

素数的音乐



数学圈丛书

MATHEMATICAL CIRCLES

The Music of the Primes

■【英】马科斯·杜·索托伊 / 著 ■ 孙维昆 / 译

173

223

131

251

281

151

223

111

251

73

347

97

29

6

11

19

17

23

53

47

83

31

37

41

13

5

2



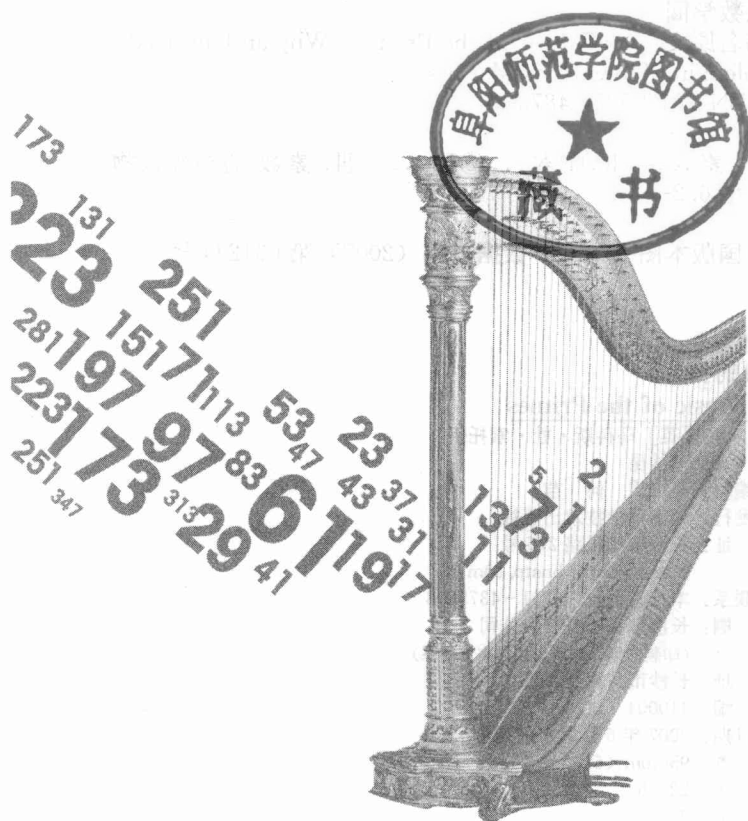
湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press

数学圈丛书

素数的音乐

The Music of the Primes

■【英】马科斯·杜·索托伊 / 著 ■孙维昆 / 译



湖南科学技术出版社

The Music of the Primes
Copyright ©by Marcus Du Sautoy 2003

湖南科学技术出版社通过大苹果股份有限公司独家获得本书中文简体版中国大陆地区出版发行权。

著作权合同登记号: 18-2005-082

本书根据 Harper Collins 2003 年版本译出。

图书在版编目 (CIP) 数据

素数的音乐/ (英) 索托伊著; 孙维昆译. —长沙: 湖南科学技术出版社, 2007. 4
(数学圈)

书名原文: The Music of the Primes: Why an Unsolved Problem in Mathematics Matters
ISBN 978-7-5357-4873-7

I. 素... II. ①索... ②孙... III. 素数-青少年读物
IV. O156.2-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 051234 号

数学圈丛书

素数的音乐

The Music of the Primes

著者: [英] 马科斯·杜·索托伊

译者: 孙维昆

责任编辑: 吴 炜 何 苗

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系: 本社直销科 0731-4375808

印 刷: 长沙瑞和印务有限公司

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂 址: 长沙市井湾路 4 号

邮 编: 410004

出版日期: 2007 年 6 月第 1 版第 1 次

开 本: 950mm×670mm 1/16

印 张: 22.75

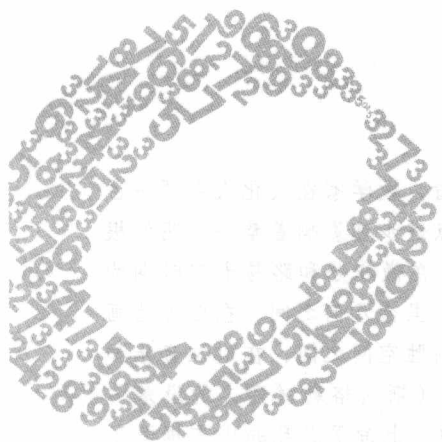
插 页: 2

字 数: 309000

书 号: ISBN 978-7-5357-4873-7

定 价: 36.00 元

(版权所有·翻印必究)



