

21 世纪成人高等教育规划教材

高等数学

● 汪光先 丰世富 张铭军 主编

GAODENG
SHUXUE

◆ 苏州大学出版社

21 世纪成人高等教育规划教材

高等数学

主 编 汪光先 丰世富 张铭军

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/汪光先,丰世富,张铭军主编. —苏州:苏州大学出版社,2007.9

21世纪成人高等教育规划教材

ISBN 978-7-81090-956-3

I. 高… II. ①汪…②丰…③张… III. 高等数学—成人教育:高等教育—教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第140523号

高等数学

汪光先 丰世富 张铭军 主编

责任编辑 李娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)

丹阳市兴华印刷厂印装

(地址:丹阳市胡桥镇 邮编:212313)

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.5 字数 337 千

2007年9月第1版 2007年9月第1次印刷

ISBN 978-7-81090-956-3 定价:22.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《高等数学》编委会

主 编 汪光先 丰世富 张铭军

编 委 (排名不分先后)

汪光先 丰世富 张铭军 葛 英

苏国荣 杨松林 戴中寅 武震东

潘洪伟 严仲兴 唐 威 顾桃桃

陈 英

前

言

本书是为适应新形势下成人高等教育高等数学教学的需要而编写的,这本教材精选了高等数学三大主干课程——微积分、线性代数和概率论与数理统计的主要内容.我们针对成教学生的特点,本着“以应用为目的,以必需和够用为尺度”的原则,对概念与理论、方法与技巧、实践与应用三个方面的内容努力作出较为合理的安排,力求使学生的逻辑思维能力和数学应用能力都能得到发展,提高学生的综合素质.同时,本书编写过程中我们力求做到文字的表述条理清晰,定理、定义的叙述简洁严密.在引入新概念时,我们尽量使用通俗的语言,希望能够体现我们把本书写成一本“易教易学的高等数学教材”这一初衷.

本书共分十二章.前七章介绍微积分的基本内容,包括一元函数微积分、多元函数微积分和微分方程.第八至十章以线性方程组为主题介绍线性代数的主要内容,最后两章介绍概率论与数理统计的基本内容.每节后面附有习题供学生课后练习用.

本书也可作为高职高专院校高等数学文化基础课教材.

本书的编写得到了苏州工业园区职业技术学院的大力支持和苏州农业职业技术学院的热心帮助.苏州大学数学科学学院的许多老师对本书提出了非常好的建议,编者在此一并致谢!同时,也希望得到专家、同行以及广大读者的批评指正.

编 者

2007年8月

目录

Contents

第一章 极限与连续

§ 1.1 函数	(1)
§ 1.2 极限的概念	(8)
§ 1.3 无穷小量与无穷大量	(11)
§ 1.4 极限的性质与运算法则	(14)
§ 1.5 两个重要极限	(16)
§ 1.6 函数的连续性	(19)

第二章 导数与微分

§ 2.1 导数的概念	(24)
§ 2.2 函数求导法则与基本导数公式	(28)
§ 2.3 高阶导数	(33)
§ 2.4 函数的微分	(35)

第三章 导数的应用

§ 3.1 中值定理	(39)
§ 3.2 罗必塔法则	(41)
§ 3.3 函数的单调性	(44)
§ 3.4 函数的极值	(46)
§ 3.5 利用导数研究函数	(50)

第四章 不定积分

§ 4.1 不定积分的概念及其运算法则	(54)
§ 4.2 换元积分法	(58)
§ 4.3 分部积分法	(63)

第五章 定积分

§ 5.1 定积分的概念	(66)
§ 5.2 微积分学基本公式	(71)
§ 5.3 定积分的计算	(74)
§ 5.4 广义积分	(77)
§ 5.5 定积分的应用	(78)

第六章 多元函数微积分

§ 6.1 二元函数的极限与连续	(82)
§ 6.2 偏导数和全微分	(86)



