普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学立体化教材

# 高等数学

## （理工类）上册

第二版

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

# 大学数学立体化教材（完整版）

理工类教材

《高等数学》（上下册）（含光盘）

《线性代数》（含光盘）

《概率论与数理统计》（含光盘）

经管类教材（教育部推荐教材）

《微积分》（上下册）（含光盘）

《线性代数》（含光盘）

《概率论与数理统计》（含光盘）

文科类教材

《大学文科数学》（含光盘）

# 大学数学立体化简明教材（简明版）

理工类教材

《高等数学》（上下册）（含光盘）

《线性代数》（含光盘）

《概率论与数理统计》（含光盘）

经管类教材（教育部推荐教材）

《微积分》（含光盘）

《线性代数》（含光盘）

《概率论与数理统计》（含光盘）

# 高职高专数学立体化教材（高职高专版）

理工类教材

《高等数学》（含光盘）

《线性代数》（含光盘）

《概率论与数理统计》（含光盘）

经管类教材（教育部推荐教材）

《微积分》（含光盘）

《线性代数与概率统计》（含光盘）

注：以上立体化教材中，《高等数学》（理工类）和《微积分》（经管类）均为普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 本系列立体化教材的配套服务

多媒体教学系统光盘（教师专用，免费赠送给采用本套教材的教师）

《高等数学多媒体教学系统》（理工类）

《微积分多媒体教学系统》（经管类）

《线性代数多媒体教学系统》（理工类、经管类）

《概率论与数理统计多媒体教学系统》（理工类、经管类）

《大学文科数学多媒体教学系统》（文科类）

试题库系统光盘（免费赠送给采用一定量教材的学校）

《大学数学试题库系统》——（安装型软件）

详情请咨询中国人民大学出版社编辑部，电话：(010) 62511967或62514545

策划编辑 潘旭燕　责任编辑 赵文荣　封面设计 李亚莉　版式设计 赵星华

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学立体化教材

# 高等数学

## （理工类）上册

第二版

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

# 总　　序

教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向，借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标．然而，与其他学科相比，大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢．随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，因此，如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合，建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫．在我们的设想中，这种“新型教材”至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教学考多层次、全方位的建设．此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量，利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练，全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用．

2000年初，在吴赣昌教授的组织与策划下，我们成立一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队，对上述研究目标进行了重点攻关，在迄今为止的七年多时间内，先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的大学数学立体化教材，并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和大学数学立体化教材服务网站和课程建设网站．上述教学成果先后被全国200多所高等院校采用，一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励，另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持．

此次经由中国人民大学出版社出版的大学数学立体化系列教材(第二版)，共包含两大类六门课程，分别有**理工类**：高等数学，线性代数及概率论与数理统计三门课程；**经管类**：微积分，线性代数及概率论与数理统计三门课程．下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵．

**立体化教材的形式**

1.《＊＊＊＊》(书)

2.《＊＊＊＊多媒体学习系统》(学生专用)(光盘)

其中，《＊＊＊＊》(书)的编写具有下列特点：

- ◆ 书中融入了数学历史与数学文化的教育．
- ◆ 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想．
- ◆ 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结．
- ◆ 依循序渐进的原则，以适当的难度梯度选编教学例题．
- ◆ 与教材同步配套，简明实用地编写了“大学数学实验指导”．

《＊＊＊＊多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源多元化

# 目　录

## 第1章　函数、极限与连续



## 第2章　导数与微分



## 第3章　中值定理与导数的应用



## 第4章　不定积分

# 第1章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法．因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

## §1.1　函　　数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着．17世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的200多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置．

本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性．

### 一、集合

**1. 集合的概念**

一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**．构成某集合的事物称为该集合的**元素**．通常用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合的元素．

若元素 $a$ 是集合 $M$ 的元素，则记为 $a\in M$，读作 $a$ 属于 $M$；若元素 $a$ 不是集合 $M$ 的元素，则记为 $a\notin M$，读作 $a$ 不属于 $M$．由无限个元素构成的集合称为**无限集**；由有限个元素构成的集合称为**有限集**．

下面是几个集合的例子：

(1) 2005年在广东地区出生的人构成一个集合(有限集).

(2) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成一个集合(有限集).

(3) 全体奇数构成一个集合(无限集).

(4) 抛物线 $y=x^2$ 上的所有点构成一个集合(无限集).