欢迎你来数学圈

欢迎你来数学圈，那是我们熟悉而陌生的园地。

我们熟悉它，因为几乎每个人都走过多年的数学路，从123走到6月6（或7月7），从课堂走进考场。然后，我们把它留给最后一张考卷，解放的头脑，不再为它留一点儿空间。我们也陌生，模糊的记忆里，是残缺的公式和零乱的图形，是课堂的催眠曲，是考场的蒙汗药……去吧，那些被课本和考卷异化和扭曲了的数学；忘记那一朵朵恶之花，我们会迎来新的百花园。

“数学圈丛书”请大家走进数学圈，也走近数学圈子里的人。这是一套新视角下的数学读物，它不为专门传达任何具体的数学知识和解题技巧，而以“非数学的形式来普及数学”，着重宣扬数学和数学家的思想和精神。它的目的不是教人学数学，而是改变人们对数学和数学家的看法，把数学融入大众文化，回到人们的生活。读这些书不需要智力竞赛的紧张，而是要一点儿文艺欣赏的平和。你可以怀着360样心情来享受数学，经历它的趣味和生命，感悟符号背后的情感和人生。

没有人怀疑数学是文化的一部分，但诺大的“文化”，



却往往将数学排除在外。当然，从人数来看，数学家在文化人中顶多占一个测度为零的空间。但是，数学的每一点进步都影响着整个文明的根基。借一个历史学家的话说，“有谁知道，在微积分和路易十四时期的政治的朝代原则之间，在古典的城邦和欧几里得几何之间，在西方油画的空间透视和以铁路、电话、远距离武器制胜空间之间，在对位音乐和信用经济之间，原有深刻的一致关系呢？”（斯宾格勒《西方的没落·导言》）所以，数学不在象牙塔，就在身边。上帝用混乱的语言摧毁了石头的巴比塔，而人类用同一种语言建造了精神的巴比塔，那就是数学。它是艺术，也是生活；是态度，也是信仰；是最复杂的简单，也是最单纯的完美。

数学是生活。当然，我们的意思不是说生活离不开算术，技术离不开微积分；而是说数学本身也能成为大众的生活态度和生活方式。很多人感觉数学枯燥无味，是因为他把数学从生活中赶走了。当你发现一个小公式也像一首小诗那么多情的时候，还忍心把它忘记吗？大家能享受“诗意的生活”，从这点说，数学是一样的。

数学的生活很简单。如今流行着很多深藏“大道理”的小故事，那些道理多半取决于讲道理的人的态度和立场。它们是多变的，因为多变而被随意扭曲，因为扭曲而成为多样选择的理由。在所谓“后现代”的今天，似乎一切东西都成为多样的，人们像浮萍一样漂荡在多样选择的迷雾里，起码的追求也失落在“和谐”的“中庸”里。数学能告诉我们，多样的背后存在统一，极端才是和谐的源泉和基础。从某种意义上说，数学的精神就是追求极端，它永远选择最简的、最美的，当然也是最好的。数学决没有圆滑的道理，也不为模糊的借口留下一点儿空间。

数学生活也浪漫。很多人怕数学抽象，却喜欢抽象的绘画和怪诞的文学。可见抽象不是数学的罪过。艺术家的想象力令人羡慕，而数学家的想象力更多。希尔伯特说过，如果哪个数学家一旦改行做了小说家（真的有），我们不要惊奇——因为那人缺乏足够的想象力做数学家，却足够做一个小说家。懂一点儿数学的伏尔泰也感觉，阿基米德头脑的想象力比荷马的多。我们认为艺术家最有想象力，那是因为我们自己太缺



