SHUXUEQIZHI

数学启智

突破中考快捷键

主　编　陈振宣
副主编　章志强

上海辞书出版社

数学启智

——突破中考快捷键

主　编　陈振宣
副主编　章志强

上海辞书出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学启智:突破中考快捷键/陈振宣等编著.—上海:上海辞书出版社,2007.8

ISBN 978-7-5326-2302-0

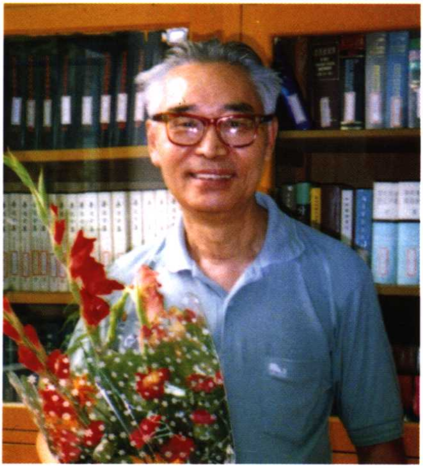
Ⅰ.数… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学课—初中—课外读物
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第091839号

责任编辑 陈为众
装帧设计 汪 溪

数学启智
——突破中考快捷键

上海世纪出版股份有限公司
上 海 辞 书 出 版 社 出版、发行
(上海陕西北路457号 邮政编码 200040)
电话:021—62472088
www.ewen.cc www.cishu.com.cn
上海望新印刷厂印刷
开本 890×1240 1/32 印张 8.25 字数 246 000
2007年8月第1版 2007年8月第1次印刷
ISBN 978-7-5326-2302-0/O·58
定价:16.00元



陈振宣

1922年10月出生，杭州市人。在中学、中专连续执教40余年。1981年被评为上海市先进教师。1982～1992年任上海市数学会理事。退休后被聘为上海师大教科所特邀研究员、中国管理科学研究院思维科学研究所上海分所研究员，1994年被评为研究教授。曾应邀去全国60多个地区讲学。

长期从事数学思维研究，发表教学科研论文百余篇。出版著作50余种，代表作是《培养数学思维能力的探索》，并为《数学题解辞典》、《中学数学教学辞典》等大型工具书的编委、主要撰稿人。

章志强

中学数学高级教师。1967年6月生于浙江桐乡，1990年7月毕业于上海师范大学数学系，获理学士学位，2006年5月获上海师范大学教育管理硕士学位。2001年1月起任上海师范大学第四附属中学教学副校长，2005年8月起任上海市实验学校西校常务副校长。长期从事高中数学教学科研工作，曾为“十五规划”课题《数学思维训练与左右脑协调研究》负责人之一，主要研究数学思维训练对脑潜能开发的作用。已在核心期刊发表数学教学科研论文多篇，参与编写的数学教学用书共六本。

前 言

你想使自己更聪明吗？在面临几何难题时，想添一条别人想不到的辅助线吗？在碰到代数难题时，会突发奇思妙想吗？有人认为聪明是天赋的，后天是无法改变的.脑科学的新发展证明大脑的可塑性，不但年轻时会发展，直至老年时，还可以产生新的神经元促进突触的新生与发展.通过恰当的思维训练，开启聪明之门的金钥匙是存在的.

数学思维训练左右脑协调研究中心经过多年的实验探索发现了这把金钥匙的结构与操作方法，终于写成本书.

1. 数学有趣好玩

在本书的趣味篇中有“逻辑推理、料事如神”、“一个难忘的数学‘魔术’”、“万人同一‘幸福数’”等一系列有趣好玩的趣题妙解，激发好奇性、探究欲，形成学习的强大动力.

2. 数学思维的导航器

笛卡儿有一句名言：“最有价值的知识是关于方法的知识.”我们发现数学思维方法是思维的导航器.本书的方法篇中以大量中考压阵题为载体，详细阐述了数学的常用思维方法，点燃心灵的火花，使你的智慧获得一次大飞跃.

3. 数学创新思维的实践

本书的探究应用篇通过搭建系列的应用课题和探究课题，创建了思

维自由翱翔的空间，任你自由发挥创造，放飞你的聪明才智.其中真人真事的"和平饭店的电路问题"充分展示数学思维方法的魅力，得到知名数学家、数学教育家张奠宙教授的赞赏，并广为传播.

