新课标

同一堂课

高效全程导学

GAOXIAO QUANCHENG DAOXUE

丛书总主编：薛金星

配套人民教育出版社实验教科书

高中数学A

选修2-1

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

新课标

同一堂课

高效全程导学

Gaoxiao Quancheng Daoxue

丛书主编：薛金星

配套人民教育出版社实验教科书

高中数学

选修②-1

主　编：王伟涛

A版

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

同一堂课·高效全程导学

高中数学·选修2－1

配套人民教育出版社实验教科书A版

出版:21世纪出版社

地址:江西省南昌市子安路75号　　邮编:330009

发行:北京白鹿苑文化传播有限公司

印刷:涿州市海洋印刷厂

版次:2006年1月第1版第1次印刷

开本:880×1230毫米　1/16　印张:8

书号:ISBN 7－5391－3234－5

定价:12.00元

前言

同学们,《高中新课标高效全程导学》丛书和大家见面了,它作为你学习的良师益友,将伴随你度过高中三年宝贵的学习时光。

随着课程改革的不断深化和新教材在全国范围的使用,新的教育理念日益深入人心,新的课程标准也得到认真贯彻。为适应新的学习需要,我们精心组织编写了这套丛书。编写的宗旨是“导学”——激发兴趣,启迪探究,拓展认知,锤炼能力;编写的体例是“全程”——与教材同步,以单元(章)为大单位,以课(节)为小单位,按课前、课中、课后三个学习阶段,设三个模块,每个模块设若干栏目,对同学们应掌握的知识和应具备的能力进行指导和训练。随着这些模块和栏目的日修月炼,教材所包含的丰富内容,将如“好雨知时节”那样,“润物细无声”地化为同学们的“知识与技能,过程与方法,情感态度与价值观”。

第一模块是“预而立之”。中国有古训“凡事预则立,不预则废”。就是说不论做什么事情,预先做好准备,才能成功;不预先做好准备,就会失败。学习当然也如此,课前的预习是一个重要环节。做好课前预习,课堂上才能充分开展师生间的互动和交流,收到好的学习效果。“预而立之”设两个栏目:一是[课标导航]。本栏目将帮助同学们明确学习目标,知道学习精力应往哪儿使;同时在学习目标引导下,收集相关信息,养成关注信息的习惯和处理信息的能力;二是[自学引领]。本栏目将帮助同学们创设自学情景,指导自学方法,培养终身受益的自学能力,同时也为提高课堂学习效率奠定良好基础。

第二模块是“博而学之”。《中庸》中说:“博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃行之。”这里论述的是学习过程中必须把握住的几点要领:要广泛地学习知识,详尽地探究原理,慎重地思考得失,明确地辨别正误,切实地进行实践。把握住这几点,课堂学习效果自然会好。本模块设四个栏目:一是[知识窗口]。帮助同学们掌握本课(节)应知应会的基础知识,通过[知识窗口]认识世界;二是[要点探究]。引领同学们深入探究本课(节)的重点和难点,整体把握教材内容;三是[例题精析]。选择有代表性的典型例题,进行解说,指明思路,训练思维;四是[互动平台]。通过提出若干思考题进行师生间、同学间互动交流,总结知识规律和解决方法。本模块需要申明两点:一是每个学科都有各自的特点,因而所设栏目可能因学科不同而有所变动;二是课堂学习是以教师为主导进行的,同学们要在本模块所设栏目引领下,很好地配合教师的教学。

第三模块是“学而习之”。《论语》开篇第一句说:“子曰:学而时习之,不亦说乎!”课后复习,不仅能巩固所学知识,而且能温故而知新,提升学习质量,的确是学习生活中必不可少的一步。因而“学而习之”是本丛书的重点模块,设三个栏目:一是[达标演练]。旨在巩固已学过的知识,同时也是自我评价,测试一下自己是否达到了“预而立之”所提出的学习目标;二是[能力提升]。本栏目所列练习题是[达标演练]题的延伸和深化,培养探究精神,提高灵活运用所学知识的能力;三是[拓展创新]。本栏目所列习题,是在以上两类习题基础上的拓展,有一定难度,思维空间也更为广阔,适于创新意识的培养和创新能力的提高。

在以上三个模块之外,本丛书大部分科目在每个单元(章)之后还配置了[单元评价],每册书之后配置了[综合评价]。这些练习题更注重上、中、下三个档次题的难度搭配,习题内容也更注重联系同学们的生活经验,联系社会热点问题,联系当代科技发展的前沿知识,其题型、内容、难度都极力向高考题拉近。同学们只要认真做好这些练习题,实质上就是进行一次次高考的实战演习。

同学们,这套丛书由全国各地最富有教学经验的老师们编写,他们了解同学们的实际,熟知学科知识的体系和结构,也洞悉高考改革的趋向。同学们只要随身携带这套丛书,就必将起到你行进中的手杖和指示灯的作用。当你顺利步入高等学府的殿堂时,这套丛书仍会是你学习生活中永远的记忆。

目 录 同一堂课高效全程导学·数学

CONTENTS

第一章　常用逻辑用语 …… (1)

1.1　命题及其关系 …… (1)

1.2　充分条件与必要条件 …… (5)

1.3　简单的逻辑联结词 …… (11)

1.4　全称量词与存在量词 …… (15)

章末测试 …… (18)

第二章　圆锥曲线与方程 …… (20)

2.1　椭圆 …… (20)

2.2　双曲线 …… (30)

2.3　抛物线 …… (39)

2.4　直线与圆锥曲线的位置关系 …… (48)

2.5　曲线与方程 …… (54)

章末测试 …… (58)

第三章　空间向量与立体几何 …… (60)

3.1　空间向量及其运算 …… (60)

3.2　立体几何中的向量方法 …… (79)

章末测试 …… (90)

参考答案 …… (92)

第一章

常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

第一课时　命　题

要点扫描

1. ________叫做命题.

2. 如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的____和____，那么这两个命题叫做互逆命题.

3. 如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的________和________，那么这两个命题叫做互否命题.

学习探究

1. 命题

可以判断真假的陈述句，叫做命题.

2. 命题的四种形式

原命题：若 p 则 q；

逆命题：若 q 则 p（交换原命题的条件和结论）；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$（同时否定原命题的条件和结论）；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$（交换原命题的条件和结论，并且同时否定）.

在学习过程中，要注意条件 p、q 位置的变化及否定与否.

激活思维

例 1　下列语句中是命题的有________（写出序号）.其中是真命题的有________（写出序号）.