乏想象力。

数学是明澈的思维。生活里的许多巧合——那些常被有心或无心地质异化为玄妙或骗术法宝的巧合，也许只是自然而简单的数学结果。以数学的眼光来看生活，不会有那么多的模糊。有数学精神的人多了，骗子（特别是那些穿戴科学衣冠的骗子）的空间就小了。无限的虚幻能在数学找到最踏实的归宿，它们“如龙涎香和麝香，如安息香和乳香，对精神和感观的激动都一一颂扬。”（波德莱尔《恶之花·感应》）

数学是奇异的旅行。数学在某个属于它们自身的永恒而朦胧的地方，在那片朦胧的土地上，我们已经看到了三角形的三个内角和等于 180° 度，三条中线总是交于一点而且三分每一条中线；在那片朦胧的土地上，还存在着无数更令人惊奇的几何图形和数字的奇妙，等着我们去和它们相遇。

数学是纯美的艺术。数学家像画家和诗人，都创造“模式”，不过是用思想来创造，用符号来表达。数学的思想，就像画家的色彩和诗人的文字，以和谐的方式组织起来。数学的世界里没有丑陋的位置。在数学家的眼里，自己笔下的公式和符号就像希腊神话里的那位塞浦路斯国王，从自己的雕像看到了爱人的生命。在数学里，在那比石头还坚硬的逻辑里，真的藏着数学家们的美的追求，藏着他们的性情和生命。

数学是精神的自由。惟独在数学中，人们可以通过完全自由的思想达到自我的满足。不论王摩诘的“雪地芭蕉”还是皮格马利翁（Pygmalion）的加拉提亚（Galatea），都能在数学中找到。数学没有任何外在的约束，约束数学的还是数学。

数学是永不停歇的人生。学数学的感觉就像在爬山，为了寻找新的山峰不停地去攀爬。当我们对寻找新的山峰不再感兴趣，生命也就结束了。

不论你是不是知道一点儿（或很多）数学，都可以走进数学圈，孔夫子说了，“知之者不如好之者，好之者不如乐之者。”只要“君子乐之”，就走进了一种高远的境界。王国维先生讲人生境界，是从“望极天涯”到“蓦然回首”，换一种眼光看，就是从无穷回到眼前，从无限



回归有限。而真正圆满了这个过程的，就是数学。来数学圈走走，我们也许能唤回正在失去的灵魂，找回一个圆满的人生。

1939年12月，怀特海在哈佛大学演讲《数学与善》中说，“因为有无限的主题和内容，数学甚至现代数学，也还是处在婴儿时期的学问。如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思想的新特点就是数学理解占统治地位。”这个想法也许浪漫，但他期许的年代似乎太过久远——他自己曾估计，一个新的思想模式渗透进一个文化的核心，需要1000年——我们的希望是，这个过程会快一点儿，更快一点儿。

最后，我们借从数学家成为最有想象力的作家的卡洛尔笔下的爱丽丝和那只著名的“柴郡猫”的一段充满数学趣味的对话，来总结我们的数学圈旅行：

“你能告诉我，我从这儿该走哪条路吗？”

“那多半儿要看你想去哪儿。”猫说。

“我不在乎去哪儿——”爱丽丝说。

“那么你走哪条路都没关系，”猫说。

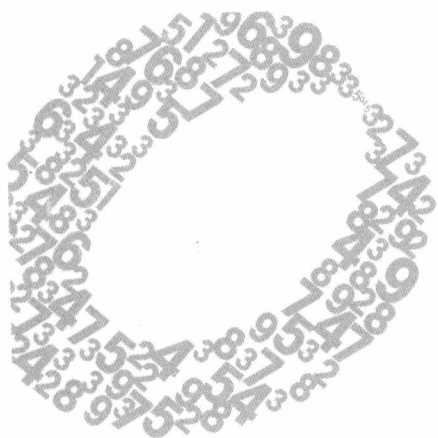
“——只要能到个地方就行，”爱丽丝解释。

“噢，当然，你总能到个地方的，”猫说，“只要你走得够远。”

