计算机理论基础与应用丛书

空间和变换

胡茂林 /编著

科学出版社
www.sciencep.com

计算机理论基础与应用丛书

空间和变换

胡茂林　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍了在计算机科学研究过程中所遇到的各种空间及其变换. 空间有向量空间、仿射空间、欧几里得空间、二维射影平面和三维射影空间等；变换有线性变换、等距变换、仿射变换和射影变换等. 在等距变换中详细地讨论了三维空间中的刚体运动及其不同表示，给出了在各种表示下运动的计算方法；在射影变换中不仅讨论了二维、三维射影变换，也给出了三维射影到二维平面的映射，在射影变换的研究中，着重论述了空间几何元素的变形. 书后附录介绍了变换群和张量的概念.

本书重点介绍相关概念及其应用和计算方法，而不是理论分析. 因此非常适合计算机科学、电子工程以及应用数学和计算数学专业的广大研究生与高年级本科生阅读，也可以作为相关领域学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

空间和变换/胡茂林 编著. —北京：科学出版社，2007

(计算机理论基础与应用丛书)

ISBN 978-7-03-019181-6

Ⅰ. 空…　Ⅱ. 胡…　Ⅲ. ①空间 ②变换　Ⅳ. O177.3　O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 090351 号

责任编辑：姚庆爽　潘继敏 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：刘士平 / 封面设计：王　浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 一 版　开本：B5(720×1000)

2007 年 6 月第一次印刷　印张：15 1/2

印数：1—3 000　字数：308 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

前　言

随着计算机硬件的发展和处理复杂算法能力的提高，近 30 年来，以人工智能为核心的相关学科群：计算机视觉、模式识别（含机器学习）、数字图像处理、数字信号处理和计算机图形学得到了迅速的发展. 20 世纪 90 年代这些学科的发展逐步走向成熟，相关技术的融合和实际应用显著增长. 而且，随着计算机应用深入到社会科学和生物学等领域，加之计算机网络的迅速扩展，数据的维数激增和数据量按指数增长，计算机处理数据发生了根本性的变化，这些都将进一步推动相关学科向纵深发展.

在这些学科的研究过程中，涉及数学知识的广度和深度都超出了人们的想像. 在广度上，几乎所有数学科目都在这些学科的研究中出现过，而不像传统的学科，如物理主要应用微分几何、偏微分方程和群论；不仅如此，这些学科研究过程中所用的数学理论往往是当前数学界最新的研究成果，比如图像处理中所用的偏微分方程理论. 这对没有受过严格数学训练的计算机学者提出了严峻挑战.

传统的计算机学科研究所用到的数学主要集中在离散数学、算法设计、数值计算和组合数学，这些 19 世纪的数学已经无法满足当前计算机科学发展的要求. 为此，众多的计算机学者一方面呼吁数学工作者加入到计算机科学的研究中，同时也积极地将相关的数学理论引入到研究中. 近年来，在国外著名大学的计算机系（或学院）都开设了介绍近代数学基础的课程；在这些学科近年出版的专著中，加入了相当篇幅的数学知识；另外在各类学术网站上，像著名的计算机视觉网站（ http://homepages. inf. ed. ac. uk/rbf/CVonline/），开设有专门介绍相关数学知识的网页. 但这些介绍是零散的，缺乏系统性，而且在这些学科专著中介绍数学知识往往是菜单式的，很少给出证明. 因此相关研究人员如果没有很强的数学背景，难以明白其中的内容，这为他们理解和设计算法带来了困难，使他们难以将理论研究的成果尽快地转化到实际应用中.