①“等边三角形难道不是等腰三角形吗？”；

②“垂直于同一条直线的两条直线必平行吗？”；

③“一个数不是正数就是负数”；

④“大角所对的边大于小角所对的边”；

⑤“$x+y$ 为有理数，则 x、y 也都是有理数”；

⑥“作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$”.

分析：根据命题的概念，判断是否是命题，若是，再判断真假.

解：①通过反意疑问句，对等边三角形是等腰三角形作出判断，是真命题.

②疑问句.没有对垂直于同一直线的两条直线是否平行作出判断，不是命题.

③是假命题.数 0 既不是正数也不是负数.

④是假命题.没有考虑在同一个三角形中.

例 2　(1)命题“末位是 2 的整数一定是偶数”的逆命题是“________________”.

(2)命题“整数是有理数”的否命题是“________________”.

(3)命题“到一个角的两边距离不相等的点不在该角的平分线上”的逆否命题是“________________”.

答案：(1)偶数一定是末位是 2 的整数.

(2)不是整数的数就不是有理数.

(3)在一个角的平分线上的点到这个角的两边距离相等.

例 3　在一次篮球训练中，某运动员接连投篮两次.设命题 p 是“第一次投篮命中”，q 是“第二次投篮命中”.试用 p、q 及逻辑联结词“或”、“且”、“非”（$\vee$，$\wedge$，$\neg$）表示下列命题：

(1)两次投篮都命中；

(2)两次投篮都没有命中；

(3)恰有一次命中；

(4)至少有一次命中.

答案：

(1)$p\wedge q$. (2)$(\neg p)\wedge(\neg q)$. (3)$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$.

(4)$\neg(\neg p\wedge\neg q)$.

自我测评

一、选择题

1.【2004·天津市十校联考】同时满足下列四个条件中的 2 个，其中与$\begin{cases}|x|<1\\|y|<1\end{cases}$等价的是(　　)

①$|x|+|y|<2$　　②$(|x|-1)(|y|-1)<0$

③$(|x|-1)(|y|-1)>0$　④$x^2+y^2<2$

A. ①②　　B. ①③或③④

C. ①②或③④　　D. ②③或③④

二、填空题

2.【2003·南通市第一次调研】已知 α，β 是实数，给出下列四个论断：

①$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$；

②$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha+\beta|$；

③ $|\alpha|>2\sqrt{2}$，$|\beta|>2\sqrt{2}$；

④ $|\alpha+\beta|>5$.

以其中的两个论断为条件，其余两个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：

____

3. 命题“若 $|f(x)|>a$，则 $f(x)>a$，或 $f(x)<-a$”的否命题是________.

4. 下列命题：

①“若“$xy=1$，则 x,y 互为倒数”的逆命题；

②“四边相等的四边形是正方形”的否命题；

③“梯形不是平行四边形”的逆否命题；

④“若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$”的逆命题；

其中真命题是________.

5. 命题“若 $m\geqslant 0$，则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题是(　　)

(A)若 $x^2+x-m=0$ 有实数根，则 $m\geqslant 0$

(B)若 $m\leqslant 0$，则 $x^2+x-m=0$ 没有实数根

(C)若 $x^2+x-m=0$ 没有实数根，则 $m<0$

(D)若 $m<0$，则 $x^2+x-m=0$ 没有实数根

6. 下面四个命题：①“若 $x^2+y^2=0$，则 x,y 均为零”的逆命题；②“相似三角形的面积相等”的否命题；③“若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$”的逆否命题；④“末位数不是零的数可被 3 整除”的逆否命题. 其中真命题是(　　)

(A)①②　　(B)②③　　(C)①③　　(D)③④

7. 设 A,B 为两个集合，下列四个命题：

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\notin B$；

②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；

③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；

④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是________.(把符合要求的命题序号都填上)

8. 命题 A：底面为正三角形，且顶点 A 在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥.

命题 A 的等价命题可以是：底面为正三角形，且________的三棱锥是正三棱锥.

9. 命题“若 $\angle A=60°$，则 $\triangle ABC$ 是等边三角形”的否命题是(　　)

(A)假命题

(B)与原命题同真或同假

(C)与原命题的逆否命题同真或同假

(D)与原命题的逆命题同真

10. 菱形的对角线互相垂直，将此命题写成“若 p 则 q”的形式，写出它的逆命题，否命题，逆否命题并指出真假.

课后小结

四种命题

1. 原命题：它是相对其他三种命题而言人为指定的命题，不是固定不变的，可以把任意一个命题看成原命题，进而研究它的其他形式.

2. 逆命题：把原命题的条件作为结论，而原命题的结论作为条件，得到的命题称为原命题的逆命题.

3. 否命题：将原命题中的条件和结论同时加以否定后得到的命题称为原命题的否命题.

4. 逆否命题：将原命题的条件加以否定，作为结论，而原命题的结论加以否定作为条件得到的新命题称为原命题的逆否命题.

第二课时　四种命题的相互关系

要点扫描

1. 原命题为真，它的逆命题________为真.

2. 原命题为真，它的否命题________为真.

3. 原命题为真，它的逆否命题________为真.

4. 用反证法证明的一般步骤是：

(1)________________；

(2)________________；

(3)________________.

5. 反证法中引出矛盾的四种常见形式：

(1)________________；

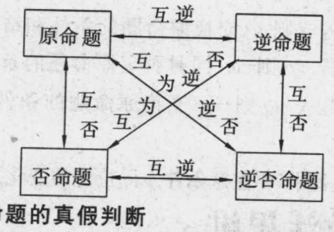
(2)________________；

(3)________________；

(4)________________.

学习探究

1. 四种命题之间的关系



2. 四种命题的真假判断

(1)原命题为真，它的逆命题可以为真，也可以为假.

(2)原命题为真，它的否命题可以为真，也可以为假.

(3)原命题为真，它的逆否命题一定为真.

(4)互为逆否的命题是等价命题，它们同真同假，同一个命题的逆命题和否命题是一对互为逆否的命题，所以它们同真同假.

综合上述四条可知，在同一个命题的四种命题中，真命题的个数要么是 0 个，要么是 2 个，要么是 4 个.

3. 反证法的步骤

(1)假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

(2)从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

(3)由矛盾判定假设不成立，从而肯定命题的结论成立.

4. 反证法导出结果的几种情况

(1)导出非 p 为真，即与原命题的条件矛盾；

(2)导出 q 为真，即与假设“非 q 为真”矛盾；

(3)导出一个恒假命题，即与定义、公理、定理矛盾；

(4)导出自相矛盾的命题.