我们的数学圈没有起点，也没有终点，不论怎么走，只要走得够远，你总能到某个地方的。

李泳

2006年8月



目 录

1	第一章 谁想成为百万富翁
20	第二章 算术的原子
62	第三章 黎曼的数学照虚镜
87	第四章 黎曼假设：从随机素数到规则零点
105	第五章 数学接力赛：黎曼革命的实现
135	第六章 拉马努扬，谜一般的数学家
151	第七章 数学的迁徙：从哥廷根到普林斯顿
179	第八章 思想的机器
209	第九章 计算机时代：从头脑到台式计算机
230	第十章 破解数字和密码
264	第十一章 从规则零点到量子混沌
299	第十二章 拼图玩具中消失的一片
327	致谢
331	进一步的阅读材料
339	网站
341	索引



第一章

谁想成为百万富翁

“关于这列数我们知道什么？好，我们可以来心算……59、61、67……71……这些不都是素数吗？”控制室中弥漫着兴奋的低语。伊莉的脸上短暂地浮现出预感到什么的表情，但是很快的，取而代之的是一种清醒的表情，一种担心被表象干扰而导致愚蠢的、不科学的理解的表情。

——卡尔·萨根 (Carl Sagan), 《接触》(Contact)

1900年8月的一个闷热的上午，巴黎大学拥挤的报告厅中，来自哥廷根大学的大卫·希尔伯特为国际数学家大会作报告。已经是当时最伟大的数学家之一的希尔伯特准备了一场大胆的演讲，他打算讨论的是那些未知的问题，而不是已经证明的结果。由于这不符合传统，当希尔伯特开始展示自己对数学未来的看法时，听众们甚至可以听出他嗓音中的紧张。“在我们之中谁不乐意拉开这块隐藏着未来的大幕，并对未来世纪中科学的下一个进展及其发展的秘密投上关注的一瞥呢？”预示着新世纪的到来，希尔伯特用23个问题对听众提出挑战，他相信这23个问题将为20世纪的数学探索者们设定好方向。

有不少希尔伯特问题在随之而来的世纪中得到了解决，而解决这些问题的杰出数学家就是所谓的“荣誉一族”，其中包括了哥德尔、庞加莱、以及许多用思想改变数学世界的先锋们。但是仍然有一个问题——希尔伯特第八问题，经过了整个世纪仍然无人能攻克，这就是黎曼



假设。

在希尔伯特设下的挑战中，第八问题在他心中有着特殊的地位。有一个关于巴巴罗萨的德国传说，这位受人爱戴的德国国王逝世于第三次十字军东征时期，但是在民间传说中他并没有死去，而是沉睡在基夫霍伊瑟山脉（Kyffhäuser Mountains）的某个山洞中，当德国需要他的时候他就会醒来。因此有人问希尔伯特：“如果你可以像巴巴罗萨那样在500年后醒来，你会做什么？”希尔伯特回答说：“我会问，‘有人证明黎曼假设了吗？’”

在20世纪接近尾声的时候，大部分数学家都接受了这个事实：这颗希尔伯特问题中的宝石不光在本世纪无法解决，也许在希尔伯特沉睡500年后醒来时仍然无法解决。在20世纪第一场国际数学家大会上，希尔伯特那充满未知的革命性的演讲深深地触动了数学界；然而，当大家在筹备20世纪最后一场国际数学家大会的时候，有一个惊喜即将出现。

1997年4月7日，一条特殊的新闻闪现在国际数学界的网络中。在即将于次年举办的德国柏林国际数学家大会的网页上，有人宣称证明了数学中的圣杯——黎曼假设。由于黎曼假设问题是数学的核心问题，如果这条新闻是真的，它将产生极其深远的影响。因此所有收到电子邮件的数学家都紧张地期待着能了解这个最重要问题的证明。