§ 6.3 复合函数与隐函数的微分法	(89)
§ 6.4 二元函数的极值	(93)
§ 6.5 二重积分	(96)
第七章 微分方程	
§ 7.1 微分方程的基本概念	(102)
§ 7.2 一阶微分方程	(104)
§ 7.3 几种简单的二阶微分方程	(107)
§ 7.4 二阶常系数线性微分方程	(109)
第八章 行列式	
§ 8.1 行列式的定义	(114)
§ 8.2 行列式的性质	(120)
§ 8.3 行列式的计算	(123)
§ 8.4 克莱姆法则	(125)
第九章 矩阵	
§ 9.1 矩阵的概念及其运算	(129)
§ 9.2 逆矩阵	(140)
§ 9.3 矩阵的秩	(146)
第十章 线性方程组	
§ 10.1 线性方程组的消元法	(149)
§ 10.2 线性方程组解的判定	(154)
§ 10.3 n 维向量及其相关性	(157)
§ 10.4 向量组的秩	(165)
§ 10.5 线性方程组解的结构	(168)
第十一章 概率论基础	
§ 11.1 随机事件及其概率	(174)
§ 11.2 随机变量及其分布	(182)
§ 11.3 随机变量的数字特征	(188)
第十二章 数理统计方法	
§ 12.1 总体、样本与样本的数字特征	(192)
§ 12.2 统计量及其分布	(194)
§ 12.3 点估计	(197)
§ 12.4 区间估计	(203)
附表 1 标准正态分布表	(207)
附表 2 χ^2 分布表	(208)
附表 3 t 分布表	(210)

第一章



极限与连续

极限理论是微积分的基础理论,也是微积分的重要工具,高等数学中多数概念都是建立在极限概念基础之上的.本章介绍极限理论及函数的连续性.



§ 1.1 函 数



一、集合

1. 集合的概念

我们把具有某种特定性质的事物的总体,称为集合,构成这个集合的对象叫做集合的元素.例如,一间教室里的学生构成一个集合,全体自然数构成一个集合等等.

通常用大写英文字母 A, B, C 等表示集合,用小写英文字母 a, b, c 等表示集合的元素.表示集合的方法通常有下列两种:一种是例举法,就是把集合的元素都例举出来表示.例如,由前 5 个英文小写字母组成的集合 A ,可表示成 $A = \{a, b, c, d, e\}$;另一种是描述法,若集合 N 是由具有某种性质 p 的元素 x 的全体所组成,则集合 N 可表示成 $N = \{x | x^2 \text{ 具有性质 } p\}$.

例如,集合 B 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集,就可表示成 $B = \{x | x^2 - 1 = 0\}$.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.习惯上全体非负整数的集合记作 N ,全体整数的集合记作 Z ,全体有理数的集合记作 Q ,全体实数的集合记作 R .

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ (读作 A 包含于 B),例如 $Q \subseteq R$.

如果 $A \subseteq B, B \subseteq A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

不含有任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$,且规定空集 $\emptyset$ 是任何集合 A 的子集,即 $\emptyset \subseteq A$.

例 1 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 表示 xOy 平面上包括圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及圆内一切点的集合.

2. 区间和邻域

设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$. 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间,记作 (a, b) ,即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$. a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点,这里 $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$. 数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记作 $[a, b]$,即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$. 这里 a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, $a \in [a, b], b \in [a, b]$.

类似地, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}$, $[a, b)$ 与 $(a, b]$ 称为半开区间.

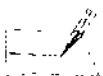


以上区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 此外引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大) 可类似地表示无限区间, 例如

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

实数集 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

邻域也是集合的一种表现形式. 以点 a 为中心的任何开区间, 称为点 a 的邻域, 记作 $U(a)$. 设 δ 为一正数, 则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x | a-\delta < x < a+\delta\}$, 其中 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径.



二、函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中, 人们经常会遇到各种各样的量. 例如, 温度、浓度、产量、成本、面积等. 宇宙间一切事物都在不断地变化, 变化是绝对的, 不变是相对的. 在观察事物的过程中, 变化着的量我们称为变量, 相对不变的量我们称为常量. 例如, 一段时间内银行的资金运作过程中, 借贷资金的数额不断变化, 是变量, 而利率不变是常量.

一个量是变量还是常量, 不是固定不变的. 在一定的条件下, 常量和变量可以互相转化.

2. 函数的定义

定义 1 设 D 是某一非空实数集, 如果对于变量 x 在 D 中的每一个取值, 变量 y 按照一定的法则, 总有唯一确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$.

其中 x 称为自变量, y 称为因变量或函数, 函数符号 f 表示 x 与 y 的对应法则, 集合 D 称为函数的定义域, 所有相应于 x 的 y 值所组成的集合称为函数的值域.

