少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材（试用）

概率统计

教育部少数民族高层次骨干人才
硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

全一册

国家行政学院出版社
红旗出版社

少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材(试用)

概率统计

(全一册)

教育部少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

主 编 陆传赉

国家行政学院出版社
红旗出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率统计/教育部《少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材》编写委员会编. －北京：国家行政学院出版社，2007.2

少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材. 试用

ISBN 978－7－80140－548－7

Ⅰ.概… Ⅱ.教… Ⅲ.①概率论－研究生教育－教材 ②数理统计－研究生教育－教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第021010号

概率统计

（全一册）

教育部少数民族高层次骨干人才硕士研究生基础强化培训教材编写委员会 编

*

国家行政学院出版社
红旗出版社 出版

北京市海淀区长春桥路6号(100089)

新华书店总经销

开封市第一印刷厂印刷

880×1230毫米 1/16开本 24印张 480千字

2007年2月第1版 2007年2月第1次印刷

印数：1－1000

ISBN 978-7-80140-548-7/O·47 定价：38.40元

教育部“少数民族高层次骨干人才”
硕士研究生基础强化培训
教材编写委员会

前 言

大力培养少数民族高层次骨干人才是实践“三个代表”重要思想、落实科学发展观、全面建设小康社会的迫切需要，是贯彻党的民族政策、增强民族团结、维护祖国统一的现实需要，是贯彻科教兴国战略、推进西部大开发战略的重大举措，是内地高校责无旁贷的政治任务。

为顺利实施国家“少数民族高层次骨干人才”培养计划，适应“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训教学的需要，教育部民族教育司组织编写了《古典文学》、《现当代文学》、《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》、《信息技术》、《英语》、《马克思主义理论》、《民族理论与民族政策》等“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训系列教材。本套教材的使用对象为参加“少数民族高层次骨干人才”硕士研究生基础强化培训的学生。

按照教育部对硕士研究生基础强化培训的教学要求，本套教材参照近年来少数民族本科毕业生的普遍水平，以及少数民族学生在研究生入学考试中的重点难点，遵循强化基础、突出重点的原则进行编写，使这套教材的基础课程综合水平达到攻读硕士研究生课程的基本要求，从而全面提高学生的科学和人文素养，增强学生的实践能力和科研创新能力，为在西部大开发和民族地区发展中的骨干打下坚实的知识基础。

由于时间仓促，教材中难免有疏漏或不足之处，希望各地有关学校在试用中提出宝贵意见，以待今后进一步修订。

编写说明

概率论与数理统计是工程技术、经济管理及人文科学有关专业的一门重要的基础理论课。它的基本内容与方法不仅在数学的各个分支中有很多应用，而且在科技与管理、人文科学有关领域均有广泛的应用。作为一门基础课，其目的是通过教学使学生掌握概率论与数理统计的基本理论与方法，培养其逻辑思维与解决实际问题的能力。重点是强基固本，强化课堂教学与课后练习相结合，使学生的基础综合水平接近或达到攻读硕士研究生课程的基本要求。

本书既是教材又是辅导书，既考虑到课程内容的内在联系又照顾到少数民族研究生基础培训学员的特点，以提高学生的综合素质与创新能力为目标。

本书内容主要包括本科的概率论与数理统计的基本内容与方法，还包括今后学习研究生课程的一些基础。书中编写了各章内容提要、范例分析以及习题答案与提示，供学生自学、练习时参考。本书注重基本理论与方法，条理清楚，论证严密，例题较多，便于学生自学。

本教材的编写得到教育部民族教育司领导的大力支持与帮助，得到国家行政学院出版社和红旗出版社的领导与责编以及北京邮电大学民族教育学院朱建平、樊玲老师的支持与帮助。本书经西南大学陈映萍教授与北京邮电大学牛少彰、闵祥伟教授的认真审阅，提出许多宝贵意见和建议。在此一并向他们表示衷心的感谢。