激活思维

例1 (2002年江西省五校联考题)在下列命题中,真命题是(　　)

A. 命题"若 $ac>bc$,则 $a>b$"

B. 命题"若 $b=3$,则 $b^2=9$"的逆命题

C. 命题"当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$"的否命题

D. 命题"相似三角形的对应角相等"的逆否命题

解析:对A,因为 c 的正负未知,因而 a 与 b 的大小不定,所以A假;对B,逆命题是"若 $b^2=9$,则 $b=3$"它未必成立,因为 b 可能等于 -3,所以B假;对C,否命题为"当 $x\neq2$时,$x^2-3x+2\neq0$"为假,因为 $x\neq2$,但可以为1,使 $x^2-3x+2=0$ 成立;对D,其逆否命题为"两个三角形的对应角不相等,则这两个三角形不相似",为真,因为原命题与逆否命题为等价命题,原命题为真.

答案:D

例2 有下列四个命题:

①若"若 $x+y=0$,则 x、y 互为相反数"的逆命题;

②若"$a>b$,则 $a^2>b^2$"的逆否命题;

③"若 $x\leqslant-3$,则 $x^2+x-6>0$"的否命题;

④"若 a^b 是无理数,则 a,b 是无理数"的逆命题.

若中真命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解析:①逆命题"x、y 互为相反数,则 $x+y=0$"是真命题.

②∵ 原命题为假,∴ 其逆否命题为假.

③否命题"若 $x>-3$,则 $x^2+x-6\leqslant0$",假如 $x=4>-3$ 但 $x^2+x-6=14>0$.

④逆命题"若 a、b 是无理数,则 a^b 也是无理数",假如 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$,$b=\sqrt{2}$,则 $a^b=2$ 是有理数.

答案:B

例3 证明:已知函数 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,$a,b\in\mathbf{R}$.若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant\mathbf{0}$.

证明:原命题的逆否命题为"若 $a+b<\mathbf{0}$,则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$."

若 $a+b<\mathbf{0}$,则 $a<-b$,$b<-a$,

又∵ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,

∴ $f(a)<f(-b)$,$f(b)<f(-a)$.

∴ $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,

即逆否命题为真命题.

∴ 原命题为真命题.

评注:在证明时,一定要正确写出已知命题的逆否命题.

例4 已知圆 O 的半径为 r,圆心 O 到直线 l 的距离为 d.求证:$d=r$ 是直线 l 与圆 O 相切的充要条件.

证明:如图所示,作 $OP\perp l$ 于 P,则 $OP=d$.

充分性:若 $d=r$,则点 P 在⊙O上.在直线 l 上任取一点 Q(异于点 P),连结 OQ.在 Rt△OPQ 中,$OQ>OP=r$,所以,直线 l 上的点除点 P 外都在⊙O 的外部,即直线 l 与⊙O 仅有一个公共点 P,则直线 l 与⊙O 相切.

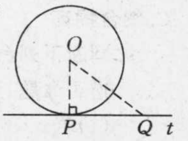


图 1-1-1

必要性:若直线 l 与⊙O 相切,不妨设切点为 P,则 $OP\perp l$,那么,$d=OP=r$.

例5 用反证法证明:若 m,n 都为奇数,则关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 没有整数根.

证明:假设关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 有整数解,不妨设为 x_0,则 $x_0^2+mx_0+n=0$,$n=-x_0^2-mx_0$

若 x_0 为奇数,则 x_0^2 为奇数,mx_0 为奇数,$-x_0^2-mx_0$ 为偶数,这与 n 为奇数矛盾;若 x_0 为偶数,则 x_0^2 为偶数,mx_0 偶数,$-x_0^2-mx_0$ 为偶数,这与 n 为奇数矛盾;

所以 x_0 为整数不成立,命题得证.

自我测评

A. 基础训练

1. 下列命题中,不是真命题的为(　　)

A. "若 $b^2-4ac>0$,则二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根"的逆否命题

B. "四边相等的四边形是正方形"的逆命题

C. "$x^2=9$,则 $x=3$"的否命题

D. "对顶角相等"的逆命题

2. 命题"若$\neg p$ 则 q"是真命题,则下列命题一定是真命题的是(　　)

A. 若 p 则$\neg p$　　B. 若 q 则$\neg p$

C. 若$\neg q$ 则 p　　D. 若$\neg q$ 则$\neg p$

3. "已知 $a\in$ 全集 U,若 $a\in A$,则 $a\notin\complement_U A$"的逆命题是______,它是(填真,假)______命题.

4. 否定结论"至多有两个解"的说法中,正确的是(　　)

A. 有一个解　　B. 有两个解

C. 至少有三个解　D. 至少有两个解

5. 命题"a,b 是实数,若$|a-1|+|b-1|=0$,则 $a=b=1$",用反证法证明时的反设为______.

B. 能力培养

6. "若 x、$y\in\mathbf{R}$,且 $x^2+y^2=0$,则 x、y 全为0"的否命题是(　　)

A. 若 x、$y\in\mathbf{R}$,且 $x^2+y^2\neq0$,则 x、y 全不为0

B. 若 x、$y\in\mathbf{R}$,且 $x^2+y^2\neq0$,则 x、y 不全为0

C. 若 x、$y\in\mathbf{R}$,且 x、y 全为0,则 $x^2+y^2=0$

D. 若 x、$y\in\mathbf{R}$,且 $xy\neq0$,则 $x^2+y^2\neq0$

7. 下列四个命题:①"若 $x+y=0$,则 x,y 互为相反数"的否命题;②"若 a 和 b 都是偶数,则 $a+b$ 是偶数"的否命题;③"若 $a>b$,则 $a^2>b^2$"的逆否命题;④已知 a,b,c,d 是实数,"若 $a=b$,$c=d$,则 $a+c=b+d$"的逆命题,其中真命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 用反证法证明"若 ab 不是偶数,则 a,b 都不是偶数"时,应假设______.

C. 综合提高

9. 判断下列命题的真假，并写出它们的逆命题、否命题、逆否命题，同时判断这些命题的真假.

(1)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

(2)若四边形的对角互补，则该四边形是圆的内接四边形；

(3)若在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，$b^2-4ac<0$，则该二次函数图象与 x 轴有公共点.

10. 已知 $c>0$，设 p：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；q：函数 $y=\lg(2cx^2+2x+1)$ 的值域是 $\mathbf{R}$. 如果“p 且 q”为假，“p 或 q”为真，求 c 的取值范围.

11. 已知 a、b、c 是一组勾股数（即 $a^2+b^2=c^2$），求证：a、b、c 不可能都是奇数.

课后小结

1. 一般地，四种命题的真假性，有且仅有下面四种情况：

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

由于逆命题与否命题也是互为逆否命题，因此这四种命题的真假性之间的关系如下：

(1)两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

(2)两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系.