例 2 某种机器的销售单价为每台 5 万元, 销售总收入 R (万元) 与销售量 x 台的关系是

$$R=5x,$$

x 在正整数内任取一个具体数值, 根据上面的依赖关系, 就得到一个确定的 R 值与之对应.

注 函数的概念中涉及五个因素: (1) 自变量; (2) 定义域; (3) 因变量; (4) 对应法则; (5) 值域. 在这五个因素中最重要的是定义域和因变量关于自变量的对应法则, 这两者常称为函数的二要素. 只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数.

例 3 设 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, 求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$, $f(x+1)$.

$$\text{解 } f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad f(x+1) = \frac{1}{x+1} \sin \frac{1}{x+1}.$$

例 4 设 $f(x+1) = x^2 - 3x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 于是

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) = t^2 - 5t + 4,$$

所以

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

例 5 求函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 $\sqrt{x^2 - x - 6}$ 的定义域为 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -2$. 而 $\arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义

域是 $|\frac{2x-1}{7}| \leq 1$, 解得 $-3 \leq x \leq 4$.

所求函数的定义域是这两个函数的定义域的公共部分, 即

$$\{x | -3 \leq x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}.$$

例 6 判断下列各组中的两个函数是否为同一函数:

(1) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$; (2) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = 1$;

(3) $y = f(x), u = f(t)$.

解 (1) 不是. 因为对应法则不同, 事实上 $g(x) = |x|$.

(2) 是. 因为定义域与对应法则都相同.

(3) 是. 因为对应法则相同, 函数的定义域也相同.

由此可知一个函数由定义域与对应法则完全确定, 而与用什么字母表示无关.

3. 函数的表示法

表示函数的方法有许多, 最常见的有: 表格法、图象法及公式法(又称解析法).

表格法: 把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表来表示它们的对应关系.

图象法: 用一条平而曲线表示自变量与函数的对应关系, 它是函数关系的几何表示.

解析法: 用数学式子表示自变量与函数的对应关系.

邮电局规定邮包重量不超过 50 克支付邮资 0.8 元, 超过部分按 0.4 元/克支付邮资, 邮包重量不得超过 5000 克, 则邮资与邮包重量的关系可由解析式表示为:

$$y = \begin{cases} 0.8, & 0 < x \leq 50, \\ 0.8 + 0.4(x - 50), & 50 < x \leq 5000. \end{cases}$$

该函数的定义域为 $(0, 5000]$, 但它在定义域内不同的区间上是用不同的解析式来表示的, 这样的函数称为分段函数.

例 7 作出分段函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 的图象, 并求

函数的定义域及 $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{3}{2})$.

解 先作出分段函数的图象(图 1-1). 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 2]$.

因为 $\frac{1}{2} \in (0, 1]$, $\frac{3}{2} \in (1, 2]$, 所以

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

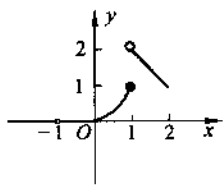


图 1-1



三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义, 如果存在正数 M , 对于一切 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 否则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界的几何意义是: 曲线 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内被限制



在 $y = -M$ 和 $y = M$ 两条直线之间.

注意 (1) 一个函数在某区间内有界, 正数 M 的取法不是唯一的.

例如, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, $|\sin x| \leq 1 = M$, 我们还可以取 $M = 2$.

(2) 有界性跟区间有关.

例如 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内有界, 但在区间 $(0, 1)$ 内无界.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 在关于原点对称的集合 D 上有定义, 如果对任意的 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $y = \cos x$, $y = x^2$ 是偶函数; $y = \sin x$, $y = x^3$ 是奇函数; $y = \sin x + \cos x$ 是非奇非偶函数.

在几何上, 对于偶函数, 由于在 x 和 $-x$ 处函数值相等, 故其图象关于 y 轴对称; 对于奇函数, 由于在 x 和 $-x$ 处函数值仅差一个符号, 故其图象关于原点对称.

例 8 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x + \sin x$;

(2) $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \quad (-1 \leq x \leq 1)$;

(3) $f(x) = 2x^2 + \sin x$.

解 (1) 函数 $f(x) = x + \sin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 且有

$$f(-x) = -x + \sin(-x) = -(x + \sin x) = -f(x),$$

所以函数 $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 且

$$f(-x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = f(x),$$

所以 $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 在 $[-1, 1]$ 上是偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = 2(-x)^2 + \sin(-x) = 2x^2 - \sin x \neq f(x)$, 且 $f(-x) \neq -f(x)$, 所以 $f(x) = 2x^2 + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是非奇非偶函数.

