[北师课标版]

导学诱思

焦点突破

融会贯通

新教材 佳点

JIAO DIAN

高中数学（必修5）

安徽教育出版社

[北师课标版]

XIN JIAO CAI JIAO DIAN

新教材焦点

JIAO DIAN

高中数学

（必修 5）

总策划：安　星

编　者：陈建宁　郑林建　黄海波　侯曙明

安徽教育出版社

责任编辑:李福军

新教材焦点(北师课标版)
高中数学
(必修5)
安徽教育出版社出版发行
(合肥市回龙桥路1号)
新华书店经销　　合肥远东印务有限责任公司印刷
安徽飞腾彩色制版有限责任公司照排
*
开本 880×1230　1/16　印张 9.75　字数 330 000
2007年7月第1版　　2007年7月第1次印刷
ISBN 978-7-5336-4655-4

定价:14.80元
发现印装质量问题，影响阅读，请与我社出版科联系调换
电话:(0551)2823297　2846176

内容导读

焦点

- 导学诱思
  - 焦点导入：激发学习兴趣，引发问题和思考
  - 课标聚焦：了解课标要求，明确学习目标
- 焦点突破
  - 自主预习：倡导自主学习，感知焦点内容
  - 逐点扫描
    - □ 焦点辨析：提炼教材焦点，分析焦点内涵
    - □ 焦点例题：紧扣每个焦点，选择经典例题，深入分析、解答
    - □ 变身题：触类旁通，举一反三
    - □ 点评（拓展、反思）：引导思维发散，点击思维盲点，提炼思想方法
  - 焦点训练：夯实基础知识，提升应用能力
- 融会贯通
  - 焦点回眸：归纳总结焦点内容，揭示学习、认识规律
  - 背景链接：链接课外知识，拓展思维空间
  - 高考链接：立足单元焦点，链接高考考点

我学习 ☺ 我快乐

单元验收卷（便于拆卸）

模块综合验收卷（便于拆卸）

参考答案与简析（详解，另册装订）

《焦点》访谈

■ 问：《新教材焦点》书名比较独特，请问其主要含义是什么？

■ **答：**本套书根据新课标要求和新教材特点，对新教材内容逐点扫描：直击重点，剖析难点，补遗盲点，关注热点，演练交点。五点聚焦，是大家关注的焦点，也是本套书的焦点。请看下列图示：

■ 问：请问书名《焦点》除了表示"五点聚焦"的编写理念外，是否还有什么特别的含义？

■ **答：**《新教材焦点》是安徽教育出版社高中教育编辑部着力打造的第一套高中新课标同步教辅用书。高中部于2006年8月份成立，成立以后我们确立了围绕"焦点"二字打造高中品牌教辅的整体发展思路。安徽是教育大省，安徽教育出版社作为省内唯一教育类品牌出版社，一直备受全国市场关注。而随着我省新课标教材全面使用和高考命题权的进一步下放，安教社的高中学生读物也必然会成为广大师生关注的"焦点"。

■ 问：目前，市场上新课标同步类教辅较多，你们认为《焦点》最主要靠什么取胜？

■ **答：**简而言之，一流的质量。编辑部在创意《新教材焦点》过程中，经过了半年多的详细的市场调研和样张征求意见后才确定最后的编写体例，每个学科的样稿都经过了3轮修订。另外，本套书网罗了全国的编写高手和学科专家。在遴选作者的过程中，我们要求首先必须是上过新课标教材的学科带头人；另外必须是写作能力较强的和有创造性思维的。写稿过程中编辑和作者共同讨论，反复推敲，不放过稿件中的每一点瑕疵。很多作者都感叹这次编稿是他们编得最辛苦的一次，也是收获最大的一次。有了这样一个创作团体，《焦点》的质量得到了有力的保证。

■ 问：确实，《焦点》制作精美，整体设计也很有特色。在内容安排上主要遵循怎样的原则？

■ **答：**总原则是依据课标、紧扣教材、充分拓展。具体来说：激发学习兴趣、引导自主学习、强调基础夯实、注重能力提升，这些都是新课标所倡导的，在本套书中都通过具体栏目得以落实。实际上，

《焦点》访谈

新课标的这些理念渗透在本套书的每个栏目、每点讲解，甚至每道试题、每次点评中。另外在栏目顺序安排上也遵循新课标的要求：先兴趣导入，再自主学习，再总结归纳和思维拓展，而且每个栏目内容都充分考虑到其实用性，以方便学生自学和自测。

■ 问：《焦点》立足于同步辅导，却提出了"放眼新课标高考"的口号，请问有何重要的意义？

■ 答：宏伟的大厦是一砖一瓦垒砌起来的，优异的高考成绩是平常一点一滴积累起来的。安教社焦点工作室着眼平常知识的积累，放眼未来的新课标高考，融高考的焦点于平常学习之中，在一点一滴的学习中，走近高考，体验高考。2009 年新课标高考面临重大改革，安教社作为专业的教育类出版社，帮助学生从容应对新高考责无旁贷。《新教材焦点》将传达最新的高考信息，把握最新高考动向。《焦点》全体工作人员坚信：《焦点》一定会帮助学子成就精彩的人生，见证他们的每一点成长。