2. 由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性，即互为逆否命题具有等价性，所以我们在直接证明某一个命题为真命题有困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，来间接地证明原命题为真命题.

3. 反证法是一种推翻命题结论的所有反面情况，从而树立原命题正确的证明方法，学习反证法一定要注意结论的反面结论可能不唯一.

4. 反证法的一般步骤：

(1)假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

(2)从假设出发，经过推理论证得出矛盾；

(3)由矛盾判断假设不成立，从而肯定命题的结论成立.

1.2　充分条件与必要条件

第一课时　充分条件与必要条件、充要条件

要点扫描

1. 如果命题“若 p 则 q”为真，记为________，“若 p 则 q”为假，记为________.

2. 如果已知 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的________，q 是 p 的________.

3. 如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的________，记为________.

4. 如果 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的________.

学习探究

1. 充分条件与必要条件

当“若 p 则 q”形式的命题为真时，就记为 $p\Rightarrow q$，称 p 是 q 的充分条件，同时称 q 为 p 的必要条件.

事实上，p 是 q 的充分条件，就是条件 p 足以能保证结论 q 成立；这种情况下，也可以理解为：条件 p 成立，必须 q 成立，说明对 p 来说，q 是必要的，所以 q 是 p 的必要条件. 由此可见，判断充分条件或者必要条件实质上就是要判断命题“若 p 则 q”(或者其逆命题)的真假，判断条件 A 能否推出 B(或者条件 B 能否推出 A).

2. 充要条件

如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，则可以记为 $p\Leftrightarrow q$，这时称 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件.

根据充分条件和必要条件的定义，p 是 q 的充分必要条件说明：p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件. 而且当 p 是 q 的充要条件时，根据对称性，q 也同时是 p 的充要条件，符号“$\Leftrightarrow$”叫做等价符号.

激活思维

例 1　设 A、B、C 为三个集合，为使 $A\subsetneqq(B\cup C)$，条件 $A\subsetneqq B$ 是(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

分析：可以结合图形分析.

解：如图 1-2-1.

$\because A\subsetneqq B$，而 $B\subseteq(B\cup C)$，

$\therefore A\subsetneqq(B\cup C)$.

但是当 $B=\mathbf{N}$，$C=\mathbf{R}$，$A=\mathbf{Z}$ 时，显然 $A\subsetneqq(B\cup C)$，但 $A\subsetneqq B$ 不成立.

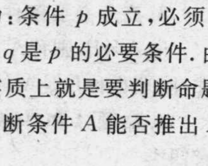


图 1-2-1

综上所述，“$A\subsetneqq B$”$\Rightarrow$“$A\subsetneqq(B\cup C)$”而“$A\subsetneqq(B\cup C)$”$\nRightarrow A\subsetneqq B$.

答案：A

例 2　(2003 年天津市统考题)下面命题中的真命题是(　　)

A. $x>2$ 且 $y>3$ 是 $x+y>5$ 的充要条件

B. $A\cap B\neq\varnothing$ 是 $A\subsetneqq B$ 的充分条件

C. $b^2-4ac<0$ 是一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的充要条件

D. 一个三角形的三边满足勾股定理的充要条件是此三角形为直角三角形

解析：对于 A，$x>2$ 且 $y>3\Rightarrow x+y>5$，但 $x+y>5$ 未必能推出 $x>2$ 且 $y>3$，如 $x=0$ 且 $y=6$ 满足 $x+y>5$ 但不满足 $x>2$，故 A 假.

对于 B，$A\cap B\neq\varnothing$ 未必能推出 $A\subsetneqq B$，如 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，故 B 为假.

对于 C，$b^2-4ac<0$ 是一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的充要条件是假命题，如一元二次不等式 $-2x^2+x-1>0$ 的解集为 $\varnothing$，但满足 $b^2-4ac<0$.

对于 D，是真命题. 因为一个三角形的三边满足勾股定理能推出此三角形为直角三角形，条件不仅是必要的，也是充分的，故是充要的.

答案：D

评注：对于充要条件的判断，要仔细考虑问题的各种情况，且不可粗心大意，考虑不全造成失误.

例 3　$0<x<5$ 是不等式 $|x-2|<4$ 成立的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：由题意，设 $A=\{x\mid 0<x<5\}$，$B=\{x\mid |x-2|<4\}=\{x\mid -2<x<6\}$，从而有 $A\subsetneqq B$，所以 A 中元素一定是 B 中的元素，而 B 中存在 A 中没有的元素，故 $0<x<5\Rightarrow|x-2|<4$，而 $|x-2|<4\nRightarrow 0<x<5$，所以 $0<x<5$ 是 $|x-2|<4$ 的充分不必要条件.

答案：A

例 4　若 $\neg A$ 是 B 的充分不必要条件，则 A 是 $\neg B$ 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 必要条件

D. 既不充分又不必要条件

解析：$\because \neg A\Rightarrow B$，且 $B\nRightarrow\neg A$，

$\therefore \neg B\Rightarrow A$，且 $A\nRightarrow\neg B$.

$\therefore A$ 是 $\neg B$ 的必要不充分条件.

答案：B

评注：据互为逆否命题的等价性，可以来判断充要条件，本题还综合考虑了递推法及定义等.

自我测评

分级训练

A.基础训练

1.设原命题"若 p 则 q"为真,而逆命题为假,则 p 是 q 的(　　)

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

2.设原命题"若 p 则 q"假,而逆命题真,则 p 是 q 的(　　)

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

3.设原命题"若 p 则 q"与逆命题皆假,则 p 是 q 的(　　)

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

4.设原命题"若 p 则 q"与逆命题皆真,则 p 是 q 的(　　)

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

5.M:p 或 q 是真命题,N:p 且 q 为真命题,则 M 是 N 的(　　)

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

B.能力培养

6.$ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的充要条件是(　　)

A.$0<a\leqslant 1$　　B.$a<1$
C.$a\leqslant 1$　　D.$0<a\leqslant 1$,或 $a<0$

7."p 或 q 为真命题"是"p 且 q 为真命题"的(　　)

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充分必要条件
D.既不充分也不必要条件

8.**(2004年,湖南卷)**设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$,$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$.那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$ 的充要条件是(　　)

A.$m>-1,n<5$　　B.$m<-1,n<5$
C.$m>-1,n>5$　　D.$m<-1,n>5$

9.对于实数 x,y,条件 p:$x+y\neq 8$,条件 q:$x\neq 2$ 或 $y\neq 6$.那么 p 是 q 的(　　)

A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件
D.既不充分也不必要条件

C.综合提高

10.**(2003年广东模拟题)**如果 x、y 是实数,那么"$xy>0$"是"$|x+y|=|x|+|y|$"的(　　)

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件
C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

11.$b^2-4ac>0$,则"$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$"的______条件是"$a>0$".

