SHIYIWU

普通高等学校经济管理类基础课程“十一五”重点图书规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

◎丛书主编　李梦如
◎本册主编　邓俊强

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

郑州大学出版社

SHIYIWU

普通高等学校经济管理类基础课程“十一五”重点图书规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

丛书主编　李梦如
本册主编　邓俊强

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/邓俊强主编．—郑州:郑州大学出版社，2007.6

普通高等学校经济管理类基础课程“十一五”重点图书规划教材

ISBN 978－7－81106－394－3

Ⅰ.线…　Ⅱ.邓…　Ⅲ.线性代数－高等学校－教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 035120 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

出版人:邓世平　　发行部电话:0371－66966070

全国新华书店经销

黄委会设计院印刷厂印制

开本:710 mm×1 010 mm　1/16

印张:15.5

字数:295 千字

版次:2007 年 6 月第 1 版　　印次:2007 年 6 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978－7－81106－394－3　　定价:22.00 元

编写委员会

《线性代数》

作者名单

主　编　邓俊强

副主编　叶晓枫　仝允战　康会光

编　委　邓俊强　叶晓枫　仝允战

李俊强　康会光

内容提要

本书是根据经济、管理类专业本科线性代数课程的基本教学要求编写的教材，内容包括矩阵、行列式、线性方程组、特征值和特征向量、二次型、向量空间简介等. 每章配有适量的习题. 章后附录列有部分结论的补充证明.

本书层次清楚、逻辑严谨，内容由浅入深、循序渐进. 可作为高等学校经济、管理类专业的教材或教学参考书.

序 言

鉴于当前高等教育形势，教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会于2004年至2005年陆续公布了工科类、经济管理类、医科类的数学基础课程教学基本要求.为了落实“基本要求”，适应我国高等教育发展的需要，有必要对过去的教材进行修订.郑州大学出版社组织了包括郑州大学、华北水利水电学院、中原工学院、郑州轻工业学院、郑州航空工业管理学院、平顶山学院、洛阳师范学院、安阳师范学院等院校的长期在教学一线工作的资深教师，依据“基本要求”编写了一套经济管理类专业的数学基础课程教材，其中有《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》.该套教材的基本特点是忠实于“基本要求”.教材在强调数学基本知识的基础上，适当结合它们在经济、管理上的应用，并力争以数学知识为载体来提高学生的数学素养.教学指导委员会发布的“基本要求”与国家考试中心发布的《研究生入学考试大纲》有一定的差别，为了满足学有余力或有志于报考研究生的同学的需要，这套教材将习题分为(A)、(B)两类.(A)类题目是为实现“基本要求”而设置，(B)类题目是为进一步提高学习水平而设置，它有助于学生参加研究生入学考试.

我国地域辽阔，学校众多，能写出适合自己学校的有特色的教材是值得提倡的.希望这套教材能在实践中逐步改进，成为河南高等教育的一套精品教材.

郑州大学　李梦如

2007年3月18日

前 言

线性代数是研究线性空间和其上的线性变换以及与之相关的问题的数学学科，它的内容和方法有较强的逻辑性、抽象性，在现代科学的许多领域都有应用. 近年来，现代经济、科学技术飞速发展，对高等学校经济、管理类专业线性代数课程的教学提出了更高的要求. 为适应这种新的要求，我们根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会提出的"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"，并结合我们多年的教学实践，编写了这本教材.

本书介绍了线性代数的基本内容，包括矩阵、行列式、线性方程组、特征值和特征向量、二次型、向量空间简介，目的主要是帮助学生掌握后续课程和进一步扩大数学知识面，以及实际应用所需要的线性代数的基本概念和基本技能.

作为经济、管理类及相关专业本科的线性代数教材，本书在编写中进行了如下考虑：

1. 按照由浅入深和从具体到抽象的原则，本书首先从学生较为熟悉的问题——线性方程组入手，用它来引入矩阵这一重要的数学工具，然后逐步深入展开讨论进入抽象性较强的内容.

2. 引入新的概念时，力图自然，注意讲清问题，讲清背景，使学生知道问题从何而来，向何处去. 叙述力求简明易懂，推理详尽，以便于学生阅读.