■ 问：《新教材焦点》内容特色明显，质量一流，它无疑是高中学生新课标同步学习辅导的首选用书。请问学生如何使用才能达到最好的效果？

■ 答：《焦点》在编排时充分考虑到学生使用和课堂教学的方便，学生可以在老师指导下按编排顺序使用本书：

先浏览第一板块的"焦点导入"和"课标聚焦"，然后带着问题预习章节内容。第二板块的"自主预习"引导学生认真阅读课本，初步了解将要学习的内容；"逐点扫描"讲练紧密结合，讲解详细、透彻，变身题触类旁通；"焦点训练"梯度分明，分层训练，可以和课堂教学配套使用。第三板块功能是：归纳、总结、拓展、提高，可以在章节的课堂学习结束后使用。"单元验收卷"和"模块综合验收卷"附在本书最后，便于拆卸，学生可以在老师指导下使用，也可以用于自测。答案详解并另册装订。

另外，"我学习，我快乐"为学生在紧张学习之余提供了轻松、愉快的园地。

总之，只要像《焦点》所倡导的那样快乐、自主、自信地学习，就一定会事半功倍，梦想成真！

目 录

第一章 数列

导学诱思

焦点导入

比萨斜塔因"倾而不倒"闻名于世，而伽利略的自由落体实验又使它在科学史上留下了浓重的一笔. 然而，比萨古城还与一个数学上很有名的数列联系着，这个数列被人们戏称为"兔子数列"，它的学名叫"斐波那契数列". 斐波那契是意大利数学家，他的全名是列昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci)(生于公元1170年，籍贯是比萨，卒于1240年)，他又被人称作"比萨的列昂纳多". 右边是他在比萨城的雕像.

列昂纳多·斐波那契

斐波那契数列与兔子的繁殖有关：第一个月有一对兔子，每一对兔子从出生起每过2个月就可以再繁殖一对兔子，这样下去，一年能繁殖多少对兔子？下面是月份和兔子数的一个对应关系：

月份	上月的兔子对数	新生的兔子对数	兔子的总对数
1			1
2	1	0	1+0=1
3	1	1	1+1=2
4	2	1	2+1=3
5	3	2	3+2=5
6	5	3	5+3=8

……

如果将这个表格继续下去，我们可以把兔子总数依次排成一列数：1，1，2，3，5，8，13，21，…数学中，把按照一定次序排列的一列数叫数列，而这个数列就是数学上著名的"斐波那契数列".

斐波那契数列与植物的生长、建筑、艺术、美学等有着广泛的联系. 一个普通的数列，就这样刻画和引领着我们的世界，其中的奥秘耐人寻味.

课标聚焦

本章从一般数列的概念入手，主要介绍了等差数列和等比数列的基本问题，一方面是因为这两个数列有重要的应用；另一方面，这两个数列也是研究一般数列的基础，其思想方法对一般数列的研究有重要的启迪. 通过本章学习应该达到以下学习目标：

1. 通过日常生活的实际例子，了解数列的概念以及表示数列的简单方法.
2. 通过实例，理解等差数列、等比数列的概念.
3. 探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和公式.

4. 能在具体的情境中发现数列的等差关系和等比关系，并能用有关知识解决相应的问题.

5. 体会等差数列、等比数列与一次函数、指数函数的关系.

焦点突破

§1 数列

§1.1 数列的概念

自主预习

1. 数列的定义：按照一定次序排列的一列数称为数列，数列中的每个数都叫这个数列的________.

2. 数列的一般形式可以写成 $a_1,a_2,a_3\cdots,a_n,\cdots$，简记为________. 其中______称为数列 $\{a_n\}$ 的第一项（或者为________），a_2 称为第 2 项，…，________称为第 n 项.

3. 数列的分类：

根据数列的项数可以将数列分为两类：有穷数列——项数______的数列；无穷数列——项数______的数列.

4. 如果一个数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系可以表示成一个式子 $a_n=f(n)$，那么这个公式叫这个数列的________.

逐点扫描

焦点一 数列概念，项、项数（序号），数列的表示

1. 数列是按照一定次序排列的一列数. 数列中的每个数都叫这个数列的项.

把数排列起来的出发点是把相关的数列在一起，便于发现其中的规律，用数列的方法解决问题. 注意：数列中可以有相同的项，次序不同的数列就是不同的数列，这与集合的表示根本不同.

2. 用 $\{a_n\}$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，是这个数列的一种记法. 而 a_n 表示数列 $\{a_n\}$ 中的第 n 项，例如，数列 $\{2n-1\}$ 中，第 7 项是 $a_7=2\times7-1=13$. 数列中的项和对应的项数不同.

例 1

牧羊人赶着 36 只羊要经过 6 道关口，每过一个关口，守关人将拿走当时羊的一半（按照四舍五入计算），然后退还一只，这样，过了第一关、第二关、第三关、第四关…….

(1)把每经过一关之后所剩的羊排成一个数列，这个数列共有多少项？

(2)若这个数列用 $\{a_n\}$ 表示，则 a_4 是多少？

【分析】 对于(1)，只要把经过每一道关口之后剩下的羊计算出来，排成一列即可；对于(2)，从第一项开始数，序号是 4 的对应的项就是第 4 项.