由于这些学科涉及众多的数学知识，且分散在数学的不同学科中，所以要求计算机和工程专业的研究人员去学习和掌握这些知识是困难的. 另外数学的理论研究与应用学科的研究对象不同，即使有学者愿意到数学学科去参考这些资料，也难以找到需要的内容. 这些问题对于本书作者——一个有较强的数学背景（从本科到博士所学专业都是基础数学）的学者来说，也常常感到困惑. 特别是要为计算机视觉和模式识别方向的研究生补充相关数学知识时，却苦于没有这方面的教材. 有鉴于此，作者最近三年以来，主要以计算机视觉和模式识别理论研究中所涉及的数学

为主线，将相关的数学知识收集起来，初步完成了《空间和变换》、《矩阵计算与应用》、《优化算法》、《数据分析》等四本作为计算机科学中的数学基础读本. 另外三本书《图论和组合优化》、《几何分析与计算》和《偏微分方程在计算机科学中的应用》(题目暂定)也将争取尽快完成. 这套书籍着重介绍计算，而不是理论分析. 这样有助于计算机等相关学科的研究人员和研究生在最短的时间内掌握现代数学的一些知识和方法，为计算机科学的理论研究打下坚实的数学基础.

为了使本书适合计算机及其相关学科的研究者阅读，所选内容基本是作者阅读计算机科学论文和专著中遇到过的. 写作方式优先参考计算机学科的专著和论文，然后是工程类图书和论文，最后补充数学方面的材料使其完整. 虽然本书作为计算机科学中的数学基础读本，但并不表示书中的数学内容是简单的，只不过是把它们收集起来，方便相关人员参考而已.

最后，材料的选取是以我个人对计算机学科的认识为主，加之涉及内容比较广泛，成书时间较短，难免有疏漏和不适之处，希望读者给予批评和指正，以便再版时改进.

胡茂林

2006 年 12 月 20 日

于安徽大学

目　　录

第一章　向量空间

本书假设读者对向量空间概念有一定的了解，比如任何两个向量的和是一个向量，任一个向量与数的乘积也是一个向量. 本章的主要目的是研究向量空间中的元素和它们之间的几何性质. 在 1.1 节，介绍向量空间的定义；在 1.2 节引入子空间，它是向量空间中重要的元素，同时介绍子空间的交与和，给出由集合构造子空间的方法；在 1.3 节介绍空间基和空间维数的概念，并给出了重要的维数定理，它是研究空间元素关系的重要工具.

1.1　向量空间的定义

我们首先回忆一下向量空间的定义，它是研究其他空间的基础.

向量空间　一个集合 V 称为实(复)数域 R(或 C)上的**向量空间**，如果它的元素(称为**向量**)对两个基本运算数乘和加法是封闭的，即对任意两个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 和两个数 $\alpha,\beta\in R$(或 C)，线性组合 $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ 是 V 中的元素.

定义中的线性组合 $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in V$ 等价于两个条件：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V \quad 和 \quad \alpha\boldsymbol{x}\in V$$

因为 $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ 是向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的线性组合，因此向量空间通常称为**线性空间**. 利用归纳法可以证明，空间中任意多个向量的线性组合也是空间中的元素.

注意集合与向量空间的差别，集合只是一组元素，元素之间没有线性运算；另外，本书主要讨论实数域上的向量空间，除非特别指出是复数域.

数学上，属于向量空间的例子非常广泛，除了代数学外，几乎所有数学研究的对象都是向量空间. 在这里，我们给出三个最常用且有代表性的例子.

例 1　R^n 是一个实数域上的向量(或线性)空间，其向量用列表示，即$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$，上标 T 表示转置. 对任意 $\alpha,\beta\in R$ 和向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$，它们的线性组合是每个分量 x_i,y_i 权值分别为 α,β 的加权和，即

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\alpha x_2+\beta y_2\\\vdots\\\alpha x_n+\beta y_n\end{pmatrix}$$

例 2　所有 $m\times n$ 阶矩阵组成一个线性空间，记为 $R^{m\times n}$.

例 3　记在$[a,b]$上所有连续函数组成的集合为$C[a,b]$，因为连续函数的和、数与连续函数的乘积都是连续函数，因此$C[a,b]$是一个线性空间.

在本书中，向量一般用英文小写黑体字母$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots$表示，英文大写黑体字母$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示矩阵和空间中的点，英文大写字母$A,B,C,\cdots$表示集合，实数用希腊字母或小写英文字母$\alpha,\beta,\gamma,\cdots,a,b,c,\cdots$表示，□表示定理证明结束.