**2. 集合的表示**

**列举法**　即在{ }中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素.

(1) 若 $A$ 仅由有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成，可记为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

(2) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合，可记为 $A=\{1,2\}$.

**描述法** 若 $M$ 是具有某种特征的元素 $x$ 的全体所构成的集合，则可记为

$$M=\{x \mid x\text{所具有的特征}\}.$$

(3) 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成的集合，可记为 $M=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$.

(4) 全体奇数的集合，可记为 $M=\{x \mid x=2n+1, n\text{为整数}\}$.

**3. 集合之间的关系**

若集合 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素，即若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 $A$ 包含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$ (见图1-1-1).

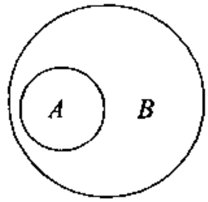


图 1-1-1

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称集合 $A$ 和 $B$ **相等**，记为 $A=B$. 例如，设 $A=\{1,2\}$，$M=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，则

$$A=M.$$

由所研究的所有事物构成的集合称为**全集**，记为 $S$. 全集是相对的，一个集合在某一条件下是全集，而在另一条件下可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；当讨论的问题包括正整数和负整数时，全体正整数的集合就不是全集.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

例如，$\{x \mid x\text{为实数}, x^2+1=0\}=\varnothing$.

**规定** 空集为任何集合的子集.

本书今后用到的集合主要是**数集**，即元素为数的集合. 下面是几个常用的数集：

自然数集 (记为 $\mathbf{N}$) 整数集 (记为 $\mathbf{Z}$)

有理数集 (记为 $\mathbf{Q}$) 实数集 (记为 $\mathbf{R}$)

**数集间的关系**

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

注：如无特别说明，本教程中提到的数都是实数.

**4. 集合的基本运算**

**定义1** 设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，由 $A$ 和 $B$ 的所有元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的**并**，记为 $A\cup B$ (见图1-1-2)，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

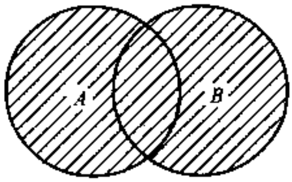


图 1-1-2

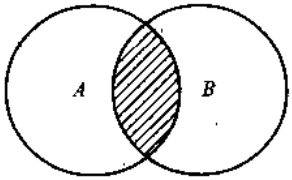


图 1-1-3

**定义2** 设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，由 $A$ 和 $B$ 的所有公共元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的**交**，记为 $A\cap B$ (见图1-1-3)，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

**定义3**　设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，由属于 $A$ 而不属于 $B$ 的所有元素构成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的**差**，记为 $A-B$(见图1-1-4)，即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

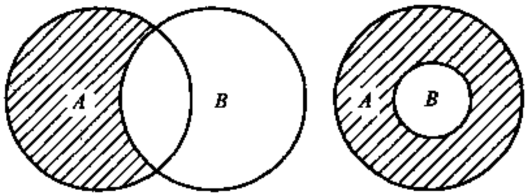


图 1-1-4

**定义4**　全集 $S$ 中所有不属于 $A$ 的元素构成的集合，称为 $A$ 的**余集**或**补集**，记为 $\overline{A}$ (见图1-1-5)，即

$$\overline{A}=S-A.$$

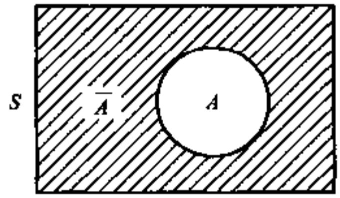


图 1-1-5

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x \mid 0<x\le 1\}$ 的余集就是

$$\overline{A}=\{x \mid x\le 0 \text{ 或 } x>1\}.$$

注：本教程中用到的有关集合的内容，在中学课程中已经学过，这里只作简单介绍.

## 二、区间

**定义5**　介于某两个实数之间的全体实数称为**区间**. 这两个实数称为区间的**端点**. 两端点间的距离(线段的长度)称为区间的**长度**.

区间是高等数学中常用的实数集，包括四种**有限区间**和五种**无限区间**.

**有限区间**

设 $a,b$ 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 $(a,b)$，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$$[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\},\quad [a,b)=\{x \mid a\le x<b\},\quad (a,b]=\{x \mid a<x\le b\}.$$

**无限区间**

引入记号 $+\infty$ (读作"正无穷大")及 $-\infty$ (读作"负无穷大")，则可类似地表示无限区间.