【解答】 经过第一道关口后，拿走 $\frac{36}{2}=18$ 只，剩下的羊是 $36-18+1=19$ 只；经过第二道关口后，拿走 $\frac{19}{2}\approx10$ 只，剩 $19-10+1=10$ 只；经过第三道关口拿走 $\frac{10}{2}=5$ 只，剩下的羊是 $10-5+1=6$ 只；经过第四道关口拿走 $\frac{6}{2}=3$ 只，剩下的羊是 $6-3+1=4$ 只；经过第五道关口拿走的羊是 $\frac{4}{2}=2$ 只，剩下的羊是 $4-2+1=3$ 只；经过第六道关口拿走的羊是 $\frac{3}{2}\approx2$ 只，剩下的羊是 $3-2+1=2$ 只. 所以，每经过一关之后所剩的羊依次排成一个数列 19，10，6，4，3，2. 这个数列共有 6 项.

(2) $a_4=4$.

【点评】 对于这些实际意义的问题，当我们把量排成一列时，就成为数列，实际问题就成为数列问题. 从这个例子可以看出，数列的项是不能随意变动的，否则就不是原来的数列了.

变身题

1. 图 1.1-(1)是堆积的钢管，最上面的一层叫第一层，以下依次叫第二层，第三层，….

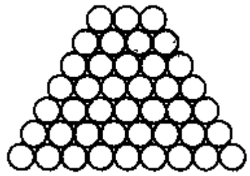


图 1.1-(1)

(1)将图中的每一层（从上层到下层）的钢管数排成数列，写出这个数列；

(2)设想钢管继续堆积下去，且(1)中的数列用 $\{a_n\}$ 表示，那么，第 10 层的钢管数怎么表示？第 10 层钢管数是多少？

(3)这个数列是有穷数列还是无穷数列？

2. 已知数列 $1,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\cdots$

(1)求 a_{10};

(2)这个数列的第 n 项 a_n 是什么?

疑点二　数列的通项的概念,用观察、归纳法求数列的通项

1. 数列的通项是数列的基本问题之一.要会从不同的角度考查一个数列,通过观察、归纳(猜想)出数列的第 n 项 a_n 关于项数 n 的关系;

2. 数列的通项公式的形式不是惟一的.

※ 例 2

已知下列数列的前几项,写出数列的通项公式.

(1)1,3,5,7,9,…

(2)2,−4,6,−8,10,−12,…

(3)$2-1,4+\frac{1}{2},8-\frac{1}{3},16+\frac{1}{4},\cdots$

(4)2,22,222,2222,…

(5)0,1,0,1,0,1,0,…

【分析】 (1)通常是把数列写成一行,然后把项数对应的写在下一行,再观察项与项数的对应关系,并写出第 n 项 a_n 与项数 n 的公式.

(2)数列的项正、负相间出现,这个现象可以用 $(-1)^n$ 或者 $(-1)^{n+1}$ 表示,因此,我们可以先不考虑正负号问题.

(3)数列每一项有两个部分构成,可以分别考查,写出各部分的第 n 项相应的部分,再合写在一起.

(4)注意到 $2=\frac{2}{9}\times(10-1)$, $22=\frac{2}{9}\times 99=\frac{2}{9}(10^2-1)$,等等,不难发现其中的规律.

(5)这个数列可以有多个形式的通项公式.

【解答】 (1)把数列的项与对应的项数写成对应的形式,如下图:

1	3	5	7	9	11	13	15…	a_n…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	$2n$-1

于是,看到数列的项与项数的特点是:项是项数的 2 倍减去 1.

所以 $a_n=2n-1$.

(2)考查 2,4,6,8,10,…的项与项数的关系可以发现,每一项是项数的 2 倍,而正负号由 $(-1)^{n+1}$ 确定,所以 $a_n=(-1)^{n+1}2n$.

(3)把这个数列分开考查:整数部分为 2,4,8,16,…,它的第 n 项为 2^n;而小数部分为 $-\frac{1}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$,它的通项为 $(-1)^n\frac{1}{n}$.所以,原数列的通项为

$$a_n=2^n+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}.$$

(4)注意到 $a_1=\frac{2}{9}\times 9=\frac{2}{9}\times(10-1)$, $a_2=22=\frac{2}{9}\times 99=\frac{2}{9}\times(100-1)=\frac{2}{9}\times(10^2-1)$,第三项 $a_3=222=\frac{2}{9}\times 999=\frac{2}{9}\times(1000-1)=\frac{2}{9}\times(10^3-1)$,…,第 n 项有 n 个 2,即 $a_n=\overbrace{222\cdots2}^{n个2}=\frac{2}{9}\times\overbrace{99\cdots9}^{n个9}=\frac{2}{9}\times(10^n-1)$,即通项为 $a_n=\frac{2}{9}\times(10^n-1)$.

(5)不难看到 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$,也可以是 $a_n=\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|$.

【点评】 (1)这里求"通项"运用的是观察和猜想,需要仔细考查项与项数的关系,注意对数列的项作适当的**变形**和**分割**也是观察通项的常用方法.

(2)掌握常见的数列通项公式对求其他数列通项是有益的:

①自然数列:1,2,3,4,5,6,…,通项为 $a_n=n$;

②正偶数数列:2,4,6,8,10,…,通项为 $a_n=2n$;

③正奇数数列:1,3,5,7,9,11,…,通项为 $a_n=2n-1$.

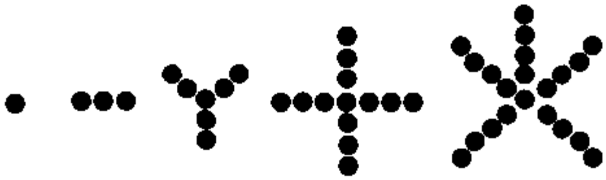
◉ 变身题

3. 写出下面数列的一个通项公式,使它的前 4 项是下列各数.