1.2　子　空　间

子空间是与向量空间有着相同结构的子集合，因此是向量空间中一个重要的元素. 下面给出子空间的定义.

子空间　线性空间V的子集L称为**子空间**，如果对$\forall\alpha,\beta\in R$和$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in L$，有

$$\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}_2\in L$$

根据上述的定义，子空间本身就是一个线性空间. 如果取$\alpha=-\beta$和$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$，则有$\boldsymbol{0}=\alpha\boldsymbol{x}_1-\alpha\boldsymbol{x}_1\in L$，因此$V$的每一个子空间都包含零向量. 特别地，集合$\{\boldsymbol{0}\}$是一个子空间，称为**零子空间**，简记为$\boldsymbol{0}$. 在另一极端情形，$V$本身也是一个子空间. 我们把$\boldsymbol{0}$空间和空间$V$称为**平凡子空间**，不是平凡的子空间称为**正则子空间**，即不是零空间，且V中至少存在一个元素不属于它；例如，R^3中的过原点的直线和过原点的平面是正则子空间.

例 4　设$\boldsymbol{A}$是一个$m\times n(m\leqslant n)$矩阵，则

$$L=\{\boldsymbol{x}\in R^n:\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\}$$

是R^n中的一个子空间，称为$\boldsymbol{A}$的**零空间**. 当$m=1$时，称L为R^n中的**超平面**，它与空间中的点形成对偶关系(见第四、六章).

事实上，对任意$\alpha,\beta\in R$和$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in L$，即$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=0(i=1,2)$，有

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}_2)=\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=0$$

因此$\alpha\boldsymbol{x}_1+\beta\boldsymbol{x}_2\in L$.

根据第三章正交子空间的定义，可以证明反过来也成立，即R^n中的任何子空间都可以用矩阵的零空间表示.

例 5　$R^{n\times n}$空间中，所有上(或下)三角矩阵，对称矩阵和对角矩阵的集合分别是$R^{n\times n}$的子空间.

子空间有下面的重要性质：

定理 1　V的子空间族的交是V的子空间.

证明　设$L_i\subseteq V$是V的子空间，记$L=\bigcap(L_i:i\in I)$. 因为对每一个i，$\boldsymbol{0}\in L_i$，因此L不是空集. 如果$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$且$\alpha,\beta\in R$，则对每一个$i$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L_i$，由于$L_i$是子空间，即有$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in L_i$，因此$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in L$，即$L$是$V$的子空间.　□

例如，R^3 中两个过原点平面的交是过原点的直线；$R^{n\times n}$ 的子空间上三角矩阵与对称矩阵的交是对角矩阵组成的子空间.

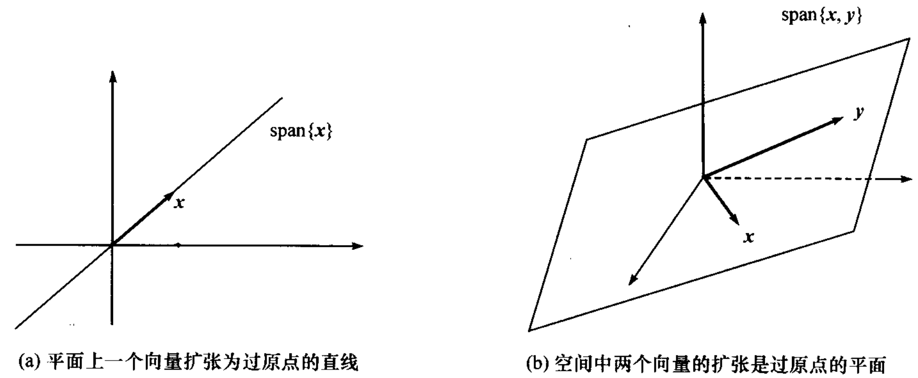
扩张子空间　下面基于定理 1 构造包含一个集合的最小子空间.