这封邮件源自恩里克·邦比艾里（Enrico Bombieri）教授，从信息的来源方面讲，再没有比邦比艾里教授更好的人选。邦比艾里教授是黎曼假设的守护者之一，他目前就职于声望极高的普林斯顿高等研究院，这里也曾经是爱因斯坦和哥德尔工作过的地方。尽管他在电子邮件中说得很婉转，但是数学家仍然不敢掉以轻心。

邦比艾里在意大利长大，受家族繁荣的葡萄园生意的影响，他的品位不凡，喜欢追求奢华的生活，因此同事们都亲切地称他为“数学贵族”。年轻时，他总是开着炫目的跑车参加欧洲学术会议，出尽了风头。有一则传言说他曾六次参加意大利24小时拉力赛，对此他并没有反驳，而是十分高兴地默认这一点。20世纪70年代，由于在数学上的成功，



邦比艾里获得了普林斯顿的邀请。到普林斯顿后，他仍然不改当年本色，只是热情从拉力赛转到了绘画（尤其是肖像画）。

然而邦比艾里最大的爱好却是创造性的数学，尤其是黎曼假设的挑战。早熟的他在15岁首次读到黎曼假设的时候，就已经深深地被它迷住了。他在翻阅身为经济学家的父亲的数学书籍时，就深深地被自然数的美妙性质迷倒，并将其收集到自己的知识宝库中。邦比艾里知道黎曼假设是数论中最深刻也是最基本的问题，为此他的父亲允诺他，如果他能解决黎曼假设就买一部法拉利给他，从此他对黎曼假设的热情一发不可收拾，虽然这是他父亲试图阻止他一意孤行的绝望尝试。

根据邦比艾里的电子邮件，他再也无缘得到法拉利。信的开头如下，“阿兰·科纳（Alain Connes）在上周三于高等研究院所做的报告中提到了一些有趣的进展”。数年之前，阿兰·科纳转向研究黎曼假设的新闻曾震惊了数学界。科纳是该领域的革命家之一，如果说邦比艾里是路易十六，那么科纳就是温和派的罗伯斯比尔^①。他具有一种超凡的气质，他的热情与其他数学家平静、沉稳的形象相去甚远。他有一种使别人信服其观点的能力，他的讲座令人着迷。他的追随者们视他为领袖，他们乐于追随他并为其挺身而出，来保护他们的英雄免受保守派的进攻。

科纳就职于巴黎的高等科学研究院（IHES, Institut des Hautes Études Scientifiques），这相当于法国的普林斯顿高等研究院。自从1979年到此以来，科纳已经创造了一种全新的语言来理解几何。科纳从不怕将数学带到极端抽象的境地，甚至大部分习惯在家中利用高度抽象的数学概念来理解世界的数学家，都不愿面对科纳提出的抽象革命。然而正如他向那些怀疑他的古板理论是否必要的人展示的那样，他的几何学新语言包含着许多真实量子物理世界中的线索。如果这样做会给数学主体部分带来恐惧，那也无所谓。

^① Maximilien Robespierre, 1758~1794, 法国革命家，是法国大革命时期重要的领袖人物，是雅各宾派政府的实际首脑之一。（本文中的脚注如不加说明，均为译者所加。）