(1)$1\frac{1}{2},2\frac{2}{3},3\frac{3}{4},4\frac{4}{5},\cdots$

(2)−7,77,−777,7777,…

4. 图 1.1-(2)是小圆构成的图形，观察发现，第三个图有三个方向，每个方向 2 个圆；第四个图有四个方向，每个方向 3 个圆；第五个图有五个方向，每个方向 4 个圆，而此时，第一个图和第二个图也可以按照这个观点观察.



(1) (2) (3) (4) (5)

图 1.1-(2)

回答下列问题：

(1)按照这个规律，把第 1 个，第 2 个，第 3 个，…，第 n 个图中的圆的个数排成一个数列，写出这个数列的前 5 项；

(2)第 7 个图中有多少个圆?

(3)写出这个数列的通项公式.

焦点三 通项的地位和意义

1. 通项问题是数列的基本问题. 一个数列的通项确定，就可以对数列的项进行一般分析.

2. 通项是数列的第 n 项，所以，当 n 取不同值可求得数列中的任意一项.

例 3

(1)已知一个数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{3n-5}{2n+3}$.

①求这个数列的第 15 项；

②$\frac{16}{17}$是不是这个数列中的项? 如果是，应该是第几项? 如果不是，请说明理由；

③证明：对任意的 $n\in \mathbf{N}_+$，$\frac{3}{2}$都不是这个数列中的项.

(2)数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，从第二项起，每一项是它前面一项的 2 倍还多 1.

①请写出 a_{n+1}与 a_n 的关系；

②写出这个数列的前四项，并猜出这个数列的通项公式.

【分析】 问题(1)是典型的数列的通项的基本应用，即求任意指定的项、判断一个数是不是数列中的项；问题(2)考查阅读能力，得到一个数列中的项之间的一个关系，这个关系叫数列的递推公式. 也是表示数列的一种方法.

【解答】 (1)①令 $n=15$，得 $a_{15}=\frac{3\times 15-5}{2\times 15+3}=\frac{40}{33}$；

②令$\frac{16}{17}=\frac{3n-5}{2n+3}$，解得 $n=7$，即$\frac{16}{17}$是这个数列的第 7 项；

③用反证法. 假设$\frac{3}{2}$是这个数列中的项，则存在自然数 n，使得$\frac{3}{2}=\frac{3n-5}{2n+3}$，得 $3(2n+3)=2(3n-5)$，这个方程无解，所以$\frac{3}{2}$不是这个数列中的项.

(2)①a_{n+1}的前一项是 a_n，由题意，得到 $a_{n+1}=2a_n+1$.

②因为 $a_1=1$，所以 $a_2=2a_1+1=2\times 1+1=3$，$a_3=2a_2+1=2\times 3+1=7$，$a_4=2a_3+1=2\times 7+1=15$，即前四项依次为 1，3，7，15；把这前四项写成 $2^1-1,2^2-1,2^3-1,2^4-1$，因此猜得 $a_n=2^n-1,n\in \mathbf{N}_+$.

【点评】 (1)数列的通项可以看成一个关于 n 的函数，求数列中任意指定的项，就相当于求函数值，而判断某数是不是这个数列中的项，相当于判断一个数值是不是这个函数的值域中的数.

(2)数列的通项大多是先猜想，然后证明，这里我们暂时只管猜想，而且应该学会猜想，至于如何证明猜想的正确性，那是以后的事情.

◉ 变身题

5. (1)设数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{2n}{n^2+2}$.

①求这个数列的第 5 项；

②$\frac{8}{33}$是这个数列的第几项?

(2)数列$\{a_n\}$：$\log_2\sin\frac{\pi}{4}$，$\log_2\sin^3\frac{\pi}{4}$，$\log_2\sin^5\frac{\pi}{4}$，$\log_2\sin^7\frac{\pi}{4}$，…

①写出这个数列的通项公式；

②求这个数列的第 7 项；

③-10 是不是这个数列的项? 如果是，是第几项? 如果不是，请说明理由.

6. 设数列$\{a_n\}$中，$a_n=\sin\frac{n\pi}{3}+\cos n\pi, n\in \mathbf{N}_+$.

(1)求这个数列的前8项，这个数列中一共有多少个不同的项？求出这个数列的最大项；

(2)证明：$a_{n+6}=a_n, n\in \mathbf{N}_+$.

焦点训练

固础夯实

1. 有下列几个结论：①数列就是数的集合；②任何数列都有首项和末项；③项数无限的数列是无穷数列；④若干项相同的两个数列的通项必相同. 其中正确的是(　　).

A. ①③　　B. ③④　　C. ②④　　D. ③

2. 已知数列 $1,\sqrt{3},\sqrt{5},\cdots,\sqrt{2n-1},\cdots$，则 $3\sqrt{5}$ 是它的(　　).

A. 第22项　　B. 第23项

C. 第24项　　D. 第28项

3. 数列 $-1,\frac{8}{5},-\frac{15}{7},\frac{24}{9},\cdots$ 的一个通项公式是(　　).