3. 函数的单调性

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增; 若有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调递减.

单调递增(图 1-2)或单调递减(图 1-3)的函数, 统称为单调函数. 相应的区间称为函数的单调区间.

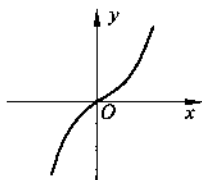


图 1-2

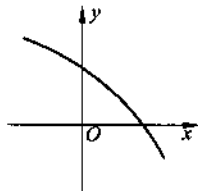


图 1-3

例 9 证明函数 $f(x) = 5x - 2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调递增的.

证明 取任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 因为

$$f(x_1) - f(x_2) = (5x_1 - 2) - (5x_2 - 2) = 5(x_1 - x_2) < 0,$$

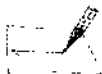
即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x) = 5x - 2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调递增的.

4. 函数的周期性

定义 5 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A , 如果存在常数 $a (a \neq 0)$, 使得对于任何 $x \in A$, 有 $x + a \in A$, 且 $f(x) = f(x + a)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数. 常数 a 称为函数 $f(x)$ 的周期.

如果在所有的正周期中存在一个最小的数, 称它为 $f(x)$ 的最小正周期. 我们在讨论函数的周期性时, 所说的周期一般是指它的最小正周期.

例如, $y = \sin x$ 是周期函数, 最小正周期为 2π ; $y = \tan x$ 的最小正周期为 π .



四、反函数

设某种商品的单价为 p , 销售量为 x , 则收入 y 是 x 的函数 $y = px$, 这时 x 是自变量, y 是 x 的函数. 若已知收入 y , 反过来求销售量 x , 则有 $x = \frac{y}{p}$, 这时 y 是自变量, x 是 y 的函数.

定义 6 设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 值域为 R . 如果对于任意的 $y \in R$, 通过关系式 $y = f(x)$, 都有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应, 则称这样确定的函数 $x = g(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.

事实上, $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为反函数.

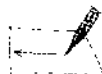
习惯上用 x 表示自变量, 而用 y 表示函数, 因此, 往往把反函数 $x = g(y)$ 改写成 $y = g(x)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $y = f^{-1}(x)$.

例 10 求函数 $y = 2x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 2x + 1$ 得 $x = \frac{y-1}{2}$, 交换 x 和 y , 得 $y = \frac{x-1}{2}$, 即为 $y = 2x + 1$ 的反函数.

注 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

一个函数存在反函数, 它的定义域和值域之间必定是一一对应的. 单调函数一定存在反函数.



五、基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

1. 常数函数 $y = C$

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 无论 x 取何值, 都有 $y = C$ 所以它的图象是与 x 轴平行或重合的直线.

2. 幂函数 $y = x^a$ (a 为实数)

当 a 取不同值时, 幂函数的定义域不同, 需分 $a > 0$ 和 $a < 0$ 两种情况讨论. 这里只讨论 $x \geq 0$ 的情形, $x < 0$ 时的图象可根据函数的奇偶性来确定.

当 $a > 0$ 时, 函数的图象通过原点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 点, 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增且无界;



当 $a < 0$ 时, 函数的图象不过原点, 但仍通过 $(1, 1)$ 点, 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减且无界, 曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

3. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(0, +\infty)$, 它的图象在 x 轴上方, 且通过 $(0, 1)$ 点.

当 $a > 1$ 时, 函数单调递增且无界, x 轴的负半轴是曲线的渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调递减且无界, x 轴的正半轴是它的渐近线.

4. 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

定义域是 $(0, +\infty)$, 图象全部在 y 轴右方, 值域是 $(-\infty, +\infty)$, 曲线通过 $(1, 0)$ 点.

当 $a > 1$ 时, 函数单调递增且无界, y 轴的负半轴是它的渐近线;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调递减且无界, y 轴的正半轴是它的渐近线.

5. 三角函数

三角函数包括: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 以 2π 为周期, 是有界函数, $y = \sin x$ 为奇函数, $y = \cos x$ 为偶函数.

$y = \tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)\right\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数, 以 π 为周期, 在每个周期内单调递增, 以直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为渐近线.

$y = \cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 是奇函数, 以 π 为周期, 在每个周期内单调递减, 以直线 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为渐近线.