4. 数学文化熏陶

本书的文化欣赏篇通过名题欣赏，以数学美启发思维.通过数学家小传铸就为科学献身的高尚志趣，为成长为科技精英准备条件.

把开启聪明之门的金钥匙奉献给青少年是本书创作的动机.祝愿亲爱的读者人人更聪明，成长为创新型人才.

陈振宣

2007.7.10

目录

一、探究应用篇

二、方法篇

三、趣味篇

四、文化欣赏篇

五、理论思考篇

一、探究应用篇

引　言

从青少年时期就开始培养探究自然规律的兴趣与欲望，追求真理，永远不满足已经取得的结果，这是成长为拓展型、创新型人才不可或缺的品质. 教材与数学读物应尽量为学生搭建进行创新思维实践的平台，让青少年的思维自由翱翔. 只有通过创新思维的实践才有利于创新思维实践能力的发展. 培养用数学的意识、用数学的眼光看问题，善于把实际问题数学化，勇于实践，敢为人先，合作交流，愿为社会主义祖国奉献聪明才智，这是进行创新思维实践的另一领域. 以上的两个方面构成了探究应用篇丰富的内涵，希望读者利用本篇提供的材料先自行独立解决，再与书中提供的解决方法进行对比，反思，总结创新思维的规律. 在成功体验中发展读者的创新思维实践的能力，这是本书编著的目的与希望.

1. 归纳思维

在自然科学中，人们常常通过实验、观察，从一些特例逐步归纳抽象概括，由事物的个性发现共性，作出科学的猜想，然后通过实验（广泛地实践）、逻辑推理证明猜想确实无误. 这种通过特例的观察、实验、抽象概括，引起直觉上的共鸣，发现事物的共性、规律性的思维过程称为归纳思维（即不完全归纳法）. 这是人类对发现真理的思维方法的总结，许多伟大的真理的发现，都来源于此. 当然不完全归纳法所作出猜想是或然的，不一定都对，也可能出现错误，但这并不能让人们抛弃这发明真理的有

效方法.如果在未发现反例而轻易放弃已获得的科学猜想是不明智的;那么在出现反例仍固执己见则是更加愚蠢的.

例 1 乘法公式：$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ 的推广.

从我们已学过的公式有：

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$

由此想到：

$$(a-b)(\cdots?\cdots)=a^4-b^4,$$

$$(a-b)(\cdots?\cdots)=a^5-b^5,$$

$$\cdots\cdots$$

应用除法,可得

$$(a^4-b^4)\div(a-b)=a^3+a^2b+ab^2+b^3,$$

$$(a^5-b^5)\div(a-b)=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4,$$

由此,作出猜想：

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n.$$

这一猜想是否正确？可以用多项式乘法证明如下：

$$\begin{array}{rl}
 & a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1} \\
\times & a-b \\
\hline
 & a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1} \\
 & \quad -a^{n-1}b-a^{n-2}b^2-\cdots-a^2b^{n-2}-ab^{n-1}-b^n \\
\hline
 & a^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -b^n
\end{array}$$

所以 $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$=a^n-b^n \tag{⊛}$$

这样证明猜想正确,这是应用归纳思维取得成功的简单例子之一.

在公式⊛中,令 $a=1$, $b=q$, 则有

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=1-q^n.$$

当 $q\neq 1$ 时，有

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$$

等式两边同乘以 a_1，则有

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \qquad ①$$

a_1、a_1q、a_1q^2、$\cdots$、a_1q^{n-1} 中相邻两项的比均为 q，所以这样一串数叫做等比数列. 公式①即是等比数列前 n 项和的公式.

当 $q=1$ 时，前 n 项之和为 na_1.

这样从乘法公式⊛又推出等比数列前 n 项和的公式. 这些都是归纳思维所取得的胜利.

例 2 设 $f(n)=n^2+n+41$，当 $n=0$ 时，$f(0)=41$ 是质数；当 $n=1$ 时，$f(1)=1^2+1+41=43$ 也是质数；当 $n=2$ 时，$f(2)=2^2+2+41=47$ 也是质数；当 $n=3$ 时，$f(3)=3^2+3+41=53$ 也是质数；于是猜想当 n 为自然数时，$f(n)$一定是质数. 你认为这一猜想是否正确?

当 $n=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots$，逐个试验所得结果都正确. 如果认为结果一定正确，那就上当了. 请看当 $n=40$ 时，则

$$\begin{aligned} f(40) &= 40^2+40+41=40(40+1)+41=40\times 41+41 \\ &= 41(40+1)=41^2. \end{aligned}$$

显然不是质数，这一反例证明猜想是错误的.