对 $\forall \boldsymbol{x}\in V$，集合 $\{\alpha\boldsymbol{x}\mid\alpha\in R\}$ 是 V 的子空间，称为由 $\boldsymbol{x}$ 生成的子空间；一般地，对任意集合 $S\subseteq V$，对 $\forall \boldsymbol{x}_i\in S, i=1,\cdots,r,\alpha_i\in R$，所有有限线性组合 $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r$ 的集合记为 span $\{S\}$. 可以验证 span $\{S\}$ 是 V 的一个子空间且包含 S，因此称 span $\{S\}$ 是 S 的**扩张**（或**生成**）**子空间**，因为是 S 的元素的线性组合的集合，因此也称为 S 的**线性包**.

例如，$R^2=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. 特别地，对线性子空间 L，有 $\mathrm{span}\{L\}=L$.

V 的包含 S 的子空间一定包含它的线性组合，因此包含 span$\{S\}$，即如果 L 是 V 的子空间，且 $S\subseteq L$，则 $\mathrm{span}\{S\}\subseteq L$. 因此子空间 span$\{S\}$ 是包含 S 的最小子空间.

在三维空间中，一个向量的扩张子空间是过原点且以这个向量为方向的直线；两个向量的扩张子空间是过原点且包含这两个向量的平面；三个向量的扩张子空间就是三维空间本身（见图 1.1）.



(a) 平面上一个向量扩张为过原点的直线　　(b) 空间中两个向量的扩张是过原点的平面

图 1.1

上面扩张子空间的定义可以看作是“向上”（包含）定义的，存在一个等价的“向下”定义：如果 S 是向量空间 V 的任意子集，则 span$\{S\}$ 是 V 中所有包含 S 的子空间的交，因为至少存在着一个这样的子空间，即 V 本身，因此交集是有定义的. 这也说明 span$\{S\}$ 是包含 S 的最小子空间.

子空间的和　由于子空间的交是子空间，人们也许认为子空间的并也是一个子空间，但是很容易通过例子说明这是不对的.

例 6　在二维空间中，考虑子空间

$$L_1=\{(\alpha,0)^{\mathrm{T}}:\alpha\in R\},\quad L_2=\{(0,\beta)^{\mathrm{T}},\beta\in R\}$$

的并 $L_1\cup L_2$（即平面上的 x,y 轴）. 因为 $(1,1)^{\mathrm{T}}\notin L_1$，$(1,1)^{\mathrm{T}}\notin L_2$，因此 $(1,1)^{\mathrm{T}}\notin$

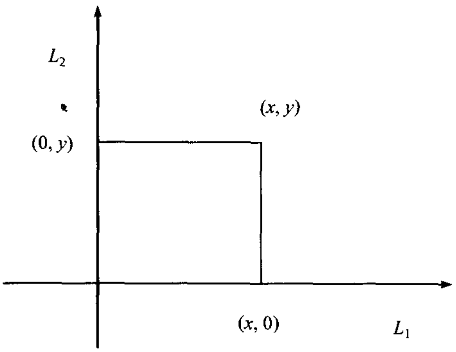


图 1.2　平面上不在 L_1 和 L_2 上的点 $(x,y)^T$ 均可表示为 $(x,0)^T+(0,y)^T$

$L_1\cup L_2$，而向量 $(1,1)^T=(1,0)^T+(0,1)^T$，其中 $(1,0)^T\in L_1\subset L_1\cup L_2$，$(0,1)^T\in L_2\subset L_1\cup L_2$（见图 1.2），即 $L_1\cup L_2$ 中两个向量的和不属于它，因此 $L_1\cup L_2$ 不是 R^2 的线性子空间.

为了弥补这个问题，根据扩张子空间的定义，可以给出子空间和的定义.

任何一组子空间并集的扩张子空间称为这些**子空间的和**，也就是说，子空间 $L_i(i\in I)$ 的和是 V 中包含这些子空间的最小子空间，记为 $+(L_i:i\in I)$，或简记为 $+(L_i)$. 特别地，有限个子空间 $L_1, \cdots, L_n$ 的和记为 $L_1+L_2+\cdots+L_n$（如在例 6 中，$L_1+L_2=R^2$）.

如果 $L\cap L'=\{\mathbf{0}\}$，则称 $L+L'$ 是 L 和 L' 的**直和**，记为 $L\oplus L'$.