A. $a_n=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2n+1}$

B. $a_n=(-1)^n\frac{n(n+2)}{n+1}$

C. $a_n=(-1)^n\frac{(n+1)^2+1}{n+1}$

D. $a_n=(-1)^n\frac{n(n+2)}{2n+1}$

4. 设数列$\{a_n\}$：8，88，888，…，则通项公式可以是__________.

5. 数列为 $-2,2,6,10,\cdots$，则相邻两项 a_n 与 a_{n+1} 的关系可以是__________.

6. 设某城市现有住房面积 a m^2，其中有一半旧房需要拆除，但是，每年都要建新房. 从下一年起，每年新建房按现有住房面积的10%的速度进行，而拆旧房按照每年 b m^2 进行. 写出这个城市第一年(就是下一年)，第二年，第三年……的住房面积，如果把住房面积排成一个数列$\{a_n\}$，写出这个数列的通项公式.

能力提升

7. 已知数列 $2,\frac{7}{4},2\cdots$ 的通项公式为 $a_n=\frac{an^2+b}{cn}$，则这个数列的第四项和第五项分别是(　　).

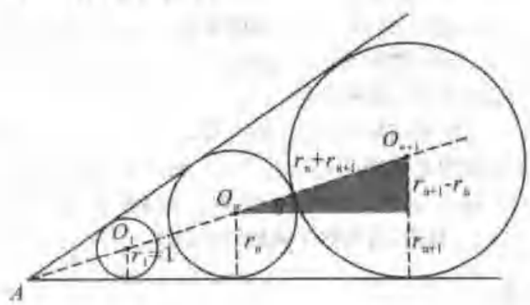
A. $\frac{8}{19},\frac{14}{5}$　　B. $\frac{17}{4},\frac{29}{10}$

C. $\frac{15}{4},\frac{19}{25}$　　D. $\frac{19}{8},\frac{16}{5}$

8. 设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1, a_2=3$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，写出这个数列的前8项，并证明 $a_{n+6}=a_n$.

综合探究

9. 在∠A=2θ的角内，作第一个圆，半径为 $r_1=1$，以后作一系列圆，彼此相切，且都与角的两边相切，把这些圆依次记为圆 O_1，圆 O_2，…，圆 O_n，…，半径依次记为 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$，得到数列$\{r_n\}$.



(1)求 r_2；

(2)求 r_n 与 r_{n+1} 的递推关系，并证明 $\frac{r_{n+1}}{r_n}$ 是常数.

§1.2 数列的函数特性

自主预习

1. 数列可以看成是定义域为________或者________上的函数，当自变量从小到大依次取值时，该函数对应的一列函数值，就是这个数列.

2. 数列可以用图像表示，数列的图像是由坐标________构成的一系列点构成，用虚线连起来，可以大致看出这个数列的项的变化情况.

3. 如果一个数列$\{a_n\}$从________起，每一项都比________大，那么这个数列叫________数列. 也就是当数列$\{a_n\}$，对一切$n\in\mathbf{N}_+$，都有$a_{n+1}>a_n$，则称$\{a_n\}$是递增数列. 如果数列$\{a_n\}$，对一切$n\in\mathbf{N}_+$，有________，则称$\{a_n\}$是递减数列.

逐点扫描

焦点一　数列的图像和像像像示

(1)数列$\{a_n\}$是排列的一列数，这是数列的代数特征或者数量特征. 为了便于研究数列中项的特点，把(n,a_n)看成平面直角坐标系$n-O-a_n$内的点. 这样，数列的项数和项之间的关系以及项的递变特征便体现在平面上，得到了图形上的支持和说明，我们可以通过观察就可以得到数列的某些特性. 这就是数列的图像特征，这个特征具有函数性质. 当然，数列也可以通过列表表示，把项数和项之间的对应关系表示出来就可以了.

(2)增、减函数的判定方法：若$a_{n+1}>a_n$，则在相应的取值范围内是递增的；若$a_{n+1}<a_n$，则在相应的取值范围内是递减的. 这也是证明一个数列在某范围内递增或者递减的方法. 显然，这类似于函数的单调性.

例 1

设数列$\{a_n\}$中，$a_n=\dfrac{n}{n^2+99}$.

(1)求这个数列的第 9 项和第 10 项；

(2)证明这个数列先递增后递减，并求出这个数列的最大项.

【分析】 (1)给定通项公式，求指定的某一项，就是代入相应的项数计算，与求函数值基本一致；

(2)如果把这个数列看成一个函数，即$a_n=f(n)=\dfrac{n}{n^2+99}$，那么，数列的递增和递减特性，实际上就是函数的单调性问题，不同的是，这里的自变量在自然数集合或者它的子集上取值.

【解答】 (1)$a_9=\dfrac{9}{9^2+99}=\dfrac{9}{180}=\dfrac{1}{20}$，$a_{10}=\dfrac{10}{10^2+99}=\dfrac{10}{199}$.

(2)因为$\dfrac{n}{n^2+99}=\dfrac{1}{n+\dfrac{99}{n}}$，取$b_n=n+\dfrac{99}{n}$. 因为$b_{n+1}-b_n=n+1+\dfrac{99}{n+1}-\left(n+\dfrac{99}{n}\right)=\dfrac{n(n+1)-99}{n(n+1)}$，所以，当$n\leqslant 9$，$n\in\mathbf{N}$时，$b_{n+1}-b_n<0$，即$n=1,2,\cdots,9$时，$b_n$递减；同理，当$n=10,11,\cdots$时，$b_n$递增.