例如，$[a,+\infty)=\{x \mid a\le x\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$. 这两个无限区间在数轴上如图1-1-6 所示.


$[a,+\infty)=\{x \mid a\le x\}$;　　$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$.

(a)　　(b)

图 1-1-6

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

注：在本教程中，当不需要特别辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时，常将其简称为“区间”，并常用 $I$ 表示之.

## 三、邻域

**定义6** 设 $a$ 与 $\delta$ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 $a$ 的 **$\delta$ 邻域**，记为

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中，点 $a$ 叫做该**邻域的中心**，$\delta$ 叫做该**邻域的半径**（见图1-1-7).

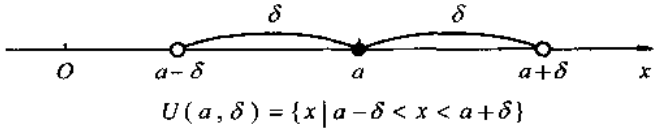


**图1-1-7**

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 $a$ 的**去心**的 $\delta$ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

更一般地，以 $a$ 为中心的任何开区间均是点 $a$ 的邻域，当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$.

## 四、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中，往往同时存在多个不断变化的量(变量)，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律．函数就是描述这种联系的一个法则．本节我们先讨论两个变量的情形（多于两变量的情形将在第8章再讨论).

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 $t$，落下的距离为 $s$．假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 $s$ 与 $t$ 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 $g$ 是重力加速度.

**定义7** 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的非空数集．如果对于每个数 $x\in D$，变量 $y$ 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的**函数**，记作

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中，$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**，数集 $D$ 称为这个函数的**定义域**，也记为 $D_f$，

即 $D_f=D$.

对 $x_0\in D$，按照对应法则 $f$，总有确定的值 $y_0$（记为 $f(x_0)$）与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 $x_0$ 处的**函数值**. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 $x$ 遍取 $D$ 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 $f$ 的**值域**，记为 $R_f$ 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

**注**：函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素.两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的(自然)定义域即为开区间 $(-1,1)$.

**函数的图形**

对函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若取自变量 $x$ 为横坐标，因变量 $y$ 为纵坐标，则在平面直角坐标系 $xOy$ 中就确定了一个点 $(x,y)$. 当 $x$ 遍取定义域 $D$ 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**（见图 1-1-8）.

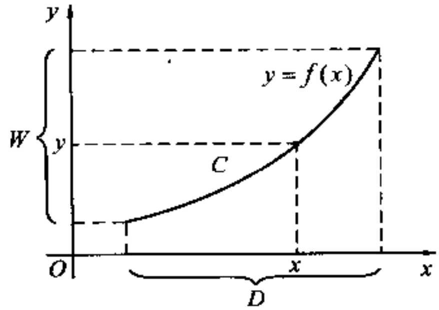

图 1-1-8

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上确定了一个以 $x$ 为自变量、$y$ 为因变量的函数. 对每一个 $x\in(-a,a)$，都有两个 $y$ 值（$\pm\sqrt{a^2-x^2}$）与之对应，因而 $y$ 是多值函数.

**注**：今后，若无特别声明，函数均指单值函数.

**函数的常用表示法**

(1) **表格法**　自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法**　在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)**　自变量和因变量之间的关系用数学表达式（又称为解析表达式）来表示的方法. 根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种：

(i) 显函数　函数 $y$ 由 $x$ 的解析表达式直接表示. 例如，$y=x^2+1$.

(ii) 隐函数 函数的自变量 $x$ 与因变量 $y$ 的对应关系由方程

$$F(x,y)=0$$

来确定. 例如, $\ln y=\sin(x+y)$.

(iii) 分段函数 函数在其定义域的不同范围内, 具有不同的解析表达式. 以下是几个分段函数的例子.

**例 1** 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=[0,+\infty)$, 图形如图 1-1-9 所示.

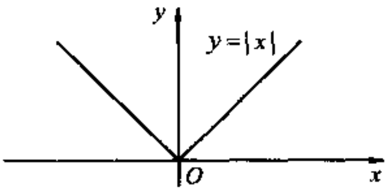


图 1-1-9

**例 2** 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{-1,0,1\}$, 图形如图 1-1-10 所示.

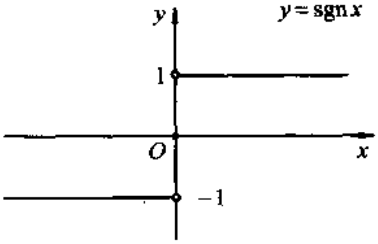


图 1-1-10

**例 3** 取整函数

$$y=[x],$$

其中, $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数. 例如,

$$[\pi]=3,\quad [-2.3]=-3,\quad [\sqrt{3}]=1.$$

易见, 取整函数的定义域

$$D=(-\infty,+\infty),$$

值域 $R_f=\mathbf{Z}$, 图形如图 1-1-11 所示.