两个子空间的直和等价于分解的唯一性，即对 $\forall\, \boldsymbol{x}\in L_1\cup L_2$，存在唯一的 $\boldsymbol{y}\in L_1$，$\boldsymbol{z}\in L_2$，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$. 这是因为 $L+L'$ 是直和，假设还有分解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{z}'$，则有 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\in L_1$，$\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z}\in L_2$，而 $L\cap L'=\{\mathbf{0}\}$，因此 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}'$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}'$. 反过来，对 $\forall\, \boldsymbol{y}\in L_1\cap L_2$，有 $\boldsymbol{y}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{y}$，由分解的唯一性，得 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$，因此 $L\cap L'=\{\mathbf{0}\}$，它们的和是直和.

例如，在平面上两条不同的过原点的直线的和是直和；三维空间中，三条不共面的直线的和是直和，但两张平面的和不是直和.

更一般地，对子空间 $L_i(i\in I)$，如果对每一个指标 $j\in I$，有

$$+(L_i:i\in I, i\neq j)\cap L_j=\{\mathbf{0}\} \tag{1.1}$$

则它们的和是**直和**，记为 $\oplus(L_i:i\in I)$.

注意关于多个子空间 L_i 的直和条件比要求对所有 $i\neq j$，$L_i\cap L_j=\{\mathbf{0}\}$ 要强，因为满足两两交集是零的子空间和并不保证是直和. 例如，平面上的三个不同的过原点直线的和就不是直和.

如果 $\boldsymbol{x}\in L_1\oplus\cdots\oplus L_r$，则 $\boldsymbol{x}$ 可以唯一地分解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{l}_1+\cdots+\boldsymbol{l}_r$，其中 $\boldsymbol{l}_i\in L_i$，$i=1, \cdots, r$. 这是因为若有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{l}_1+\cdots+\boldsymbol{l}_r=\boldsymbol{l}_1'+\cdots+\boldsymbol{l}_r'$，其中 $\boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{l}_i'\in L_i$，$i=1, \cdots, r$. 因此对 $\forall\, j$，有

$$\boldsymbol{l}_j-\boldsymbol{l}_j'=-\sum_{i\neq j}(\boldsymbol{l}_i-\boldsymbol{l}_i')$$

由式(1.1)得 $\boldsymbol{l}_j-\boldsymbol{l}_j'=0$，即对 $\forall\, j$，有 $\boldsymbol{l}_j=\boldsymbol{l}_j'$，因此分解是唯一的. 反过来可以证明分解的唯一性保证了和是直和.

例 7　R^n 空间可以看作 n 个一维子空间 $\{(0, \cdots 0, x, 0, \cdots, 0)^T : x\in R\}$ 的直和.

1.3　线性空间的维数

本节将描述向量空间的定量特征，其中最重要的概念是维数，我们将运用线性相关的术语来讨论维数.

线性关系　r 个向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 称为**线性相关**的，如果存在不全为零的实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r=0$，否则称它们是**线性独立**(或**线性无关**)的. 如果 $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r$，称 $\boldsymbol{x}$ **线性依赖**于向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$.

例如，对 R^3 中的向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

因为它们满足 $\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{z}=0$，因此是线性相关的. R^2 中的向量

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

是线性无关的，因为如果

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=0$$

则 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

假设 S 是向量空间 V 的子集，称 S 是**线性相关**的，如果 S 中存在着不同向量的非平凡线性组合是零向量，即存在两两不相同的向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\in S$，和不全为零的实数值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r=0$，否则称 S 是**线性无关**的(或**线性独立**的).

注意如果一组向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 包含零向量，则它们一定是线性相关的.

如果两个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是线性相关的，则称它们是**共线**(或**平行**)的，三个线性相关的向量称为**共面**的.

下面的定理给出线性关系中三个概念的联系：

定理 2　(1) 如果 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r(r\geqslant 2)$ 是线性相关的，则 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 中一定存在一个向量，它线性地依赖于其他向量.

(2) 如果 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_r$ 是线性独立的，而 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_r$ 是线性相关的，则 $\boldsymbol{x}$ 线性依赖于 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_r$.