因为$a_n=\dfrac{1}{b_n}$，由上面的讨论可知，$n=1,2,\cdots,9$时，a_n递增，当$n=10,11,\cdots$时，a_n递减，也就是$a_1<a_2<\cdots<a_9$，$a_{10}>a_{11}>a_{12}>\cdots$，由此，最大项是$a_9$或者$a_{10}$，而由(1)知$a_{10}>a_9$，所以$a_{10}$最大.

【点评】 (1)当数列的通项给定的时候，数列问题在本质上反映为函数问题，借用函数这个强有力的工具，可以解决很多问题，这是数学中化归思想的一个应用，更是函数思想解决问题的典型体现.

(2)数列的最大项和最小项的解决，是数列递增递减性质的简单运用.

◉ 变身题

1. 设数列$\{a_n\}$中，$a_n=(n+1)\cdot\left(\dfrac{10}{11}\right)^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求证：数列$\{a_n\}$先递增，后递减；

(2)求数列$\{a_n\}$中的最大项.

焦点训练

基础演练

1. 数列$1,1+1,1+3,1+5,1+7,\cdots$的一个通项公式是(　　).

A. $a_n=2n-1$　　B. $a_n=3n-2$

C. $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2n-2,n\geqslant 2\end{cases}$　　D. $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2n-3,n\geqslant 2\end{cases}$

2. 某工厂产值今年是 a 万元，每年按 $r\%$ 递增，把每年的产值排成一个数列$\{a_n\}$(今年产值为 $a_1=a$)，那么这个数列第 n 年的产量为(　　).

A. $a(1+r\%)^{n-1}$　　B. $a(1+r\%)^{n+1}$

C. $a(1+r\%)^{n}$　　D. $ar\%+ar^{n}$

3. 数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=2n^2-18n-30$，那么(　　).

A. 这个数列是递增数列

B. 这个数列有最大值

C. 这个数列先递减后递增

D. 这个数列先递增后递减

4. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\sin\frac{n\pi}{3}$，那么这个数列的最大项的值是________.

5. 若数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=(a+1)^{n-1}(a>-1)$，若这个数列是递减数列，那么 a 的取值范围是________.

6. 设数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{2n}{3n-2}$.

(1)判定这个数列的单调性；

(2)求这个数列的最大项，当 n 很大时，这个数列无限趋近于哪个值?

能力提升

7. 设数列$\{a_n\}$的通项为 $a_{n+1}=\frac{na}{bn+c}$，当 a,b,c 都是正数时，有(　　).

A. $a_n>a_{n+1}$

B. $a_n<a_{n+1}$

C. 存在 $m,k\in\mathbf{N}_+$，使得 $a_m=a_k$

D. a_n,a_{n+1}大小与 a,b,c 有关

8. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n}{n^2+26}$，证明这个数列先增后减.

[illegible]

9. 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$，数列$\{a_n\}$满足$f(\log_2 a_n)=-2n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明这个数列是递减数列.

§2　等差数列

§2.1　等差数列

自主预习

1. 等差数列的定义：如果一个数列从______起，每一项减去它前面一项所得的差都等于______常数，那么这个数列就叫等差数列，这个常数叫做等差数列的______，通常用字母______表示.

2. 等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，那么它的通项公式为__________.

3. 如果________，那么 A 叫做 a,b 的等差中项.

4. 一个数列$\{a_n\}$是等差数列________$a_n=pn+q$，其中 p,q 是常数.

逐点扫描

[illegible]一　如何证明一个数列是等差数列

1. 如果给出了一个数列的有限项，就按照等差数列的定义直接验证；

2. 如果是无限项数列，并且已经给出了数列的通项，就证明 $a_{n+1}-a_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都是常数.

例 1

指出以下哪个数列是等差数列，并说明理由；如果是等差数列，指出公差和首项.

(1)1,2,3,5,7,9,…

(2)2,2,2,2,2,2,…

(3)0,1,0,1,0,…

(4)25,24 $\frac{1}{2}$,24,23 $\frac{1}{2}$,23,22 $\frac{1}{2}$,…

【分析】 只要按照定义,逐一检验即可.

【解答】 (1)不是等差数列,因为 $2-1-3-2\neq5-3$.

(2)是等差数列,公差 $d=0$.

(3)不是等差数列,因为 $1-0\neq0-1$.

(4)是等差数列,$d=-\frac{1}{2}$.

【点评】 (1)这类问题需要逐一检查后一项与前一项的差,也就是逐一检验定义中"每一项减去它前面一项所得的差都等于同一个常数";(2)定义中的公差是同一个常数,是指与 n 无关.

◉ **变身题**

1. (1)若数列 1,3,$a+3$,b 是等差数列,则 $a=$______;$b=$______;它的第 6 项是______.

(2)如果一个数列中,每一项与它后面一项的和都为同一个常数,那么这个数列叫等和数列,这个常数叫该数列的公和.现在已知数列$\{a_n\}$是等和数列,且 $a_1=2$,公和是 5,则 $a_{18}+a_{111}=$______.

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=pn^2+qn$(p,q 为常数).

(1)当 p,q 满足什么条件时,数列$\{a_n\}$是等差数列?

(2)设 $b_n=a_{n+1}-a_n$,证明$\{b_n\}$是等差数列,并求公差.

焦点二 等差数列的通项公式及其运用

1. 利用通项可以求得等差数列的任意一项.