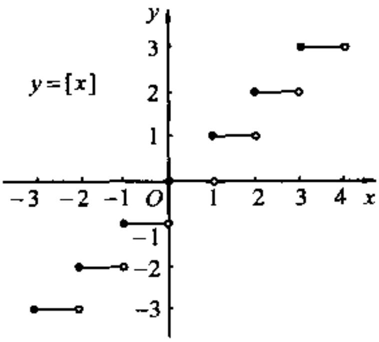


图 1-1-11

**例 4** 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}.$$

易见, 该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{0,1\}$, 但它没有直观的图形表示.

## 五、函数关系的建立

为解决实际应用问题, 首先要将该问题量化, 从而建立起该问题的**数学模型**, 即建立**函数关系**.

要把实际问题中变量之间的函数关系正确抽象出来, 首先应分析哪些是常量, 哪些是变量, 然后确定选取哪个为自变量, 哪个为因变量, 最后根据题意建立它们之

间的函数关系，同时给出函数的定义域．

**例5** 某工厂生产某型号车床，年产量为 $a$ 台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 $b$ 元．设产品均匀投入市场，且上一批用完后立即生产下一批，即平均库存量为批量的一半．设每年每台库存费为 $c$ 元．显然，生产批量大则库存费高；生产批量少则批数增多，因而生产准备费高．为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系．

**解** 设批量为 $x$，库存费与生产准备费之和为 $f(x)$．因年产量为 $a$，所以每年生产的批数为 $\frac{a}{x}$(设其为整数)．于是，生产准备费为 $b\cdot\frac{a}{x}$，因库存量为 $\frac{x}{2}$，故库存费为 $c\cdot\frac{x}{2}$．由此可得

$$f(x)=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}=\frac{ab}{x}+\frac{cx}{2}.$$

$f(x)$ 的定义域为 $(0,a]$，注意到本题中的 $x$ 为车床的台数，批数 $\frac{a}{x}$ 为整数，所以 $x$ 只取 $(0,a]$ 中的正整数因子．

**例6** 某运输公司规定货物的吨·公里运价为：在 $a$ 公里以内，每公里 $k$ 元，超过部分为每公里 $\frac{4}{5}k$ 元．求运价 $m$ 和里程 $s$ 之间的函数关系．

**解** 根据题意，可列出函数关系如下：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\le a \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & a<s \end{cases},$$

这里运价 $m$ 和里程 $s$ 的函数关系是用分段函数来表示的，定义域为 $(0,+\infty)$．

## 六、函数特性

**1. 函数的有界性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，数集 $X\subset D$，若存在一个正数 $M$，使得对一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\le M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $X$ 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 $X$ 上的**有界函数**．每一个具有上述性质的正数 $M$，都是该**函数的界**．

若具有上述性质的正数 $M$ 不存在，则称 $f(x)$ 在 $X$ 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 $X$ 上的**无界函数**．

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何实数 $x$，恒有 $|\sin x|\le 1$．函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界．

**例7** 证明函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的．

**证明**　因为 $(1-|x|)^2 \ge 0$，所以 $|1+x^2| \ge 2|x|$，故对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，恒有

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{2|x|}{2|1+x^2|} \le \frac{1}{2}$$

从而函数 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的.

**2. 函数的单调性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调增加函数**；如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是**单调减少函数**.

例如，$y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的，在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的（见图 1–1–12）. 而 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的（见图 1–1–13）.

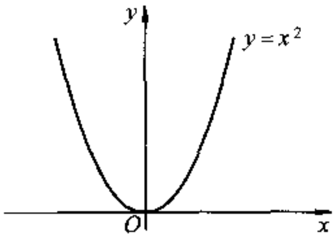


图 1–1–12

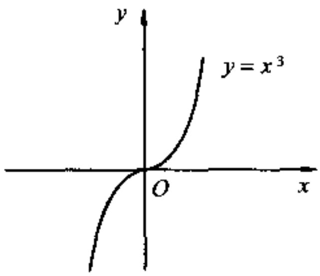


图 1–1–13

由定义易知，单调增加函数的图形沿 $x$ 轴正向是逐渐上升的（见图1–1–14），单调减少函数的图形沿 $x$ 轴正向是逐渐下降的（见图1–1–15）.