证明　(1) 因为 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 是线性相关的，因此存在不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，使得

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{x}_r=0$$

不妨假设 $\lambda_i\neq 0$，则

$$x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}x_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}x_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}x_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}x_r$$

即 $\boldsymbol{x}_i$ 线性依赖于 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_r$.

(2) 因为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r$ 是线性相关的,因此存在不全为零的数 $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$,使得

$$\lambda \boldsymbol{x} + \lambda_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \lambda_r \boldsymbol{y}_r = \boldsymbol{0} \tag{1.2}$$

因为 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r$ 是线性独立的,因此 λ 不能是零,否则由 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_r$ 是线性独立,得到 $\lambda_i = 0,\ i = 1, \cdots, r$,这与 $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 不全为零矛盾. 式(1.2)两边除以 λ 就可以将 $\boldsymbol{x}$ 表示为 $\boldsymbol{y}_i$ 的线性组合. □

向量空间的基　V 中一组线性无关的向量集合 S 称为向量空间 V 的**基**,如果它的扩张子空间是 V,即 $V = \mathrm{span}\ \{S\}$.

假设 $S = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ 是 V 的基,则对 $\forall\, \boldsymbol{x} \in V$,有

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x}_n \tag{1.3}$$

其中 $\lambda_i \in R, i = 1, \cdots, n$.

因为基向量是线性无关的,因此式(1.3)中 $\boldsymbol{x}$ 的分解是唯一的,称向量 $\boldsymbol{x}$ 在分解式中基的系数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**坐标**.

例如,$\{\boldsymbol{e}_i, i = 1, \cdots, n\}$ 是 R^n 空间的基,其中 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量是 1,其他分量是 0 的 n 维数组. 根据 Bernstein 逼近定理知,$\{1, x, x^2, \cdots\}$ 是例 3 中的空间 $C[a, b]$ 的一组基(Bernstein 定理在计算机图形学中,有着广泛的应用).

下面讨论特殊的 $R^{2\times 2}$ 和 $R^{3\times 3}$ 空间的基.

在数学上,$R^{m\times n}$ 等价于向量空间 R^{mn},因此有一个自然的基,比如对 $R^{2\times 2}$ 空间,有下面的基

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在计算机视觉中,对 $R^{2\times 2}$,一般用 Roberts 基,它们是

$$W_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, W_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, W_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

在这个基下,可以描述图像的结构. 例如:

常数区域

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 10\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 10W_1 + 0W_2 + 0W_3 + 0W_4$$

阶梯边界

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0W_1 + \frac{2}{\sqrt{2}}W_2 - \frac{2}{\sqrt{2}}W_3 + 0W_4$$

阶梯边界

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & 1\end{pmatrix} = 0W_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}W_2 + 0W_2 - 2W_4$$

直线

$$\begin{pmatrix}0 & 8\\8 & 0\end{pmatrix} = 8W_1 + 0W_2 + 0W_3 + 8W_4$$

在数学上,$R^{3\times3}$空间的标准基向量是

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

例如

$$\begin{pmatrix}9 & 5 & 0\\5 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

在计算机视觉中,$R^{3\times3}$经常用下面的 Frei-Chen 基向量

梯度

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & -\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}, \quad W_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

波纹

$$W_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}0 & -1 & \sqrt{2}\\1 & 0 & -1\\-\sqrt{2} & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad W_4 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\\0 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

直线

$$W_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad W_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Laplace

$$W_7 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 4 & -2\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}, \quad W_8 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\1 & 4 & 1\\-2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

均值

$$W_9 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

在图像中，Frei-Chen 基可以将一个像素邻域表示为梯度、波纹和直线，它们提供了图像局部结构信息，因此在图像分析中有着广泛的应用.

有限维空间　下面介绍有关维数的问题，我们主要讨论有限维空间.

由有限个向量扩张的向量空间称为**有限维空间**；否则称为**无限维空间**.

例 1 和例 2 是有限维空间，例 3 是无限维的. 计算机科学几乎讨论的都是有限维向量空间，只是在特殊情形会涉及无穷维空间，比如函数的各种基分解（模式识别中的核方法，信号处理中的 Fourier 和小波分解）. 在有限维空间中，有下面的性质：

定理 3　任何有限维向量空间都包含一组基.