书中不足之处，诚恳地希望同仁和读者批评指正。

编　者

目 录

第一章

随机试验与随机事件的概率

§1.1 随机试验、样本空间、随机事件

在自然界和人类的社会活动（包括科学实验、生产劳动以及日常生活）中普遍存在两类现象. 一类是在一定条件下必然发生（或出现）的现象，即确定性现象，例如，“在标准大气压下，纯水加热到100℃时必然沸腾”，“火线、地线相接（碰）必然短路”，“手机的电池用完必然不能发短信或打电话”，“断线的风筝必然坠落”，“用氟制冷的空调器在氟亏欠时必然不能制冷”等. 另一类现象是在一定条件下可能发生、也可能不发生的现象，即随机现象. 例如有手机的同学在中午可能会接收到短信，也可能不会接收到短信，某时刻在学院路车站等候公共汽车的乘客可能多于10人也可能少于10人，某电话总机在一分钟内接到的电话呼叫次数可能多于15次也可能少于15次，某种药物对一部分人疗效显著，对另一些人却作用不大，同一批棉花纺出的纱的强度可能不一样，同一批铁矿石炼出的铁的含碳量不完全相同，某人编好的密码也可能会被人在短期内破译，也可能不会被破译. 同一射手几次的打靶成绩可能不同，某运动员历次比赛的成绩不完全一样等. 上述现象是大量的客观地存在着，而且在试验或观察之前不能预先确定其发生的结果. 虽然，个别试验或观察这类现象的结果是无章可循的，但在大量重复试验或观察下，这类现象所呈现的结果却遵循一定规律性，我们称之为统计规律，请参见几例以佐证.

例1 抛掷一枚匀称的硬币，出现正面或反面是一个随机现象，当人们多次地重复抛掷同一枚匀称硬币时，发现出现正面的次数约占抛掷总次数的一半. 历史上许多著名统计学家，如蒲丰（Buffon）、皮尔逊（Pearson）等人曾用实验证实这个统计规律，表1.1即为他们的实验结果.

表 1.1

实验者	抛掷次数	出现正面次数	频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
德·摩根	2 048	1 048	0.511 7
德·摩根	2 048	1 017	0.496 6
德·摩根	2 048	1 039	0.507 3
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

例 2 曾有人对十月革命前的俄国每年因地址不详、邮编不准或其他原因而无法投递的信函作过统计，发现每年这种信函数目在全体信函中所占的比重多年相近似（参见表1.2）.

例 1.2

年份	信函总数 n（以百万为单位）	无法投递的信函数 m	$\frac{m}{n}$（百万分数）
1906	983	54 861	55.81
1907	1 076	53 500	49.72
1908	1 214	59 627	49.12
1909	1 357	62 088	45.75
1910	1 507	76 614	50.84

例 3 考察容器内某种气体对器壁的压力，它是由气体分子对器壁的冲击汇合而成的. 因气体中每个分子受着其他分子的碰撞而不断地改变其运动速度和方向，即每个分子的运动轨迹是随机的. 但因气体分子数量巨大，它们的整体作用由于相互抵消各自的随机影响而呈现出明显的规律性——在器壁各处压强相等.

概率论是数学的一个重要分支，它是一门从定量的角度研究随机现象潜在的统计规律性的学科.

一、随机试验与样本空间

概率论中将对随机现象的观察或为观察随机现象而进行的试验称作随机试验. 并约定，随机试验应具备以下三个特征：

（1）试验在相同条件下是可重复进行的；

（2）试验的全部可能结果不止一个，且事先可以知道试验的所有可能结果；

（3）每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个，至于是哪一个结果则事前不能确定.

为简单计，今后凡是随机试验皆简称试验，并记之以英文字母 E. 称试验的每个可能

结果为样本点，并称全体样本点的集合为试验的样本空间，样本点及样本空间分别用希腊字母 ω 和 Ω 表示.

例 4 给出下述随机试验 $E_1 \sim E_8$ 的样本空间.

E_1：将一硬币抛掷 3 次，观察正面 H，反面 T 出现的情况，则样本空间为

$\Omega_1=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$.

E_2：从一副扑克牌（52 张）中任选 13 张牌，观察得牌情况，则样本空间为

$\Omega_2=$52 张牌中选 13 张牌的各种组合的全体，共有 C_{52}^{13} 个元素.