12."$x>y>0$"是"$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$"的______条件.

13."$a>b$"是"$\frac{b}{a}>1$"的______条件.

课后小结

1.充分条件

若 $A\Rightarrow B$,则称 A 是 B 的充分条件,即由 A 成立可得出 B 成立,则 A 是 B 成立的充分条件.

2.必要条件

若 $A\Rightarrow B$,则称 B 为 A 的必要条件,也可理解为:若 $\neg B$,则 $\neg A$,即:如 B 不成立,则 A 一定不成立.

3.充分必要条件

若 $A\Leftrightarrow B$,则称 A 是 B 的充分且必要条件,简称为充要条件,同理也称 B 是 A 的充要条件.

4.命题 A 和 B(有时也称题设 A 和 B)的条件关系通常有四类

(1)充分不必要条件:若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\nRightarrow A$,则称 A 为 B 的充分不必要条件.

(2)必要不充分条件:若 $A\nRightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$,则称 A 是 B 的必要而不充分条件,即常说的"有它不一定行,而没它肯定不行".

(3)充要条件:$A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$,则称 A 为 B 的充分必要条件.同时,B 也是 A 的充要条件.

(4)既不充分也不必要条件:$A\nRightarrow B$ 且 $B\nRightarrow A$.则 A 既不是 B 的充分条件也不是 B 的必要条件.

注意:通常要说明的条件关系一般是指这四种,但有时可能会出现只填"充分条件"或"必要条件".

第二课时　充要条件的判定及证明

要点扫描

1.若 $p\Rightarrow q,q\Rightarrow r$,则 p____r,p 是 r 的____条件.

2.若 $p\Rightarrow q,q\Rightarrow r,r\Leftrightarrow s$,则 p____s,s 是 p 的____条件.

3.在"$x^2+(y-2)^2=0$ 是 $x(y-2)=0$ 的充分不必要条件"这句话中,已知条件是______,结论是______.

4.在"$y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(1,0)$ 的充要条件是 $a+b+c=0$"这句话中,已知条件是______,结论是______.

学习探究

1. 充要条件的传递性

若 $A\Rightarrow B, B\Rightarrow C, C\Rightarrow D$，则 $A\Rightarrow D$，即 A 是 D 的充分条件，利用这一结论可研究多个命题之间的充要关系.

2. 证明充要性

证明 p 是 q 的充要条件，既要证明命题“$p\Rightarrow q$”为真，又要证明命题“$q\Rightarrow p$”为真，前者证明的是充分性，后者证明的是必要性.

激活思维

例 1　已知 p、q 都是 r 的必要条件，s 是 r 的充分条件，q 是 s 的充分条件. 那么：(1) s 是 q 的什么条件？(2) r 是 q 的什么条件？(3) p 是 q 的什么条件？

分析：将已知 r、p、q、s 的关系作一个“$\Rightarrow$”图.

$$\begin{array}{ccccc} p & \Leftarrow & r & \Leftarrow & s \\ & & \Downarrow & \nearrow & \\ & & q & & \end{array}$$

图 1-2-2

解：(1)由图 1-2-2 知：$\because q\Rightarrow s, s\Rightarrow r\Rightarrow q$，

$\therefore s$ 是 q 的充要条件.

(2) $\because r\Rightarrow q, q\Rightarrow s\Rightarrow r$，

$\therefore r$ 是 q 的充要条件.

(3) $\because q\Rightarrow s\Rightarrow r\Rightarrow p$，$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

评注：“$\Rightarrow$”在解决较多个条件的问题时经常用到，要细心体会递推法是理解充要条件的一重要方法.

例 2　已知 $p: -2<m<0, 0<n<1$，q：关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 有两个小于 1 的正根，试分析 p 是 q 的什么条件？

解：若 $x^2+mx+n=0$ 有两根 x_1、x_2，则由韦达定理，有 $x_1+x_2=-m, x_1x_2=n$. 又 $0<x_1x_2<1$，

$\therefore -2<m<0, 0<n<1$，即 $q\Rightarrow p$.

由 $m=-1, n=\frac{1}{2}$ 时，方程 $x^2+mx+n=0$ 即 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 无实数根知，$p\not\Rightarrow q$. $\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

例 3　若 $p: A\subsetneqq B\subseteq S$，$q$：$(\complement_S B)\subsetneqq(\complement_S A)$，则 p 是 q 的什么条件？

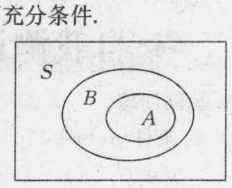


图 1-2-3

解：利用集合的图示法，由图 1-2-3 知 $A\subsetneqq B\subseteq S\Rightarrow(\complement_S B)\subsetneqq(\complement_S A)$，$(\complement_S B)\subsetneqq(\complement_S A)\Rightarrow A\subsetneqq B\subseteq S$，所以 p 是 q 的充要条件.

评注：本题采用的是从条件直接推结论的方法，其中突出了数形结合的思想方法(图示法).

例 4　求证：抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 关于 y 轴对称的充要条件是 $b=0$.

证明：充分性：若 $b=0$，则抛物线方程变为 $y=ax^2+c$. 设 $P(x_0, y_0)(x_0\in\mathbf{R}, y_0\in\mathbf{R})$ 是抛物线上一点，则 $y_0=ax_0^2+c$.

又 $\because P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴对称的点的坐标 $P'(-x_0, y_0)$，

将 $P'(-x_0, y_0)$ 代入 $y=ax^2+c$ 中，

$y_0=a(-x_0)^2+c=ax_0^2+c$.

$\therefore P'(-x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2=ax^2+c$ 上.

由 P 点的任意性可知，$y=ax^2+c$ 关于 y 轴对称.

必要性：若 $y=ax^2+bx+c$ 的图象关于 y 轴对称，则抛物线上任意一点 $P(x_0, y_0)(x_0\in\mathbf{R}, y_0\in\mathbf{R})$ 关于 y 轴的对称点 $P'(-x_0, y_0)$ 也在抛物线上，

$\therefore$ 对 $x_0\in\mathbf{R}$，$ax_0^2+bx_0+c=a(-x_0)^2+b(-x_0)+c$ 成立，即对 x_0 取任意实数 $2bx_0=0$ 成立，$\therefore b=0$.

由上可知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于 y 轴对称的充要条件是 $b=0$.