6. 反三角函数

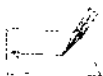
反三角函数主要包括: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 为单调递增的奇函数.

反余弦函数 $y = \arccos x$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 值域是 $[0, \pi]$, 为单调递减的函数.

反正切函数 $y = \arctan x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 为单调递增的奇函数, 且有界.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 值域 $(0, \pi)$, 为单调递减的有界函数.



六、复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义 7 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 R_φ , 若 R_φ 与 D_f 的交集不等于空集, 则 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 可以复合成函数 $y = f[\varphi(x)]$, 称 y 为 x 的复合函数. 其中 x 是自变量, u 是中间变量.

注意 (1) 只有当 $R_\varphi \cap D_f \neq \emptyset$ 时, 两个函数才可以构成一个复合函数. 例如, $y = \ln u$ 与 $u = -\sqrt{x^2 + 1}$ 就不能构成复合函数, 因为 $u = -\sqrt{x^2 + 1}$ 的值域与 $y = \ln u$ 的定义域的交集为空集.

(2) 复合函数还可以由两个以上的函数复合而成,即中间变量可以有多个.

例 11 分析下列复合函数的构成:

$$(1) y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}; \quad (2) y = e^{\sin \sqrt{x^2+1}}.$$

解 (1) $y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$;

(2) $y = e^u, u = \sin v, v = \sqrt{t}, t = x^2 + 1$.

例 12 设 $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = [g(x)]^2 = (2^x)^2 = 4^x, g[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合所构成,并且可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如, $y = \sqrt[3]{x^2+1}, y = (1 + \sin x)^2, y = \arccos \sqrt{1-x}$ 等都是初等函数. 分段函数一般不是初等函数,但有些分段函数是初等函数. 例如 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \sqrt{x^2}$.



习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

$$\begin{aligned} (1) y &= \sqrt{3x+2}; & (2) y &= \frac{1}{1-x}; \\ (3) y &= \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}; & (4) y &= \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}; \\ (5) y &= \sin \sqrt{x}; & (6) y &= \tan(x+1). \end{aligned}$$

2. 下列各题中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数? 为什么?

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= |x|, g(x) = \sqrt{x^2}; \\ (2) f(x) &= x, g(x) = \sin(\arcsin x); \\ (3) f(x) &= \lg x^2, g(x) = 2 \lg x; \\ (4) f(x) &= \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}. \end{aligned}$$

3. 设 $y = f(x), x \in [0, 4]$, 求 $f(x^2)$ 和 $f(x+5) + f(x-5)$ 的定义域.

4. 判断下列函数的奇偶性:

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= x \sin x; & (2) f(x) &= \sin x - \cos x; \\ (3) f(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}); & (4) f(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \end{aligned}$$

5. 判断下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1); \quad (2) y = x + \ln x, (0, +\infty).$$

6. 偶函数和奇函数的图象具有怎样的对称性?

7. 下列函数是由哪些初等函数复合而成的?

(1) $y=3^{\tan^2 x}$;

(2) $y=3\sqrt{(1+2x)^2}$.

8. 求 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数.

9. 若 $h(x)=x^3+1$, $g(x)=\sqrt{x}$, 求 $g[h(x)]$, $h[g(x)]$, $h[h(x)]$.

10. (抵押贷款模型) 设二室一厅商品房价值 100000 元, 王某自筹了 40000 元, 要购房还需要借贷 60000 元, 借款月利率为 1%, 条件是每年还一部分, 25 年还清, 假如还不起, 房子就归债权人, 王某具有什么能力才能借贷呢?

11. 设水以常速(以单位时间的体积计)注入如图 1-4 所示的容器内, 作出水的高度关于时间 t 的函数 $y=f(t)$ 的图象.