E_3：一名射手向某目标射击，直至命中目标为止，观察其命中目标所进行的射击次数. 从理论上讲，只要不能击中目标射手就须一直射击下去，则样本空间为

$$\Omega_3=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

E_4：观察某电话交换台在某时间区间内接到的呼叫次数，则样本空间为

$$\Omega_4=\{0, 1, 2, \cdots\}.$$

E_5：观察并记录某市每日中午 12 点时的气温. 假设该市这一时刻的气温不会低于 -4℃，也不会高于 35℃，则样本空间为

$$\Omega_5=\{\omega \mid \omega \in [-4, 35]\}.$$

E_6：从一批电脑中，任取一台观察无故障运行时间，则样本空间为

$$\Omega_6=\{t \mid 0 \leqslant t < \infty\}.$$

E_7：向一平面区域 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 10\}$ 内随机投掷一点，观察落点 P 的坐标（假定点必落在 D 上），则样本空间为

$$\Omega_7=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 10\}.$$

E_8：掷一颗骰子，观察出现的点，则样本空间为

$$\Omega_8=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

由上例可见，样本空间可以仅含有有限多个样本点，如 Ω_1，Ω_2 与 Ω_8，也可含有可列无穷多个样本点，如 Ω_3 与 Ω_4，更可含有不可列无穷多个样本点，如 $\Omega_5 \sim \Omega_7$（注：有的书上将样本空间称为基本事件空间，将样本点称为基本事件）.

二、随机事件

随机试验的某种结果称为随机事件，简称事件，以大写英文字母 A，B，C，D，…记之. 如例 4 中的试验 E_4，若以 A 表示"在某时间区间内，某电话交换台接到的呼叫数不超过 10 次"，即 $A=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$ 是一个事件，它含有 0～10 共 11 个样本点. 用 B 表示"在某时间区间内，某电话交换台接到的呼叫数在 100 到 200 之间"，即 $B=\{100, 101, \cdots, 200\}$ 也是一个事件，它含有 100～200 共 101 个样本点. 无论事件 A 与 B 均为样本空间 Ω_4 的子集. 由此可知既然事件的本质是样本空间的子集，那么指出下面这一点就显得十分重要，这就是：当且仅当该子集中的某个元素（即样本点）在试验中出现时此事件发生.

作为事件的特例，我们称试验必然会出现的结果为必然事件，通常用大写希腊字母 Ω 表示. 例如，例 4 的 E_8 中"点数小于 7"应是一种结果，其发生是必然的，称之为必然事件. 显然，必然事件含有样本空间的全部样本点，所以用表示样本空间的字母 Ω 表示必然

事件．此外，将不可能出现的结果称作不可能事件，记作$\varnothing$．E_8 中“点数大于 6”就是一个不可能事件．显然，不可能事件不含有任何样本点．

三、事件的关系与运算

既然事件是样本空间的某种子集，所以集合论中集合的包含、相等等概念以及集合的运算对事件都应适用．

1. 事件的包含

作为集合，$A\subset B$ 即“A 包含于 B”是说，A 中元素都在 B 中．于是，作为事件，既然 A 的样本点都在 B 中，那么当 A 的样本点出现于试验结果之中即 A 发生时，B 当然也就发生了．可见 $A\subset B$ 表示“A 的发生必导致 B 的发生”．

2. 事件相等

作为集合，$A=B$ 是说“$A\subset B$ 且 $B\subset A$”．于是，作为事件，$A=B$ 就是“A 的发生必导致 B 的发生，同时 B 的发生也必导致 A 的发生”．相等的事件含有相同的样本点．

3. 事件的并（和）

作为集合，$A\cup B$ 中的元素或者属于 A，或者属于 B（当然有的可能同时属于 A，B）．所以事件的并 $A\cup B$ 表示“A 或 B 至少有一个发生”．它是由属于 A 或属于 B 的样本点组成的集合．

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的并$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示“A_i（$i=1$，2，…，n）中至少有一个发生”；可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的并$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$表示“$A_i$（1，2，…，$n$，…）中至少有一个发生”．