3. 为方便学生了解、掌握线性代数的理论和方法，书中的定理、推论等除可明显容易得到者外，一般都予以证明，但考虑到经济、管理类专业数学教学的目标和特点，我们把那些较繁、难或只要求学生了解其结论的推导证

明放在了章后的附录中，以便学有余力者参考，也使教师可根据需要取舍.

4. 书中每一节后配备适量的习题，是为理解掌握本节知识点的基本的题目；每一章后配备了适量的复习题，分(A)、(B)两部分，综合性稍强(其中包含一些由于篇幅所限不宜在正文中讲述的一般结论，有一些是往年的考研试题)，(A)题是面对全体同学的，(B)题是对部分同学的，不作教学基本要求. 本书最后列有部分习题的答案或提示，供参考.

5. 投入产出分析是线性代数在经济学中的一个重要应用，为使学生了解这部分内容，在第5章中单列一节介绍了投入产出数学模型，供阅读.

6. 由于学时较少，关于线性空间和线性变换的理论，本书只针对 n 维向量空间，对基、维数、坐标、子空间等概念作了介绍；只对矩阵的特征值、特征向量、矩阵的相似标准形及实对称矩阵的对角化等作了讨论. 这些已经达到教学基本要求，同时也满足了硕士研究生入学考试的要求.

7. 书中部分内容标注了“*”，供选学、阅读.

本书由邓俊强担任主编，规划、统稿，叶晓枫、仝允战、康会光任副主编，李俊强参加了编写工作.

首届全国高等学校教学名师奖获得者郑州大学李梦如教授、郑州大学数学系罗来兴副主任对本书的编写给予了热情推动与指导，在此表示衷心感谢. 感谢熊胜利教授仔细地审阅全书，指出疏漏和需改进之处，提出具体的建议，为本书增色许多. 感谢郑州大学出版社编辑同志，本书的出版得益于他们的辛勤工作.

由于编者学识水平所限，书中难免有错误、疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正.

编者

『目　录』
Contents

第 1 章　矩阵

第 2 章　行列式

第 3 章 线性方程组

第4章　特征值与特征向量

第5章　二次型

第 6 章 向量空间简介

习题答案和提示

参考文献

第 1 章　矩　阵

矩阵是数学中的一个极其重要的概念，它是线性代数的一个重要的研究对象. 作为有力的工具，它的应用贯穿在整个线性代数的研究中，不仅如此，在自然科学各分支及经济管理中有大量的问题也都与矩阵有关.

在线性代数的学习中，矩阵知识和运用占有重要的基础地位. 本章先讨论求解线性方程组的消元法，由此引入矩阵概念，并介绍矩阵的运算及其性质，矩阵的初等变换、逆矩阵和分块矩阵等知识.

1.1　消元法

1.1.1　线性方程组概述

我们在中学课本中已经熟悉了有关二元一次方程组和三元一次方程组的基本知识，现在的讨论是对中学里学过的这些知识从理论上加以总结和提高.

二元一次方程组的一般形式是：

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c, \\ dx+ey&=f. \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

解析几何知识告诉我们：在平面直角坐标系中，每个实系数二元一次方程代表一条直线. 因此，一次代数方程也称为线性方程. 今后，我们将未知量的一次方程统称为**线性方程**（不管未知量的数目有多少）.

关于二元和三元线性方程组我们已经知道：

(1) 求解的基本方法是消元法（代入消元法或加减消元法）.

(2) 方程组解的情况. 在平面解析几何中，方程组(1.1)的一组解代表两

条直线的一个公共点. 因此,方程组的解可能出现下列三种情况:①两直线相交,这时方程组有唯一解;②两直线平行而不重合,这时方程组无解;③两直线重合,这时方程组有无穷多组解.

在实践中,常常需要处理含有几十、几百甚至更多个未知量的线性方程组. 对这样的线性方程组,我们需要解决下列两方面的问题:

第一,从理论上探讨:①一个线性方程组在什么情况下有解,什么情况下无解? ②若有解,则有多少解? ③在有多组解的情况下,解与解之间存在什么关系? 写出所有的解.