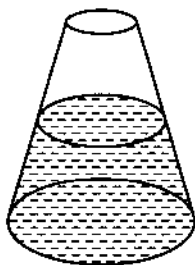
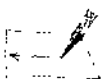


图 1-4



§ 1.2 极限的概念



一、数列的极限

1. 数列的概念

定义 1 自变量为正整数的函数 $y_n=f(n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 其函数值按自变量 n 由小到大排列成一系列数

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots,$$

称为数列, 简记为 $\{y_n\}$. 其中 y_n 为数列 $\{y_n\}$ 的通项或一般项. 由于一个数列 $\{y_n\}$ 完全由其一般项 y_n 所确定, 故也把数列 $\{y_n\}$ 简称为数列 y_n . 例如,

(1) $y_n = \frac{1}{2^n}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots;$

(2) $y_n = 1 + \frac{1}{n}: 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots;$

(3) $y_n = (-1)^{n-1}: 1, -1, 1, -1, \dots;$

(4) $y_n = 2n: 2, 4, 6, 8, \dots.$

2. 数列的极限

当 n 无限增大时, 数列(1)的一般项 $y_n = \frac{1}{2^n}$ 无限趋近于 0; 数列(2)的一般项 $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ 无限趋近于 1; 数列(3)的一般项 $y_n = (-1)^{n-1}$ 不是 1, 就是 -1, 不趋近于任何确定的常数; 数列(4)的一般项 $y_n = 2n$ 无限增大, 也不趋近于任何确定的常数.

通过观察可以看出, 数列的一般项 y_n 的变化趋势或者无限趋近于某个确定的常数, 或者不趋近于任何确定的常数.

定义 2 对于数列 $\{y_n\}$, 如果当 n 无限增大时, y_n 趋近于一个常数 A , 则称当 n 趋近于无穷大时, 数列 $\{y_n\}$ 以 A 为极限, 也称数列 $\{y_n\}$ 收敛于 A , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

如果数列 $\{y_n\}$ 没有极限, 就称数列 $\{y_n\}$ 发散.

数列(1)的一般项 $y_n = \frac{1}{2^n}$ 当 n 无限增大时无限趋近于 0, 0 是数列(1)的极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =$

0, 也称数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 收敛于 0; 数列(2)的一般项 $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ 当 n 无限变大时无限接近于 1, 1 是数列(2)的极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$, 也称数列 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 收敛于 1; 数列(3)、数列(4)为发散数列.

例 1 求下列数列的极限:

$$(1) \{x_n\} = \{c\} (c \text{ 为常数});$$

$$(2) \{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\};$$

$$(3) \{x_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}.$$

解 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \text{ 不存在.}$$



二、函数的极限

数列的极限只是一种特殊的函数(定义域为正整数集合)的极限. 下面讨论定义于实数集合上的函数 $y = f(x)$ 的极限.

1. $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限

例如, 函数 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 当 $|x|$ 无限增大时, y 无限地趋近于 1, 和数列极限一样, 称 $|x|$ 趋近于无穷大时, $y = 1 + \frac{1}{x}$ 以 1 为极限(图 1-5).

定义 3 如果当 $|x|$ 无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A , 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

如果从某一时刻起, x 只能取正值或负值趋近于无穷, 则有下面的定义.

定义 4 如果当 $x > 0$ 且无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A , 则称当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty).$$

定义 5 如果当 $x < 0$ 且 $|x|$ 无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A , 则称当 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty).$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x^2}$ 无限趋于 0, 函数值无限趋近于 1; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数值同样无限趋近于 1. 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

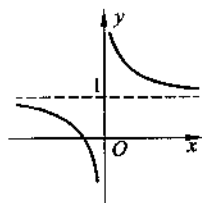


图 1-5



例3 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$.

解 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $2^x \rightarrow 0$, 即

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0.$$

2. $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x) = 2x + 1$ 当 x 分别从左边和右边趋于 $\frac{1}{2}$ 时的变化趋势.

x	0	0.1	0.3	0.4	0.49	...	0.5	...	0.51	0.6	0.9	1
$f(x)$	1	1.2	1.6	1.8	1.98	...	2	...	2.02	2.2	2.8	3

由上表不难看出, 当 x 无限接近于 $\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 无限趋近于常数 2. 我们称 $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 2.

定义6 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域(点 x_0 可以除外)内有定义, 如果当 x 趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

根据上面定义, 我们可得结论: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ 及 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

3. 左极限、右极限

定义7 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 右(左)侧的某个邻域(点 x_0 可以除外)内有定义, 如果当 x 从 $x > x_0$ ($x < x_0$) 方向趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 的右(左)极限为 A . 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+ (x \rightarrow x_0^-)).$$

由定义6及定义7可得到如下定理:

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

例4 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$. 由定理知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

例5 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的极限是否存在?

解 因为当 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, 左、右极限存在但不相等, 根据定理知 $f(x)$ 在 0 处的极限不存在.

例6 判断 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 是否存在.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

又因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

左极限存在, 而右极限不存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.