4. 事件的交（积）

作为集合，$A\cap B$ 由 A，B 的公共元素组成．所以事件的交 $A\cap B$ 应表示“A，B 同时发生”．$A\cap B$ 常简记作 AB．

类似地，可列个事件的交$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$表示“可列个事件 A_i（1，2，…，n，…）同时发生”．

5. 逆事件（对立事件）

作为集合，A 的余集$\overline{A}$由全集 Ω 中所有不属于 A 的元素组成．于是，作为事件，$\overline{A}$当且仅当 A 不发生时发生，称作事件 A 的逆事件．利用上述事件的并和交的运算符号，有

$$A\cup\overline{A}=\Omega \text{ 及 } A\overline{A}=\varnothing.$$

6. 事件的差

作为集合，A 与 B 的差集 $A-B$ 由 A 中全部不属于 B 的元素组成．于是，事件的差 $A-B$ 表示“A 发生而 B 不发生”即 $A-B=A\overline{B}$．

7. 互斥事件（互不相容事件）

集合论中，若 $AB=\varnothing$，则表示 A，B 没有公共元素．作为事件，若 $AB=\varnothing$，则表示 A，B 不同时发生，称 A 与 B 互斥（互不相容）．

为读者掌握上述概念，今将集合论中的集合的关系和运算与概率论中的事件的关系和

运算对应起来，如表 1.3 所示.

表 1.3

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间；必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A\subset B$	集合 B 包含集合 A	事件 B 包含事件 A（事件 A 发生则事件 B 必发生）
$A=B$	集合 A 与集合 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和事件（事件 A 与 B 至少有一个发生）
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 的交集	事件 A 与事件 B 的积事件（事件 A 与 B 都发生）
$A-B$	集合 A 与集合 B 的差集	事件 A 与事件 B 的差事件（事件 A 发生而 B 不发生）
$\overline{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的逆事件或对立事件（A 不发生）
$AB=\varnothing$	集合 A 与集合 B 没有公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容或互斥（A，B 不能同时发生）

以上事件间的关系与运算可用文氏（Venn）图来直观地表示. 若用平面上的一个矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示样本点，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则 A 与 B 的关系和运算如图 1-1 所示.

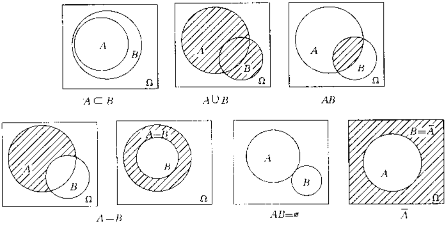

图 1-1

8. 事件的运算律

事件的运算满足以下运算律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$，$A\cup(BC)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 德·摩根（De Morgan）律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

一般地对有限个事件及可列无穷个事件有分配律

$$A\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i,\quad A\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}AB_i.$$

及对偶律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例 5 某人连续三次购买体育彩票，每次一张，令 A，B，C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖的事件，试用 A，B，C 及其运算表示下列事件：

(1) 第三次未中奖；(2) 只有第三次中了奖；(3) 恰有一次中奖；(4) 至少有一次中奖；(5) 不止一次中奖；(6) 至多中奖两次；(7) 不多于一次中奖.

解 (1) $\overline{C}$. (2) $\overline{A}\overline{B}C$. (3) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

(4) $A\cup B\cup C$. (5) $AB\cup AC\cup BC$. (6) $\overline{ABC}$.

(7) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$ 或$\overline{AB\cup AC\cup BC}$.

§1.2 事件的概率

一、频率与概率

定义 1.2.1 设 E 为一随机试验，A 为 E 的一事件，在相同条件下将 E 独立地重复进行 n 次，以 n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中发生的次数，称 n_A 为 A 在这 n 次试验中发生的频数，称比值$\frac{n_A}{n}$为事件 A 的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1.2.1}$$

例如将一硬币抛 100 次正面出现 52 次，那么“出现正面”这一事件在这 100 次试验中的频率为 0.52.