自我测评

1. $b^2=ac$ 是 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 成立的(　　)

(A)充分而不必要条件
(B)充要条件
(C)必要而不充分条件
(D)既不充分也不必要条件

2. $B=60°$ 是 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 成等差数列的(　　)

(A)充分而不必要条件
(B)充要条件
(C)必要而不充分条件
(D)既不充分也不必要条件

3. $a+b+c=0$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的(　　)

(A)充分不必要条件
(B)充要条件
(C)必要而不充分条件
(D)既不充分也不必要条件

4. 设甲、乙、丙是三个命题，如果甲是乙的充要条件，丙是乙的充分而不必要条件，那么(　　)

(A)丙是甲的充分条件
(B)丙是甲的必要条件
(C)丙是甲的充要条件
(D)丙既不是甲的充分条件，也不是甲的必要条件

5. **(2003 年北京高考题)**“$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$”的(　　)

A. 必要非充分条件
B. 充分非必要条件
C. 充分必要条件
D. 既非充分又非必要

6. **(2004 年福建)**命题 p：若 $a, b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件，命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty, -1]\cup[3, +\infty)$. 则(　　)

A. “p 或 q”为假
B. “p 且 q”为真
C. p 真 q 假
D. p 假 q 真

7.已知 $h>0$，设命题甲为：两个实数 a,b 满足 $|a-b|<2h$；命题乙为：两个实数 a,b 满足 $|a-1|<h$ 且 $|b-1|<h$，那么(　　)

A.甲是乙的充分条件，但不是乙的必要条件

B.甲是乙的必要条件，但不是乙的充分条件

C.甲是乙的充要条件

D.甲不是乙的充分条件，也不是乙的必要条件

(8)若 $p:\frac{x-2}{x+1}>0$；$q:|3x-4|>2$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的________条件.(填：充分不必要，必要不充分，充要，既不充分也不必要)

(9)关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 有两个符号相反的实根的一个充要条件是________.

(10)已知 p：多边形的各内角和为 $180°$；q：多边形是三角形. 则 p ________. (填：$\Rightarrow,\nRightarrow,\Leftrightarrow$)

11.已知 x,y 是非零实数，且 $x>y$，求证：$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$ 的充要条件是 $xy>0$.

课后小结

1.若 $A\Rightarrow B$，$B\Rightarrow C$，则 $A\Rightarrow C$.

若 $A\Leftrightarrow B$，$B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$.

2."甲是乙的充要条件"中"甲是已知条件，乙是结论"，若要证明充分性，即证甲 $\Rightarrow$ 乙，若要证明必要性，即证乙 $\Rightarrow$ 甲.

3.判断充要条件的主要方法有定义法、递推法、集合法及四种命题关系法，其中四种命题关系法，主要指利用逆否命题的等价性作出判断.

第三课时　充分条件与必要条件习题课(一)

例1　已知两个命题：A：$2x+3=x^2$，B：$x\sqrt{3x}=x^2$，则 A 是 B 的(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

分析：注意到本题的两个命题实际上是两个方程的解集，因此考虑运用集合的观点来解决.

解：命题 A 就是 $x\in\{x|2x+3=x^2\}=\{-1,3\}$；

命题 B 就是 $x\in\{x|x\sqrt{3x}=x^2\}=\{0,3\}$.

由于 $\{-1,3\}\not\subseteq\{0,3\}$ 且 $\{0,3\}\not\subseteq\{-1,3\}$，

所以 A 是 B 的既不充分也不必要条件.

答案：D

评注：对于充要条件也可以从集合的观点来认识.

(1)若 $A\subseteq B$，但 $B\not\subseteq A$，则 A 是 B 的充分不必要条件.

(2)若 $A\supseteq B$，但 $B\not\supseteq A$，则 A 是 B 的必要不充分条件.

(3)若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件.

例2　不等式 $|2x+5|\geq 7$ 成立的一个必要不充分条件是(　　)

A. $x\geq 1$　　　　B. $x\leq -6$

C. $x\geq 1$ 或 $x\leq -6$　　　　D. $x>0$ 或 $x<0$

解析：$\because |2x+5|\geq 7\Leftrightarrow x\leq -6$ 或 $x\geq 1$.

答案：D

变式引申：(2004年，厦门)"$a>1$"是"$\frac{1}{a}<1$"的(　　)

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

解析：$\because \frac{1}{a}<1\Leftrightarrow\frac{a-1}{a}>0\Leftrightarrow a>1$ 或 $a<0$，

且显然 $A=\{a|a>1\}\subsetneqq B=\{a|a>1$ 或 $a<0\}$.

$\therefore a>1\Rightarrow\frac{1}{a}<1$，但 $\frac{1}{a}<1\nRightarrow a>1$.

答案：A

例3　已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$，$a\in\mathbf{R}$，求方程有两个正根的充要条件.

解：方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$ 有两个实根的充要条件是 $\begin{cases}1-a\neq 0,\\ \Delta\geq 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a\neq 1,\\ (a+2)^2+16(1-a)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1,\\ a\leq 2\text{ 或 }a\geq 10,\end{cases}$

即 $a\geq 10$ 或 $a\leq 2$ 且 $a\neq 1$.

设此时方程的两实根为 x_1,x_2，有两个正根的充要条件是 $\begin{cases}a\neq 1,\\ a\leq 2\text{ 或 }a\geq 10,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1\cdot x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1,\\ a\leq 2\text{ 或 }a\geq 10,\\ \frac{a+2}{a-1}>0,\\ \frac{4}{a-1}>0,\end{cases}$

即 $1<a\leq 2$ 或 $a\geq 10$ 是方程有两个正根的充要条件.

自我测评

A.基础训练

1.条件 p：$|x+1|>2$，条件 q：$(x-2)(x-3)<0$，则 q 是 p 的(　　)

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

2.若 a,b 为实数，则 $a>b>0$ 是 $a^2>b^2$ 的(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

3.一个三角形为直角三角形的必要但不充分条件是(　　)

A.有两个内角相等

B.有两个内角分别等于30°和60°

C.一条边上的中线长等于该边长的一半

D.三个内角的和等于180°

B. 能力培养

4. 有下述说法：①$a>b>0$ 是 $a^2>b^2$ 的充要条件；②$a>b>0$ 是 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 的充要条件；③$a>b>0$ 是 $a^3+b^3>0$ 的充要条件. 其中正确的说法的有(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

5. (2004 年，重庆卷文)已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 那么 p 是 q 成立的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 若 $\neg A$ 是 B 的充分不必要条件，则 A 是 $\neg B$ 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. $x^2+(y-2)^2=0$ 是 $x(y-2)=0$ 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