2. 确定通项只要确定首项 a_1 和公差 d.

3. 给定两项求任意一项通常用方程(组)思想先确定 a_1 和公差 d,然后求解.

✲ **例 2**

(1)设$\{a_n\}$是等差数列,且 $a_{15}=8$,$a_{60}=20$,求 a_{75}.

(2)等差数列$\{a_n\}$的第 5 项是 5,第 10 项是 -5.

①这个数列中第一个负数是第几项?

②这个数列是递增数列还是递减数列?

【分析】 ①因为 $a_{75}=a_1+(75-1)d$,所以,只要求出 a_1,d,问题就解决了.要确定 a_1,d 只要利用条件构造含有 a_1,d 的方程组就可以解决.

②如果通项确定,则只要令 $a_n<0$,就可以求出所有的为负值的项,从而就可以求出第一个负数.

【解答】 (1)方法一:设数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d,则 $\begin{cases}a_{15}=a_1+14d=8,\\a_{60}=a_1+59d=20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{64}{15},\\d=\frac{4}{15}.\end{cases}$

所以通项 $a_n=a_1+(n-1)d=\frac{64}{15}+(n-1)\frac{4}{15}$,所以 $a_{75}=\frac{64}{15}+74\times\frac{4}{15}=24$.

方法二:在 $a_{15},a_{16},\cdots,a_{60},\cdots,a_{75}$ 中,把 a_{15} 当作第一项,则 a_{60} 是第 $60-15+1=46$ 项,而 a_{75} 是第 $75-15+1=61$ 项,由通项公式得

$\begin{cases}a_{60}=a_{15}+(60-15)d,\\a_{75}=a_{15}+(75-15)d,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}20=8+(60-15)d,\\a_{75}=8+(75-15)d,\end{cases}$

所以 $a_{75}=24$.

(2)①设数列的首项是 a_1,公差是 d,则有 $\begin{cases}a_1+4d=5,\\a_1+9d=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=13,\\d=-2,\end{cases}$ 所以通项公式为 $a_n=13-2(n-1)=-2n+15$.令 $a_n<0$,即 $-2n+15<0$,得 $n>7.5$,又 $n\in\mathbf{N}$,所以 $n=8$,即第一个负项是第 8 项.

②因为 $a_{n+1}-a_n=-2<0$,所以,后一项小于前一项,数列$\{a_n\}$是递减数列.

【点评】 1. (1)中的方法一是先求 a_1,d,这两个量称为**基本量**,只要求出这两个量,等差数列项的很多问题就好解决了.求基本量的方法是方程思想.

方法二用的是等差数列的一个性质:当 $m\neq n$ 时,$a_n=a_m+(n-m)d\Leftrightarrow\frac{a_n-a_m}{n-m}=d$.

2. 显然有这样的结论,值得注意:(1)当 $a_1>0$,$d<0$ 时,总存在第一个负项;(2)$\{a_n\}$递增$\Leftrightarrow d>0$;$\{a_n\}$递减$\Leftrightarrow d<0$.

◉ **变身题**

3. 等差数列$\{a_n\}$中,$a_7+a_9=16$,$a_4=1$,求 a_{12}.

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前三项为 $\frac{1}{x+1}$,$\frac{5}{6x}$,$\frac{1}{x}$,求这个数列的第 101 项.

考点三　等差数列性质的运用

1. $m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$，$m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$．特别是：$m+n=2p$，则 $a_m+a_n=2a_p$．

2. $\{a_n\}$是等差数列，则 $a_n-a_m=(n-m)d$．

✲ 例3

设等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_5+a_8=9$，$a_3a_5a_7=-21$，求这个数列的通项公式．

【分析】 *如果用基本量方法，则只要把条件转换成 a_1 和 d 的方程，进而求得通项公式；如果用等差数列的性质，则可以考虑先求出其中的两项，用 $a_n-a_m=(n-m)d$ 先求公差，进而解决问题．于是本题可以用两种方法求解．*

【解答】 方法一：直接化成 a_1,d 的方程组．如下

$$\begin{cases}(a_1+d)+(a_1+4d)+(a_1+7d)=9,\\(a_1+2d)(a_1+4d)(a_1+6d)=-21,\end{cases}$$解得

$$\begin{cases}a_1=-5,\\d=2,\end{cases}\text{或者}\begin{cases}a_1=11,\\d=-2.\end{cases}$$

所以通项公式为 $a_n=2n-7$ 或者 $a_n=-2n+13$．

方法二：因为 $a_2+a_8=a_5+a_5=2a_5$，又 $a_2+a_5+a_8=9$，所以 $a_5=3$，所以得到 $a_3+a_7=2a_5=6$．

进而有$\begin{cases}a_3+a_7=6,\\a_3\cdot a_7=-7,\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a_3=-1,\\a_7=7,\end{cases}$或者$\begin{cases}a_3=7,\\a_7=-1.\end{cases}$

当$\begin{cases}a_3=-1,\\a_7=7\end{cases}$时，$a_7=a_3+(7-3)d$，所以 $d=2$，通项公式为 $a_n=a_3+(n-3)d=2n-7$；

当$\begin{cases}a_3=7,\\a_7=-1\end{cases}$时，$a_7=a_3+(7-3)d$，所以 $d=-2$，通项公式为 $a_n=-2n+13$．