由定义，易见频率具有下列性质：

(1) 对于任一事件 A，有

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1; \tag{1.2.2}$$

(2) $f_n(\Omega)=1$； (1.2.3)

(3) 若 A_1，A_2，…，A_m 互不相容，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i). \tag{1.2.4}$$

事件 A 发生的频率表示 A 发生的频繁程度，一般地，A 发生的可能性愈大，在多次重复试验中 A 的发生会愈频繁，即 A 的频率 $f_n(A)$ 会愈大. 反之若 A 的频率愈大表明 A 发生的可能性也愈大. 因此频率与概率应有紧密的关系.

先看下面的例子.

将一枚硬币抛 20 次，200 次，2 000 次，各做 15 遍，得到如表 1.4 的数据（其中 n_H 表示正面出现的次数）.

表 1.4

试验序号	$n=20$		$n=200$		$n=2\,000$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	14	0.7	104	0.520	1 010	0.505 0
2	11	0.55	91	0.455	990	0.495 0
3	13	0.65	99	0.495	1 012	0.506 0
4	7	0.35	96	0.480	986	0.493 0
5	14	0.70	99	0.495	991	0.495 5
6	10	0.50	108	0.540	988	0.494 0
7	11	0.55	101	0.505	1 004	0.502 0
8	6	0.30	101	0.505	1 002	0.501 0
9	9	0.45	101	0.505	976	0.488 0
10	9	0.45	110	0.550	1018	0.509 0
11	9	0.45	108	0.540	1 021	0.510 5
12	6	0.30	103	0.515	1 009	0.504 5
13	6	0.30	98	0.490	1 000	0.500 0
14	10	0.50	101	0.505	998	0.499 0
15	13	0.65	109	0.545	988	0.494 0

从表 1.1，表 1.2 及表 1.4 可见，尽管 n 次试验中事件 A 发生的频数 n_A 不是一个固定的数，从而频率 $f_n(A)$ 也不是一个固定的数，但当试验的次数 n 较大时，频率 $f_n(A)$ 会趋于稳定，频率的稳定值反映了事件 A 发生的可能性大小，故而引人概率的统计定义.

定义 1.2.2 在相同条件下所做的 n 次试验中，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 当 $n\to\infty$ 时稳定在某常数 p 附近，称此常数 p 为事件 A 发生的概率，记作

$$P(A)=p=\lim_{n\to\infty}f_n(A). \tag{1.2.5}$$

显然，这个 $P(A)$ 满足式（1.2.2）～（1.2.4）.

这样定义是否合理？我们将在第五章加以适当的解释.

二、古典概型

设试验 E 的样本空间有有限多个样本点：$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\}$，且每个样本点出现的可能性相同．称此试验为古典概型．由此引入概率的古典定义.

定义 1.2.3 设 E 是含有 n 个样本点的古典概型，A 是由 m 个样本点组成的随机事件，称

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{A\text{ 的有利场合的数目}}{\text{样本点总数}} \tag{1.2.6}$$

为 A 的古典概型概率．易知古典概型概率具有下述性质：

（1）对于任一事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1; \tag{1.2.7}$$

（2）
$$P(\Omega)=1; \tag{1.2.8}$$

（3）若 A_1，A_2，…，A_m 两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i). \tag{1.2.9}$$

当一个试验被确认是古典概型之后，余下的便是样本点的计数问题，下面介绍两个有关计数的重要原理：乘法原理和加法原理.

乘法原理 若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 有 n_2 种方法，则进行 A_1 过程后再接着进行 A_2 过程共有 $n_1\times n_2$ 种方法（图 1-2）.

加法原理 若进行 A_1 过程有 n_1 种方法，进行 A_2 过程有 n_2 种方法，假定 A_1 过程与 A_2 过程是并行的，则进行过程 A_1 或过程 A_2 的方法共有 n_1+n_2 种（图 1-3）

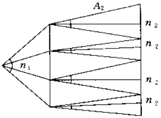

图 1-2

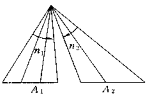

图 1-3

显然这两条原理可以拓广到多个过程的场合.

在后面的例题中要用到排列、组合的概念及常用公式.