C. 综合提高

8. $x,y\in\mathbf{R}$，则下列命题中，甲是乙的充分不必要条件的命题是(　　)

A. 甲：$xy=0$，乙：$x^2+y^2=0$

B. 甲：$xy=0$，乙：$|x|+|y|=|x+y|$

C. 甲：$xy=0$，乙：x、y 至少一个为零

D. 甲：$x<y$，乙：$\frac{x}{y}<1$

9. 设命题甲：x 和 y 满足 $\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3,\end{cases}$ 命题乙：x 和 y 满足 $\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3,\end{cases}$ 那么甲是乙的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. (2002 年武汉市重点中学统考题)设 α、β 是方程 $x^2-ax+b=0$ 的两个实根，试分析 $a>2$，且 $b>1$ 是两根 α、β 均大于 1 的什么条件？

第四课时　充分条件与必要条件习题课(二)

典例精讲

例 1　(2003 年北京)“$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$”的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：$\because\ \cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\ 2\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ 或 $2\alpha=2k\pi+\frac{7}{6}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore\ \alpha=k\pi+\frac{5}{12}\pi$ 或 $\alpha=k\pi+\frac{7\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

故“$\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$”是“$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$”的必要不充分条件.

答案：B

评注：本例中涉及了三角函数知识.

例 2　(2002 年河南)函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是(　　)

A. $ab=0$　B. $a+b=0$　C. $a=b$　D. $a^2+b^2=0$

解析：函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，则对任意 x，

$f(-x)=-x|-x+a|+b=-f(x)=-x|x+a|-b$

$\Leftrightarrow|x-a|=|x+a|$ 且 $b=0$

$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=0$.

答案：D

评注：高考中常以充要条件知识为载体，综合考查函数等其他内容.

例 3　(2003 年，上海卷)设 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数，不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N，那么“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”是“$M=N$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

解析：如果 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}>0$，则“$M=N$”，如果 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}<0$，则“$M\neq N$”. $\therefore$ “$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”$\nRightarrow$“$M=N$”.

反之若 $M=N=\varnothing$，即说明二次不等式的解集为空集，与它们的系数比无任何关系，只要求判别式小于零. 因此，“$M=N$”$\nRightarrow$“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”. 因此，是既不充分又不必要条件.

答案：D

评注：本例反映了与几何的结合，比较典型.

自我测评

A. 基础训练

1. “$\lg x>\lg y$”是“$\sqrt{x}>\sqrt{y}$”的(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. (**2004年,重庆卷理**)一元二次方程$ax^2+2x+1=0(a\neq0)$有一个正根和一个负根的充分不必要条件是(　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$

C. $a<-1$　　D. $a>1$

3. 已知直线a、b和平面M,则$a/\!/b$的一个必要不充分条件是(　　)

A. $a/\!/M, b/\!/M$　　B. $a\perp M, b\perp M$

C. $a/\!/M, b\subset M$　　D. a、b与平面M成等角

B. 能力培养

4. (**海淀四月统考题**)若$p,q\in\mathbf{R}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^n$存在的一个充分不必要条件是(　　)

A. $q>p$　　B. $|p|=|q|$

C. $q<p<0$　　D. $0<q<p$

5. 若命题甲:"$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$";命题乙:"$ABCD$是平行四边形",则甲是乙的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. (**1996年上海文**)若$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数,则$y=f(x)$为奇函数的一个充要条件为(　　)

A. $f(x)=0$

B. 对任意$x\in\mathbf{R}$, $f(x)=0$都成立

C. 存在某$x_0\in\mathbf{R}$,使得$f(x_0)+f(-x_0)=0$

D. 对任意的$x\in\mathbf{R}$, $f(x)+f(-x)=0$都成立

C. 综合提高

7. 在$\triangle ABC$中,条件甲:$A<B$;条件乙:$\cos^2A>\cos^2B$,则甲是乙的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. (**2001年,上海卷**)$a=3$是直线$ax+2y+3a=0$和直线$3x+(a-1)y=a-7$平行且不重合的(　　)

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

9. (**2004年,北京卷**)设命题甲"直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,平面ACB_1与对角面BB_1D_1D垂直";命题乙"直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是正方体". 那么甲是乙的(　　)

A. 充要条件

B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件

D. 既非充分又非必要条件

1.3 简单的逻辑联结词

第一课时 “且”“或”“非”的基本概念

要点扫描

1. ________叫做逻辑联结词.

2. ________的命题是简单命题,由________构成的命题是复合命题.

3. 表达形式:且:p ____ q;或:p ____ q;非:____ p.

学习探究

几个简单命题由逻辑联结词联结起来就构成复合语句,我们本节主要研究“且”“或”“非”三种复合命题.

命题一般用小写字母 p、q、r、s、…表示,复合命题就是 p 或 q(记为 $p\vee q$),p 且 q(记为 $p\wedge q$),非 p(记为$\neg p$).

复合命题的准确构成形式.

逻辑联结词的准确含义.

激活思维

例 1 **(2001 年烟台市统考题)**分别写出由下列各组命题构成的“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”形式的复合命题:

(1)p:$\sqrt{2}$是无理数,q:$\sqrt{2}$大于 1;

(2)p:$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$,$q$:$\{0\}\in\mathbf{N}$;

(3)p:$x^2+1>x-4$,q:$x^2+1<x-4$.

解:(1)p 或 q:$\sqrt{2}$是无理数或大于 1;

p 且 q:$\sqrt{2}$是无理数且大于 1;

非 p:$\sqrt{2}$不是无理数.

(2)p 或 q:$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$ 或 $\{0\}\in\mathbf{N}$;

p 且 q:$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$ 且 $\{0\}\in\mathbf{N}$;

非 p:$\mathbf{N}\nsubseteq\mathbf{Z}$.

(3)p 或 q:$x^2+1\neq x-4$;

p 且 q:$x^2+1>x-4$,且 $x^2+1<x-4$;

非 p:$x^2+1\leqslant x-4$.

评注:在由简单命题写出复合命题时,可直接使用逻辑联结词,如本例的(1)、(2),也可以不使用逻辑联结词,如例(3)中的“p 或 q”、“非 p”,写复合命题时,关键要搞清“且”“或”“非”的意义.

例 2 分别指出下列复合命题的形式及构成的简单命题.

(1)小李是老师,小赵也是老师;

(2)1 是合数或质数;

(3)他是运动员兼教练员;

(4)这些文学作品不仅艺术上有缺点,而且政治上有错误.

解:(1)这个命题是 p 且 q 的形式,其中 p:小李是老师,q:小赵是老师.