【点评】 *(1)用基本量寻求问题表示和解决的方法称为基本量方法，这是等差数列解题的基本方法；*

(2)“$m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$ 时，若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$”，这个性质被称为整体变换法，可以回避 a_1,d 的计算，进行简洁的推理和演算．

◉ 变身题

5. 等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_2+a_6+a_{10}$是常数，证明：a_6，a_3+a_9 均为常数．

6. 已知方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，求$|m-n|$的值．

难点突破　构造等差数列解决复杂数列的通项问题和求和问题

等差数列是一类重要的数列，复杂数列的处理，通过构造等差数列解决是一个很好的思路．将来在等比数列学习中，我们也会遇到类似的情况．

比如，数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+da_n}$，则有$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+d$，即$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$成等差数列．

✲ 例4

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=4$，$a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}$ $(n>1,n\in\mathbf{N}_+)$，记 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$．

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式．

【分析】 *要证明$\{b_n\}$是等差数列，只要证明 $b_{n+1}-b_n$ 或者 b_n-b_{n-1} $(n>1)$是常数．从$\{b_n\}$与原数列$\{a_n\}$的关系入手，找到 b_{n-1}与 b_n 的关系才是关键．*

【解答】 (1)方法一：由 $a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}$，得 $a_n-2=2-\frac{4}{a_{n-1}}=\frac{2(a_{n-1}-2)}{a_{n-1}}$，所以$\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_{n-1}}{2(a_{n-1}-2)}=\frac{a_{n-1}-2+2}{2(a_{n-1}-2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_{n-1}-2}$，所以 $b_n=\frac{1}{2}+b_{n-1}$，即 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$，其中 $n\geqslant2,n\in\mathbf{N}$，即$\{b_n\}$是等差数列．

方法二：因为 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$，所以 $a_n=2+\frac{1}{b_n}$，代入 $a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}$ $(n>1,n\in\mathbf{N})$得 $2+\frac{1}{b_n}=4-\frac{4}{2+\frac{1}{b_{n-1}}}$ $(n>1,n\in\mathbf{N})$．

整理得 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$ $(n>1,n\in\mathbf{N})$，即$\{b_n\}$是等差数列．

(2)由(1)，因为$\{b_n\}$是等差数列，$b_1=\frac{1}{a_1-2}=\frac{1}{2}$，$d=\frac{1}{2}$，所以 $b_n=b_1+(n-1)\cdot d=\frac{n}{2}$，又 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$，所以

$\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{n}{2}$.所以 $a_n=2+\dfrac{2}{n}=\dfrac{2(n+1)}{n}$.

【点评】 通过构造的数列求原来数列的通项,是等差数列应用的重要方面.注意解答过程的变化和转换.例如,$a_{n+1}=\dfrac{ka_n}{pa_n+k}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{a_n}\Rightarrow\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列.

◉ **变身题**

7. 设数列$\{a_n\}$中,$a_n=16\cdot 3^{6-2n}$,令 $b_n=\log_3 a_n$.

(1)求证:$\{b_n\}$成等差数列,并求出它的首项和公差;

(2)设 $m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$,且 $m+n=p+q$,证明:$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.

8. 设数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\dfrac{3a_{n-1}}{a_{n-1}+3}$,$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+$.

(1)证明:$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列;

(2)当 $a_1=\dfrac{1}{2}$时,求 a_{100}.

焦点训练

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=5-4n$,则它的首项和公差分别为(　　).

A. 1,−4　　B. 1,4

C. −1,4　　D. −1,−4

2. 已知等差数列$\{a_n\}$中 $a_5=10,a_1+a_2+a_3=3$,则公差为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. −3　　D. −2

3. 设等差数列$\{a_n\}$中,公差 $d<0$,且 $a_2\cdot a_4=12,a_2+a_4=8$,则通项公式为(　　).

A. $a_n=2n-2(n\in\mathbf{N}_+)$

B. $a_n=2n+4(n\in\mathbf{N}_+)$

C. $a_n=-2n+12(n\in\mathbf{N}_+)$

D. $a_n=-2n+10(n\in\mathbf{N}_+)$

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前三项为 $a,2a-1,3-a$,则通项公式为__________.

5. 若 $x\neq y,x,a_1,a_2,y$ 和 x,b_1,b_2,b_3,y 各自成等差数列,则$\dfrac{a_2-a_1}{b_2-b_1}=$__________.

6. 数列$\{a_n\}$各项均为正数,满足 $a_1=2,a_{n+1}-1=a_n+2\sqrt{a_n}$,求数列的通项公式.

7. 已知等差数列$\{a_n\}$,下列不正确的是(　　).

A. $a_{12}+a_8=a_6+a_{14}$

B. $a_{12}+a_8=2a_{10}$

C. $a_1a_8\leqslant a_5a_4$

D. $a_{16}+a_4=a_{20}$

8. 已知点 $P_n(a_n,b_n)$在直线 $l:y=2x+2$ 上,P_1 为直线 l 与 x 轴的交点,数列$\{a_n\}$成等差数列,公差为 1,求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$.

9. 下表给出一个等差数阵:

4	7	(　)	…	a_{1j}	…
7	12	(　)	…	a_{2j}	…
(　)	(　)	(　)	…	a_{3j}	…
…	…	…	…	…	…
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	……	a_{ij}	……

其中,每行每列都是等差数列,a_{ij} 表示位于第 i 行第 j