证明　因为有限维空间是由有限个向量扩张成的，不妨假设 r 个向量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 扩张成 V，如果这些向量是线性相关的，且 $r \geqslant 2$，则由定理 2(1)，其中一个 $\boldsymbol{x}_i$ 是线性依赖于其他的向量. 舍去这个向量，则剩下的向量仍能扩张 V. 按这种方式继续下去，要么得到一组基，要么得到单个向量 $\boldsymbol{x}$. 如果得到的是单个向量 $\boldsymbol{x}$，则因为 $\boldsymbol{x}$ 是线性相关的，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；因此 V 是由零扩张的空间，即 $V=\boldsymbol{0}$.　□

下面引理说明在有限维空间中，线性独立的向量个数不能超过扩张成整个空间的元素个数.

引理 1　如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 扩张成空间 V，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ 是 V 中线性独立向量，则 $s \leqslant r$，如有必要，重新对 $\boldsymbol{x}_i$ 排序，使得 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{x}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 扩张成 V.

证明　对 k 进行归纳假设，证明只要 $k \leqslant s$，则 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 扩张成 V. 对 $k=0$，显然成立. 假设对 $k=h-1$ 成立，证明 $k=h$ 也成立. 由归纳假设 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{h-1}, \boldsymbol{x}_h, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 扩张空间 V，因此有

$$\boldsymbol{y}_h = \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_{h-1} \boldsymbol{y}_{h-1} + \alpha_h \boldsymbol{x}_h + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r$$

因为 $\boldsymbol{y}_i (i=1, \cdots, s)$ 是线性独立的，因此至少有一个 α_i 非零，否则 $\boldsymbol{y}_h$ 线性依赖于 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{h-1}$，与 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ 是线性独立矛盾. 不妨假设 $\alpha_h \neq 0$（如果必要重新排序）. 现在 $\boldsymbol{x}_h$ 可以用 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{x}_{h+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 表示，因此

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{h-1}, \boldsymbol{y}_h, \boldsymbol{x}_{h+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_r\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_{h-1}, \boldsymbol{x}_h, \cdots, \boldsymbol{x}_r\} = V$$

根据归纳假设，证明了引理的结论.　□

下面定理说明了基的个数的重要性质.

定理 4　若 V 是一个有限维的向量空间，则：

(1) V 的任何两组基所含元素的个数相同.

(2) 下面关于 V 的有限子集 S 的陈述是等价的：

① S 是 V 的一组基；

② S 是 V 的最小扩张子集；

③ S 是 V 中最大的线性独立子集.

(3) 在 V 中的任何线性独立向量集合能扩展成 V 的一组基.

证明 (1) 假设$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$和$\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_s\}$分别是$V$的两组基，由引理1可得$s\leqslant r$和$r\leqslant s$，因此有$r=s$.

(2) 如果$\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_s\}$是一组基，则由引理1，$s\leqslant r$，因此是最小扩张子集，即①推出②. 如果$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$是基，则同样的不等式说明这个基是最大的线性独立子集，即①推出③. 如果S是最小扩张子集，则由定理3的证明过程，S一定是线性独立的. 这表明②推出①. 最后如果S是最大的线性独立子集，则由定理2的(2)，S扩张成V，由此③推出①.

(3) 假设$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$是一组基，$\{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_s\}$是给定的线性独立向量，则由引理1，如果必要，重新排序，使得$\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s,\boldsymbol{x}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{x}_r$扩张$V$. 由于这组向量是有$r$个向量，因此由(2)的结论，它们是一组基. □

现在给出空间维数的定义，它是描述空间最重要的量.

维数 设V是一个有限维向量空间，V中一组基所含向量的个数称为V的**维数**，记为$\dim V$.

例如，$\dim(R^n)=n$，$\dim(R^{m\times n})=mn$.

由定理4，可以得到下面的两个推论.

推论1 如果K是V的子空间，则K的任意基可以扩展为V的一组基.