(2)这个命题是 p 或 q 的形式,其中 p:1 是合数,q:1 是质数.

(3)这个命题是 p 且 q 的形式,其中 p:他是运动员,q:他是教练员.

(4)这个命题是 p 且 q 的形式,其中 p:这些文学作品艺术上有缺点,q:这些文学作品政治上有错误.

评注:正确理解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义是解题的关键,应根据组成上述各复合命题的语句中所出现的逻辑联结词或语句的意义确定复合命题的形式.

例 3 分别写出由下列各组命题构成的“p 或 q”、“p 且 q”的形式的命题:

(1)p:张钟是运动员,q:张钟是歌手.

(2)p:$2>3$,q:$8+7\neq 15$.

(3)p:$A\cap B=A$,q:$A\cup B=B$.

解:(1)张钟是运动员或是歌手;张钟是运动员且是歌手.

(2)$2>3$ 或 $8+7\neq 15$;$2>3$ 且 $8+7\neq 15$.

(3)$A\cap B=A$ 或 $A\cup B=B$;$A\cap B=A$ 且 $A\cup B=B$.

自我测评

A. 基础训练

1. 用反证法证明命题“如果 $a>b$,那么$\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$”时,假设的内容应是( )

A. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$ B. $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

C. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$,且$\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$ D. $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$,或$\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$

2. 如果原命题的结论是“p 且 q”形式,那么否命题的结论形式是( )

A. $\neg p$ 且$\neg q$ B. $\neg p$ 或$\neg q$

C. $\neg p$ 或 q D. $\neg q$ 或 p

3. 如果原命题的结论形式是“p 或 q”的形式,那么否命题的结论形式是( )

A. $\neg p$ 或$\neg q$ B. $\neg p$ 或 q

C. $\neg q$ 或 p D. $\neg p$ 且$\neg q$

B. 能力培养

4. $|x|+|y|\neq 0$ 等价于( )

A. $x=0$ 且 $y=0$ B. $x=0$ 或 $y=0$

C. $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ D. $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$

5. 命题“存在实数 x,$|x+1|\leqslant 0$,且 $x^2<4$”是( )

A. “p 或 q”的形式 B. “非 p”的形式

C. 真命题 D. 假命题

6. 由命题 p:6 是 12 的约数,q:6 是 24 的约数,构成的“p 或 q”形式的命题是________,“p 且 q”形式的命题是________,“非 p”形式的命题是________.

C. 综合提高

7. 若把命题“$A\subseteq B$”看成一个复合命题,那么复合命题的

形式是________，其中构成它的两个简单命题是________、________.

8. 已知 $p:a\in A$，$q:a\in B$，写出由 p、q 构成的"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"形式的复合命题.

课后小结

1. 不含逻辑联结词"且""或""非"的命题是简单命题，由简单命题与逻辑联结词构成的命题是复合命题，因此就有"$p\vee q$""$p\wedge q$""$\neg p$"形式的复合命题，其中 p、q 为简单命题.

2. $p\vee q$ 可以理解为命题 p 和命题 q 至少取一个；
$p\wedge q$ 理解为 p 和 q 两个命题都要满足；
$\neg p$ 理解为不满足命题 p.

3. 在逻辑中的"且""或""非"与日常用语中的"且""或""非"意义不全相同.

第二课时 逻辑联结词构成命题的真假判定

要点扫描

填写下表：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg p\vee\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$
真	真								
真	假								
假	真								
假	假								

学习探究

1. 复合命题的真假，主要利用真值表来判断，其步骤为：
(1)确定复合命题的构成形式；
(2)判断其中各简单命题的真假；
(3)利用真值表判断复合命题的真假.

2. 在数理逻辑的书中，通常把如何判定 $p\wedge q$ 真假的几种情况总结成下表：

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

同样，把如何判定 $p\vee q$ 的真假的几种情况总结为下表：

p	q	$p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

一般地，把如何由 p 的真假判定 $\neg p$ 的真假列表如下：

p	$\neg p$
真	假
假	真

激活思维

例1 (2001南昌市模拟题改编)指出下列命题的真假：

(1)不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 没有实数解；

(2)-1 是偶数或奇数；

(3)$\sqrt{2}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$，也属于集合 $\mathbf{R}$；

(4)$A\not\subseteq(A\cup B)$.

分析：先将复合命题写成简单命题，然后由真值表判断.

解：(1)此命题为"非 p"的形式，其中 p：不等式 $|x+2|\leqslant 0$ 有实数解. 因为 $x=-2$ 是该不等式的一个解，所以 p 是真命题，即非 p 为假命题，所以原命题为假命题.

(2)此命题为"p 或 q"的形式，其中 p：-1 是偶数，q：-1 是奇数，因为 p 为假命题，q 为真命题，所以"p 或 q"为真命题，故原命题为真命题.

(3)此命题为"p 且 q"的形式，其中 p：$\sqrt{2}$ 属于 $\mathbf{Q}$，q：$\sqrt{2}$ 属于 $\mathbf{R}$，因为 p 为假命题，q 为真命题，所以 p 且 q 为假命题，故原命题为假命题.

(4)此命题为"非 p"的形式，其中 p：$A\subseteq(A\cup B)$. 因为 p 为真命题，所以"非 p"为假命题，故原命题为假命题.

评注：为了正确判断复合命题的真假，首先要确定复合命题的构成形式，然后指出其中简单命题的真假，再根据真值表判断这个复合命题的真假.

例2 设 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求 m 的取值范围.

分析：应先求出方程的根所满足的条件从而得到出命题 p 和命题 q，再依据其复合命题的真假去求实数 m 的取值范围.

解：若方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根，

则 $\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\-m<0,\end{cases}$ $\therefore m>2$，即 p：$m>2$.

若方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根.

则 $\Delta=16(m-2)^2-16<0$，即 $1<m<3$，

$\therefore q$：$1<m<3$.

$\because p$ 或 q 为真，则 p，q 至少一个为真，又 p 且 q 为假，则 p、q 至少一个为假.

$\therefore p$、q 一真一假，p 真 q 假，或 p 假 q 真.

$\therefore \begin{cases}m>2,\\m\leqslant 1,\text{或}\ m\geqslant 3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\leqslant 2,\\1<m<3.\end{cases}$

$\therefore m\geqslant 3$，或 $1<m\leqslant 2$.

评注：由简单命题和逻辑联结词构成的复合命题的真假可以用真值表来判断，反之根据复合命题的真假也可以判断简单命题的真假. 假若 p 且 q 真，则 p 真，q 也真，若 p 或 q 真，则 p、q 至少有一个真，若 p 且 q 假，则 p、q 至少有一个假.