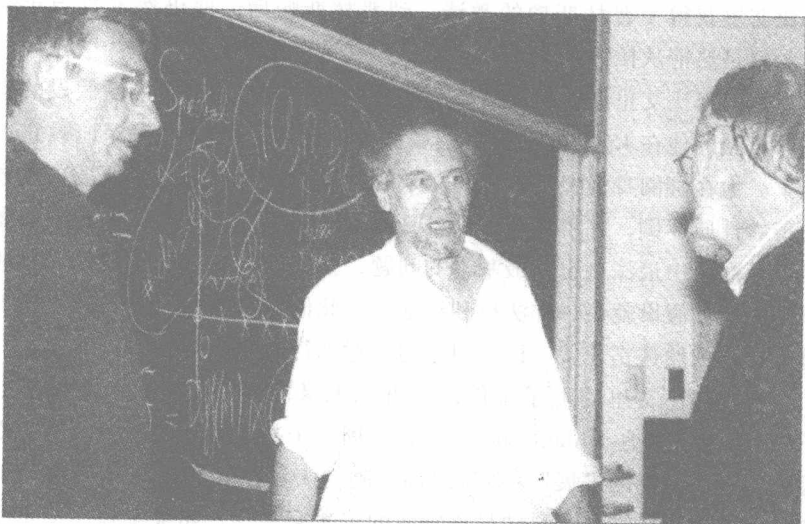


图1 阿兰·科纳，IHES 及法兰西学院教授

科纳相信，他的新几何不仅可以揭开量子物理世界的面纱，而且可以解释黎曼假设——有关于数的最神秘定理。人们对其大胆的信念纷纷表示惊奇和震惊，这反映了他根本不受传统的约束，敢于闯入数论的核心并与数学中最困难的难题正面交锋。自从他于20世纪90年代中期参与这项工作之后，大家都认为，如果还有人能解决如此著名的难题，那一定是阿兰·科纳。

但看起来并非科纳找到了复杂拼图的最后一片，邦比艾里接着解释道，而是听众中的一位年轻物理学家灵光一闪，突然明白了如何运用他的“超对称费米-波色系统”来解决黎曼假设。许多数学家并不明白这个混合众多专业术语的名词的真正含义，但是邦比艾里解释道，它描述了“由具有相反自旋的 anyon 粒子和 moron 粒子^①混合而形成的接近绝

^① 这是邦比艾里自造的两个新词，表示两种新粒子，在实际中并不存在，详见后文。



对零度的热力学系综这样的物理现象”。虽然这一番话听上去仍是模糊不清，但这毕竟是数学中最难问题的解答，大家也不期望有一个简单的解决方案。据邦比艾里的邮件，经过六天不间断的工作，以及一种新的计算机语言 MISPARE 的帮助，这位年轻的物理学家最终解决了这个数学难题。

邦比艾里的邮件如此结束，“哇！请尽可能广泛地转发此消息。”尽管一位年轻的物理学家证明了黎曼假设，有点儿异乎寻常，但并未引起太大的惊奇，因为数十年来大部分数学家均发现该问题与物理学联系紧密。作为一个数论核心问题，黎曼假设近年来越来越多地与粒子物理中的问题产生了意料之外的共鸣。

数学家纷纷改变行程飞到普林斯顿，希望能分享这一刻。人们也许还记得数年之前，同样的激动场面发生在另一位英国数学家安德鲁·怀尔斯（Andrew Wiles）宣称给出费马大定理^①证明的时候。1993年6月，怀尔斯在剑桥作报告时宣称费马大定理是正确的，即 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n > 2$ 时无解。当怀尔斯放下粉笔的那一刻，报告厅中立刻充满了香槟和闪光灯。

数学家们都明白，对于数学的未来而言，证明黎曼假设有着比知道费马方程无解远远大得多的影响。如同邦比艾里 15 岁就知道的那样，黎曼假设本质上是试图理解数学中最基本的元素——素数。

素数是算术的原子，是那些不能写成两个较小的数之乘积的数。13 和 17 就是素数，而 15 不是，因为 15 等于 3 乘以 5。素数就是镶嵌在数之宇宙上的宝石，而这个宇宙已经被数学家研究了数个世纪。对于数学家而言，2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … 这些无穷无尽的数存在于一个与我们的现实世界完全独立的空间中，它们是大自然给数学的恩赐。

素数对于数学的重要性在于，它们的乘积可以生成其他的数。每个非素数的数（称为合数）都可以写成素数的乘积。物理世界中的每一个

^① 也称为费马最后定理（Fermat Last Theorem）。



分子都是由元素周期表中的原子构成，素数表就是数学中的元素周期表。在数学实验室中，素数 2, 3, 5 就相当于氢、氦、锂。掌握了这些基本元素之后，数学家就有希望找到新方法，来标注复杂数学世界中的前进道路。

