tag{2.6-1}$$

已知 $R(\tau)$是周期为 2s 的函数，即有 $\omega_0=\pi$。根据傅氏级数展开公式有傅氏系数

$$F(n\omega_0)=(1/2)\int_{-1}^{1}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.6-2}$$

将(2.6-2)式与(2.6-1)式做比较，得

$$F(n\omega_0)=(1/2)\mathrm{Sa}^2(n\omega_0/2) \tag{2.6-3}$$

把 $\omega_0=\pi$ 代入(2.6-3)式，得

$$F(n\omega_0)=F(n\pi)=(1/2)\mathrm{Sa}^2(n\pi/2)$$

于是有

$$P_\xi(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\pi)\delta(\omega-n\pi)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2(n\pi/2)\delta(\omega-n\pi)$$

图 2.6-1 为所求 $P_\xi(\omega)$的图形。

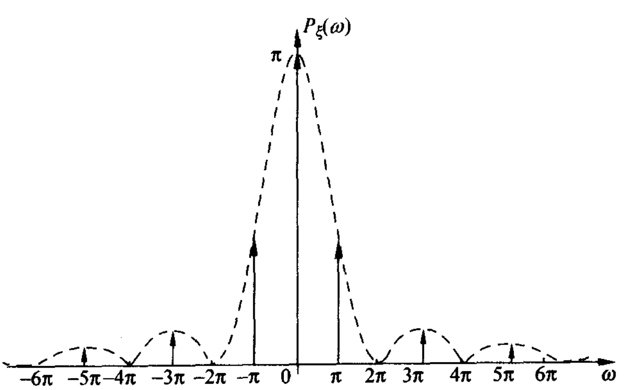

图 2.6-1　$P_\xi(\omega)$的图形

2-7　将一个均值为零、功率谱密度 $n_0/2$ 的高斯白噪声加到一个中心角频率为 ω_c、带宽为 B 的理想带通滤波器上，如图 P2-1 所示。

(1) 求滤波器输出噪声的自相关函数；

(2) 写出输出噪声的一维概率密度函数。

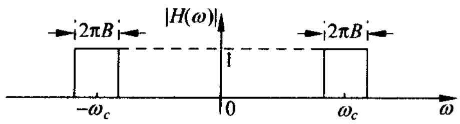

图 P2-1

解：(1) 输出功率谱密度等于输入功率谱密度乘以系统频率响应取模的平方，见教材第 30 页(2.8-8)式，所以噪声输出功率谱密度为

$$P_n(\omega)=|\ H(\omega)\ |^2(n_0/2)=\begin{cases}n_0/2, & \omega_c-\pi B\leqslant|\ \omega\ |\leqslant\omega_c+\pi B\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

利用教材第 18 页(2.4-10)式，相关函数与功率谱密度呈傅氏变换对，有

$$\begin{aligned}R_n(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c-\pi B}^{-\omega_c+\pi B}(n_0/2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c-\pi B}^{\omega_c+\pi B}(n_0/2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{n_0}{4\pi\mathrm{j}\tau}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\omega_c+\pi B)\tau}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\omega_c-\pi B)\tau}\right]+\frac{n_0}{4\pi\mathrm{j}\tau}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_c+\pi B)\tau}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_c-\pi B)\tau}\right]\\&=\frac{n_0}{4\pi\mathrm{j}\tau}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c\tau}\mathrm{j}2\sin\pi B\tau+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c\tau}\mathrm{j}2\sin\pi B\tau\right]\\&=n_0B\cdot\mathrm{Sa}(\pi B\tau)\cdot\cos\omega_c\tau\end{aligned}$$

(2) 由上式得到输出噪声方差 $\sigma^2=R_n(0)=n_0B$；

根据教材第 29 页(2.8-6)式，且这里 $H(0)=0$，所以输出噪声均值为 0；参见教材第 30 页，题目给定的带通滤波器显然是线性系统，输入噪声是高斯的，所以输出噪声为高斯的。利用教材第 20 页(2.5-4)式得到输出噪声一维概率密度

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n_0B}}\exp\left(-\frac{x^2}{2n_0B}\right)$$

2-8 设 RC 低通滤波器如图 P2-2 所示，求当输入均值为零、功率谱密度为 $n_0/2$ 白噪声时，输出过程的功率谱密度和自相关函数。

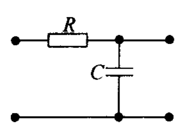

图 P2-2

解：RC 低通滤波器的频率响应函数为

$$H(\omega)=\frac{1/\mathrm{j}\omega C}{R+(1/\mathrm{j}\omega C)}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

输出过程的功率谱密度

$$\begin{aligned}P_0(\omega)&=(n_0/2)\cdot|\ H(\omega)\ |^2\leftarrow\text{根据教材第 30 页(2.8-8)式}\\&=(n_0/2)\cdot\frac{1}{1+(\omega RC)^2}\end{aligned}$$

输出过程的自相关函数

$$R_0(\tau)\Longleftrightarrow P_0(\omega)\quad\leftarrow\text{根据教材第 18 页(2.4-10)式}$$

利用傅氏变换对公式

$$\mathrm{e}^{-a|\tau|}\Longleftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

有

$$R_0(\tau) = \frac{n_0}{4RC} e^{-|\tau|/RC}$$

2-9 将均值为零、功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声加到图 P2-3 所示的低通波器的输入端。

(1) 求输出噪声 $n_0(t)$的自相关函数；

(2) 求输出噪声 $n_0(t)$的方差。

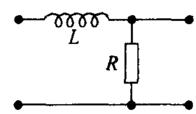

图 P2-3

解：LR 滤波器的频率响应函数为

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

根据教材第 30 页(2.8-8)式，网络输出功率谱密度等于输入功率谱密度乘以网络频率响应函数取模的平方，所以有输出过程的功率谱密度

$$P_0(\omega) = (n_0/2) \cdot |H(\omega)|^2 = \frac{n_0 R^2}{2(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

(1) 依据教材第 18 页(2.4-10)式，相关函数与功率谱密度呈傅氏变换对，同时套用傅氏变换对公式

$$e^{-a|\tau|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

于是有输出噪声 $n_0(t)$的自相关函数

$$\begin{aligned} R_0(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0 R^2}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{n_0 R}{4L} e^{-(R/L)|\tau|} \end{aligned} \tag{2.9-1}$$

(2) 参见教材第 17 页(2.4-5)式，把 $\tau=0$ 代入(2.9-1)式，得

$$R_0(0) = \frac{n_0 R}{4L}$$

即为所求输出噪声 $n_0(t)$的方差。

2-10 设有一个随机二进制矩形脉冲波形，它的每个脉冲的持续时间为 T_b，脉冲幅度取 ± 1 的概率相等。现假设任一间隔 T_b 内波形取值与任何别的间隔内取值统计无关，且过程具有宽平稳性，试证：

(1) 自相关函数

$$R_\xi(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T_b, & |\tau| \leqslant T_b \\ 0, & |\tau| > T_b \end{cases}$$

(2) 功率谱密度

$$P_\xi(\omega) = T_b[\mathrm{Sa}(\pi f T_b)]^2$$

解：(1) 题中二进制矩形脉冲序列可表示成

$$\xi(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \mathrm{rect}[(t - iT_b)/T_b] \tag{2.10-1}$$

根据自相关函数定义有