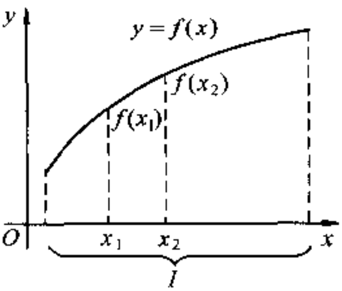


图 1–1–14

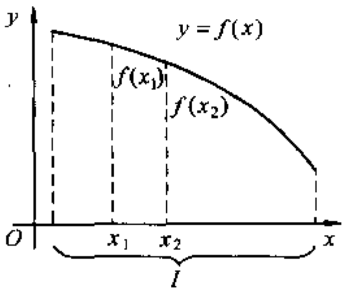


图 1–1–15

**例 8**　证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的函数.

**证明**　在 $(-1,+\infty)$ 内任取两点 $x_1$, $x_2$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 $x_1$, $x_2$ 是 $(-1,+\infty)$ 内任意两点，所以

$$1+x_1>0,\ 1+x_2>0.$$

又因为 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的.

**3. 函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称. 若 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若 $\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 $y$ 轴是对称的(见图1–1–16). 奇函数的图形关于原点是对称的(见图1–1–17).

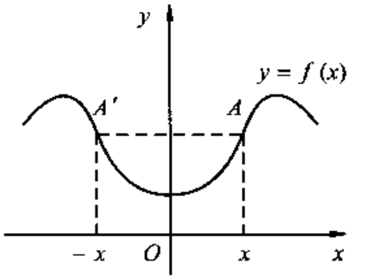


**图 1–1–16**

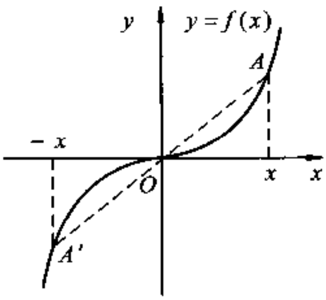


**图 1–1–17**

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数；函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

**例 9**　判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

**解**　因为函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

**4. 函数的周期性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$, 如果存在常数 $T>0$, 使得对一切 $x\in D$, 有 $(x\pm T)\in D$, 且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**, $T$ 称为 $f(x)$ 的**周期**.

例如, $\sin x$, $\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数; 函数 $\tan x$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点是, 如果把一个周期为 $T$ 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离, 则它将与周期函数的其它部分图形重合(见图1-1-18).

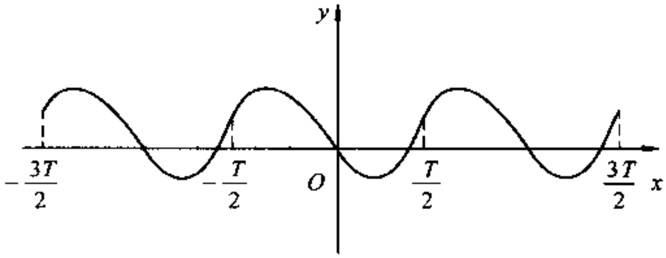


图 1-1-18

通常周期函数的周期是指其**最小正周期**. 但并非每个周期函数都有最小正周期.

**例10**　狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 是有理数时\\ 0, & 当\ x\ 是无理数时\end{cases},$$

易验证它是一个周期函数. 事实上, 任何正有理数都是它的周期, 因为不存在最小的正有理数, 所以它没有最小正周期.

**例11**　若 $f(x)$ 对其定义域上的一切 $x$, 恒有

$$f(x)=f(2a-x),$$

则称 $f(x)$ 对称于 $x=a$. 证明: 若 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$ $(a<b)$, 则 $f(x)$ 是以 $T=2(b-a)$ 为周期的周期函数.

**证明**　由 $f(x)$ 对称于 $x=a$ 及 $x=b$, 则有

$$f(x)=f(2a-x), \tag{1.1}$$

$$f(x)=f(2b-x). \tag{1.2}$$

在式(1.2)中, 把 $x$ 换为 $2a-x$, 得

$$f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f[x+2(b-a)].$$

由式(1.1)有