抛开本身的简单性和基本性，素数仍然是许多数学家研究的最神秘对象。其中一个分支是研究素数的分布规律，这对于数学家而言是一个根本挑战。如果你观察素数分布表，就会发现想要预测下一个素数何时出现几乎是不可能的。素数表的无序、随机，使得人们无法找出决定下一个素数的线索。素数表反映了数学的心跳，只是这个心跳的节奏被加了咖啡因的鸡尾酒所打乱。



图2 小于 100 的素数，数学的不规则心跳

是否能找到一个生成素数的公式？或是某个奇妙规则能告诉你第 100 个素数是什么？自古以来这些问题就折磨着数学家。经过 2000 多年的努力，要找出一个直观的素数分布仍然是无望的。数个世纪以来，人们一直倾听着素数自身的心跳，两下、三下、然后是五下、七下和十一下，如此继续下去，于是人们开始相信这些随机的心跳是没有任何内在逻辑的随机的噪音。尽管数学的核心是追求有序性，但是在素数表中，数学家唯一能观察到的只是无序。

大自然如何选择素数，也许根本没有一个合理的解释，但是数学家无法坦然接受这一结果。如果失去了结构，没有了优美的简单性，那数学也就不值得研究了。听着这样无序的噪音从来就不是一件愉快的事情，正如法国数学家亨利·庞加莱（Henri Poincaré）所写的，“科学家从不会为了有用而研究大自然；科学家研究大自然只因为能在过程中获得乐趣，而乐趣正来自于大自然的优美；如果大自然不是优美的，那它根本不值得被了解；如果大自然不值得被了解，生命也不再有任何



意义。”

也许有人觉得素数的不规则性只出现在最初，慢慢地就会稳定下来。但事实并非如此，情况只会随着数的增大而更糟。在此我们给出 10 000 000 上下 100 个数中的素数，首先是小于 10 000 000 的素数：

9 999 901 9 999 907 9 999 929 9 999 931
9 999 937 9 999 943 9 999 971 9 999 973
9 999 991

然后让我们看看大于 10 000 000 的素数有多少：

10 000 019 10 000 079

对于这种情况，猜出其中蕴涵的公式几乎是不可能的。与其说素数序列有序，倒不如说它是随机的更恰当。就如同已知前 99 次掷出的硬币朝向，你还是不能预测第 100 次究竟是哪面朝上。素数也是同样的不可预知。

素数问题给数学家带来了该学科中最不寻常的紧张状态。一方面，一个数不是素数就是合数，你将硬币翻过来也不可能让某个素数被更小的数整除；同时不可否认，素数表看上去就是随机选取的数列。物理学家逐渐接受一个观点，即量子骰决定了宇宙的命运，量子骰的每次抛出都随机决定哪里存在物质。但是如果承认大自然是通过掷骰子来决定数学中这些最基本的数的命运，将是一件非常尴尬的事。数学家不可能接受随机和无序。

抛开其随机性，素数的永恒性和普适性更胜于数学的其他概念。无论我们对它们的认识进步到何种程度，它们始终都在那里。剑桥的数学家哈代 (G. H. Hardy) 在其著名的《一个数学家的自白》中说道，“317 是个素数，并非因为我们这样认为，也非因为我们的思维是以这样或那样的方式形成，而是因为它原本如此，因为数学实在 (mathematical reality) 就是这样建立的^①。”