推论2 如果K是V的子空间，则至少存在一个子空间M，使得

$$V=M\oplus K$$

下面介绍维数定理，它是描述空间元素关系的重要工具. 在第二章讨论仿射空间元素关联性时，将用到此定理.

定理5 若M和N是同一个向量空间的两个有限维子空间，

(1) 如果$M\subseteq N$，则$\dim M\leqslant\dim N$，且若$\dim M=\dim N$，则$M=N$.

(2) $M+N$和$M\cap N$都是有限维的，且

$$\dim(M+N)+\dim(M\cap N)=\dim M+\dim N.$$

证明 (1)是定理4的自然结果，为了证明(2)，运用定理4，可假设$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$是$M\cap N$的一组基，$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s\}$是$M$的一组基，$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_t\}$是$N$的一组基. 显然$M+N$是由$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s,\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_t$扩张而成的，剩下只要证明这些向量是线性无关的.

假设

$$\underbrace{\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r}_{\boldsymbol{a}}+\underbrace{\beta_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+\beta_s\boldsymbol{y}_s}_{\boldsymbol{b}}+\underbrace{\gamma_1\boldsymbol{z}_1+\cdots+\gamma_t\boldsymbol{z}_t}_{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{0}$$

其中α_i，β_i和γ_i是实数，则$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，因为$\boldsymbol{c}\in N$，而$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\in M$，因此$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$是$M\cap N$中的元素. $\boldsymbol{c}$可以由$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$线性表示，但是$\boldsymbol{x}_i$和$\boldsymbol{z}_i$是线性独立的，因此$\gamma_i$都是零. 现在由$\boldsymbol{x}_i$和$\boldsymbol{y}_i$是线性独立的，因此所有的$\alpha_i$和$\beta_i$都是零. □

例如，在三维空间中，在过原点的两个二维平面的交是一条过原点的直线，它

们的和是三维空间本身，因此有 $2+2=1+3$. 在过原点的一条直线和一个过原点平面的交是零空间，和是三维空间，因此有 $1+2=0+3$.

习 题 1

1. 若 V_1 和 V_2 都是线性空间，证明它们的乘积 $V_1\times V_2=\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2):\boldsymbol{x}_1\in V_1,\boldsymbol{x}_2\in V_2\}$ 也是线性空间.
2. 至少给出连续函数空间 $C[a,b]$的两个子空间.
3. 在复数中，证明 1 和 i(复单位)是线性无关的.
4. 如果向量集合 S 包含 0，则 S 是线性相关的.
5. 如果向量集合 S 是线性独立的，则 S 每一个子集都是线性独立的.
6. 证明在 R^3 中的向量$(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性相关的，但是任何三个是线性独立的.
7. (1) 证明 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是所有 n 阶多项式集合 $P_n(x)$的一组基；

   (2) 证明多项式
   $$f_i(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n),\ i=1,2,\cdots,n$$
   其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是互不相同的数，是 $P_n(x)$的一组基.
8. 假设$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$是 V 的一组基，如果 A_i 是由 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$张成的一维子空间，则 $V=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$.
9. 设 L,L_1 和 L_2 都是 V 的线性子空间，且 $L\subseteq L_1+L_2$，证明
   $$\dim L\leqslant\dim L_1+\dim L_2$$
10. (1) 若 V 是 4 维空间，L_1 和 L_2 分别是 3 维和 2 维子空间，确定 $L_1\cap L_2$ 所有可能的维数.

    (2) 对 7 维空间 V 的 4 维子空间 L_1 与 5 维子空间 L_2，讨论上述问题.
11. 假设 L_1,L_2 是 R^n 的两个子空间，如果 $\dim L_1+\dim L_2>n$，则 $L_1\cap L_2\neq\{\boldsymbol{0}\}$.
12. 求证 n 阶非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{a}_i(i=1,\cdots,n)$，$\boldsymbol{b}\in R^n$有解的充分必要条件是
    $$\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}=\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}\}$$
13. 证明定理 4 的推论.
14. 如果 V 是一个有限维向量空间，证明和 $M+N$ 是直和的充要条件是
    $$\dim(M+N)=\dim M+\dim N$$