1. 排列

从包含有 n 个不同元素的总体中取出 r 个来进行排列，这时既要考虑到取出的元素也要顾及其取出顺序.

这种排列可分为两类：第一种是有放回选取；另一种是不放回选取.

（1）在有放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列，这种排列称为有重复的排列，其总数共有 n^r 种.

（2）在不放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列，其总数为

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \tag{1.2.10}$$

这种排列称为选排列，特别当 $r=n$ 时，称为全排列.

（3）n 个元素的全排列数为 $P_n=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$.

2. 组合

（1）从 n 个不同元素中取出 r 个元素而不考虑其顺序，其不同取法之数称为组合数，其总数为

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}, \tag{1.2.11}$$

这里 C_n^r 是二项展开式 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^r b^{n-r}$ 的系数.

（2）若 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，把 n 个不同的元素分成 k 个部分，第一部分 r_1 个，第二部分 r_2 个，…，第 k 部分 r_k 个，则不同的分法有

$$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_k!} \tag{1.2.12}$$

种，上式中的数称为多项系数. 因为它是 $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ 展开式中 $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$ 的系数，当 $k=2$ 时，即为组合数.

（3）若 n 个不同元素中有 n_1 个带足标“1”，n_2 个带足标“2”，…，n_k 个带足标“k”，

且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，从这 n 个元素中取出 r 个，使得带有足标"i"的元素有 r_i 个 $(1\leqslant i\leqslant k)$，而 $r_1+r_2+\cdots+r_k=r$，这时不同取法的总数为

$$C_{n_1}^{r_1}C_{n_2}^{r_2}\cdots C_{n_k}^{r_k}, \tag{1.2.13}$$

这里当然要求 $r_i\leqslant n_i$

3. 一些常用等式

把排列公式推广到 r 是正整数而 n 是任意实数 x 的场合，有时是需要的，这时记

$$P_x^r=x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1). \tag{1.2.14}$$

同样定义

$$C_x^r=\frac{P_x^r}{r!}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{r!}. \tag{1.2.15}$$

及 $0!=1$，$C_x^0=1$. 对于正整数 n，若 $r>n$，则 $C_n^r=0$.

这样一来二项系数有性质

$$C_n^k=C_n^{n-k}, \tag{1.2.16}$$

$$C_{-a}^k=(-1)^kC_{a+k-1}^k. \tag{1.2.17}$$

由于

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^rx^r,$$

故

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n. \tag{1.2.18}$$

利用幂级数乘法又可以证明

$$C_a^0C_b^n+C_a^1C_b^{n-1}+\cdots+C_a^nC_b^0=C_{a+b}^n. \tag{1.2.19}$$

特别地

$$C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+\cdots+C_n^nC_n^0=C_{2n}^n, \tag{1.2.20}$$

即

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n. \tag{1.2.21}$$

下述三类基本的古典概型概率的计算问题，即所谓"抽球问题"、"分房问题"和"随机取数问题"，对于解决古典概型概率的计算问题是特别重要的.

例 6 袋中有 6 只红球 3 只白球，从中任意取出 3 只球，取球方式为

(1) 不放回抽样：每次取出 1 只球，取后球不放回，连取 3 次；

(2) 放回抽样：每次取出 1 只球，记下球的颜色后放回袋中，再作下次抽取，连取 3 次.

求事件 $A=$"恰取到 3 只红球"及 $B=$"恰取到 2 只红球"的概率.

解 此类试验一般都认为袋中球的大小是一样的，抽取之前球已被充分搅匀，从而任意 3 只球被取出的可能性都一样，视任意取出的 3 只球为一个样本点，此试验为古典概型.

(1) 此时样本点与取球的次序有关（即是排列），易知

$$n=P_9^3,\quad n_A=P_6^3.$$

为计算 n_B，注意到样本点是排列，可将"取到 2 只红球 1 只白球"分三步走：第一步，先确定这个 3 个元素的排列中哪个位置放白球（共有 C_3^1 种不同放法）；第二步，再确定将哪只白球放到上述位置上（共有 P_3^1 种不同的方法）；第三步，确定哪 2 只红球排列到余下的