^① 凡本文中涉及哈代在《一个数学家的自白》中的引文均引自江苏人民出版社 1999 年版《科学家的辩白》(哈代、维纳、怀特海著，毛虹等译)。



某些哲学家对于世界也抱有同样的柏拉图主义观点——这是对超越人类存在的、绝对和永恒的实在的信念——但是对我而言，这正是他们为什么是哲学家而不是数学家的原因。这里有一段阿兰·科纳（就是邦比艾里邮件中出现的那个人）和神经生物学家让-皮埃尔·项杰（Jean-Pierre Changeux）在《关于思想、物质和数学的对话》中的富有感染力的对话，这本书显露出紧张的气氛，即数学家认为数学的存在性是超越思想的，而神经学家则试图反驳：“为什么我们不能在天空中看见金色的‘ $\pi = 3.1416$ ’字样，或是在水晶球的反光中看见‘ 6.02×10^{23} ’？”科纳坚持“确实存在着独立于人类思想的、原始的、永恒的数学实在”，并且在那个世界中，我们可以找到永恒不变的素数表。项杰对此表达了自己的失望之情。但科纳坚持认为数学“毫无疑问是仅有的普适语言”。在另一个世界中完全可以存在一种不同的化学或生物学，但是无论你在哪个星系中计数，素数都还是素数。

在卡尔·萨根的著名小说《接触》中，外星人利用素数来联系地球上的生命。书中的女主人公伊莉·阿若薇（Ellie Arroway）在 SETI（Search for Extraterrestrial Intelligence，地外文明搜索）工作，倾听来自宇宙中的电波。某天晚上，当射电望远镜指向织女星的时候，他们从背景辐射中收到了奇怪的脉冲。伊莉花了一些时间分析电波讯号中的规律，2次脉冲后停一下，紧接着是3次、5次、7次、11次，就这样沿着素数一直到907，然后重新循环。

这个宇宙的鼓点演奏出一首地球人熟悉的音乐。伊莉意识到只有智慧生命才能送出这样的讯号，“难以想象这些射电脉冲居然传送了如此有规律的数学讯号，正是这些素数吸引了我们的注意力。”如果这些外星人没有持续十年不断地发送这些幸运的讯号，伊莉肯定不能从背景辐射中辨认出它。尽管这些素数如同彩票中奖号码那样随机，但是它们普适的不变性决定了外星广播如何选择每个数字，正因如此伊莉认识到这种排列是智慧生命的标志。

利用素数来传递信息不光出现在科幻小说中。奥利弗·萨克斯



(Oliver Sacks) 在《错把太太当帽子的人》^① 中记录了这样一件事，一对 26 岁的双胞胎，约翰和麦克尔，他们通过交换六位素数进行交流。萨克斯首次发现他们在屋角秘密交换着数字时，“他们乍看上去像两个品酒的专家，正在分享着少见的口味。”起初萨克斯并不知道他们在干什么，直到他破解了他们的密码之后。他默默地记了一些八位的素数并在他们下一次交流的时候，偷偷地加入进来。双胞胎先是吃了一惊，然后就陷入沉思，最后他们欢呼起来，因为他们找到了下一个素数。萨克斯求助于素数表来找出素数的时候，双胞胎是如何找到素数的，这显然还是个谜。是不是这些孤僻的天才掌握了某些秘密公式，而这些公式却是数学家错失的？

邦比艾里特别喜欢这个双胞胎的故事：

听到这个故事，我无法掩饰自己对大脑功能的敬畏和惊奇。但是我想问，我的那些非数学家朋友是否也有同样的能力；或者他们曾有过一些如这对双胞胎所拥有的那些奇异的、惊人的和超凡的奇妙天赋。他们是否知道，数学家奋斗了几百年，就是为了做约翰和麦克尔在一起做的事情：生成和识别素数。

在有人能找出他们是如何做到这一切的原因之前，这对双胞胎在 37 岁时被他们的医生分开，因为医生认为他们独有的数字语言阻碍了他们的发展。如果这些医生听过大学数学系公共休息室里的神秘语言之后，说不定也会推荐将这些数学家关禁闭。

现在看来，这对双胞胎可能是使用一个基于费马小定理的技巧来判断一个数是否为素数。双胞胎在电视脱口秀节目中表演的技巧和自闭症天才迅速判断出 1922 年 4 月 13 日是星期四的方法类似，这些技巧都使用了一种叫做时钟算术或模算术的方法。即使他们没有素数公式，他

^① *The Man Who Mistook His Wife for a Hat* 是神经医学专家奥利弗·萨克斯的通俗文学著作，其中记载了他碰到的临床案例。