第二,对有解的线性方程组探讨求解的方法,也就是把以前的消元法理论化、标准化,使它适用于有许多未知量的线性方程组.

本节主要讨论一般线性方程组的求解方法,上述第一方面的课题将在第 3 章中解决.

以后研究的线性方程组具有多个未知量,我们用一个字母带上不同下角标例如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来代表不同的未知量. 一般地,包含 n 个未知量 m 个方程的线性方程组形如:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数. $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为**常数项**. 方程组(1.2)中未知量的个数 n 与方程的个数 m 不一定相等. 当方程组(1.2)的常数项 $b_i=0(i=1,2,\cdots,m)$ 时,称它为**齐次线性方程组**,否则称为**非齐次线性方程组**.

满足方程组(1.2)的一组数:$x_1=c_1,x_2=c_2,\cdots,x_n=c_n$ 称为该方程组的一个解. 方程组(1.2)如果有解,就称它为**相容的**;如果无解,就称它为**不相容**.

1.1.2 消元法应用

消元法的基本思想是把方程组中某些未知量的系数化为零,得到一个容易求解的方程组.

下面通过例子来具体说明解线性方程组的消元法.

【例 1.1】 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-6x_3=4,\\ x_1-x_2+4x_3=1,\\ -x_1+2x_2-7x_3=0. \end{cases}$$

解 将方程组中的第一个方程与第二个方程交换位置得：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

将方程组中的第一个方程的 -3 倍加到第二个方程，然后将第一个方程的 1 倍加到第三个方程，得方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_2 - 18x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

将方程组中的第二个方程乘以$\frac{1}{7}$，得方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_2 - \frac{18}{7}x_3 = \frac{1}{7}, \\ x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

将方程组中的第二个方程的 -1 倍加到第三个方程，得方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_2 - \frac{18}{7}x_3 = \frac{1}{7}, \\ -\frac{3}{7}x_3 = \frac{6}{7}. \end{cases}$$

最后的这个方程组具有这样的特点：自上而下看，每个方程中未知量的个数依次减少. 这种形状的方程组称为**阶梯形方程组**. 由最后一个方程可以解出 $x_3 = -2$，将它回代到第二个方程又得 $x_2 = -5$，再将求得的 x_1, x_2 回代到第一个方程便得到原方程组的唯一解：

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

在解例 1.1 的过程中，我们是利用若干变换，将方程组化为容易求解的方程组来解.

定义 1.1 如下三种变换：

(i) 互换两个方程的位置；

(ii) 用一个非零的数乘以某个方程；

(iii) 将一个方程的 k 倍加到另一个方程上.

称为**线性方程组的初等变换**.

定理 1.1 线性方程组的初等变换把一个方程组变成与其同解的方程组.

用消元法求解线性方程组的做法，就是反复地对方程组施行初等变换，把原方程组化为同解的阶梯形方程组，由阶梯形方程组而求得原方程组的解.

1.1.3 矩阵的概念

不难发现，在例 1.1 的求解过程中，只是对方程组的系数和常数项进行运算，而未知量 x_1,x_2,x_3 在整个过程中未参加任何计算. 因此，每一步都把它们逐一写出完全是多余的，在计算中可以把它们先隐去，只是这时要注意不要打乱了系数的排列顺序. 这样，例 1.1 中的方程组可以用矩形数表

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

来代替. 在科学及经济活动中，许多问题中的数量关系也常常用这种数表来表示.

定义 1.2 由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列**矩阵**，简称为 $m \times n$ 矩阵，其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 称为这个矩阵的**元素**. 它表示位于矩阵的第 i 行第 j 列的数.

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$ 或者 $(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$ 表示矩阵. 若需要指出行数和列数，常记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n},\cdots$ 或 $(a_{ij})_{m\times n},(b_{ij})_{m\times n},\cdots$

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 是一个 3×2 矩阵，$\boldsymbol{B}=(1,2,4)$ 是一个 1×3 矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $m=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，n 阶方阵也可以记作 $\boldsymbol{A}_n$.

两个行数和列数分别相等的矩阵叫做**同型矩阵**；如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，且对应位置上的元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.