由此可见对归纳思维应持积极态度，既要大胆猜想，又要小心求证.

近年来的中考中，引入了利用归纳思维进行合情推理作出科学猜想的新型试题. 这是考查创新思维的新动向，值得关注. 先从部分精彩的试题剖析谈起.

例 3 观察下列各式及其验证过程：

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}},$$

验证：
$$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=\sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}$$
$$=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}.$$
$$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}},$$
验证：
$$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}$$
$$=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}.$$

(1) 按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证；

(2) 针对上述各式反映的规律，写出用 n(n 为任意自然数，且 $n\geqslant 2$) 表示的等式，并给出证明.(2000 年河北省)

[分析] 从给出的两等式及其验证过程，发现如下的规律：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{2^2-1}}$，$3\sqrt{\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{3^2-1}}$. 这样可猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{4^2-1}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

验证：$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{4^3}{4^2-1}}=\sqrt{\frac{4(4^2-1)+4}{4^2-1}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

从而可得猜想：$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$.

[解] 略.

[说明] 从特例中悟出规律，也就是从具体实例的个性，悟出个性

中所蕴涵的共性(规律性的东西)的思维称为归纳思维. 这种不完全归纳法是合情推理,其结论是或然的,可能是正确的,也可能是错误的. 只有通过逻辑证明(演绎推理),才能确立猜想的正确性.

这一例子中只有将:

$2\sqrt{\frac{2}{3}}$、$3\sqrt{\frac{3}{8}}$、$4\sqrt{\frac{4}{15}}$分别化为$2\sqrt{\frac{2}{2^2-1}}$、$3\sqrt{\frac{3}{3^2-1}}$、$4\sqrt{\frac{4}{4^2-1}}$,才能发现其规律性. 猜想:$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$才能浮现脑海,这正是归纳思维的关键. 人的聪明才智的高低,往往表现在从个性悟出共性的能力上.

对于归纳思维所获结论的或然性,可能正确,也可能不正确,应有正确的态度. 如果把归纳思维合情推理所获得的结论的似真性,当作确定性是愚蠢的,但是忽视这种似真的猜想将同样是愚蠢的,甚至是更加愚蠢的.

例 4 已知:在内角不确定的$\triangle ABC$中,$AB=AC$,点E、F分别在AB、AC上,$EF\parallel BC$,平行移动EF,如果梯形$EBCF$有内切圆.

当$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$时,$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;当$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$时,$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\text{提示:}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$;当$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{4}$时,$\sin B=\frac{4}{5}$;

(1) 请你根据以上所反映的规律填空:当$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{5}$时,$\sin B$的值等于________;

(2) 当$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{n}$时($n$是大于1的自然数),请用含$n$的代数式表示$\sin B=$________,并画出图形,写出已知、求证和证明过程.(2002年北京市朝阳区)

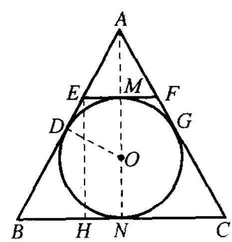


图 1

[分析] 从已知$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$时,$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$时,$\sin B=$

$\frac{2\sqrt{3}}{4}$；$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{4}$时，$\sin B=\frac{2\sqrt{4}}{5}$；由此可见蕴涵的规律．从而得：

当$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{5}$时，$\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$；

当$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{n}$时，$\sin B=\frac{2\sqrt{n}}{n+1}$．

［解］　(1)(2)猜想部分已详，分析略．

(2)的论证部分：

已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$EF\parallel BC$，$\odot O$内切于梯形$EBCF$，点D、N、G为切点，$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{n}$($n$为大于1的自然数)．

求证：$\sin B=\frac{2\sqrt{n}}{n+1}$．

［证明］　连结A、O，延长交BC于N，交EF于M．

$\odot O$的中心O，过O作$OD\perp AB$于D．

设$AM=x$，因为$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{n}$，所以$\frac{AM}{AN}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{n}$，则$AN=nx$，$OM=\frac{(n-1)x}{2}$．因为$OM=OD$，$\angle AOD=90^\circ-\angle BAO$，而$\angle B=90^\circ-\angle BAO$，所以$\angle AOD=\angle B$，$AO=x+\frac{n-1}{2}x=\frac{n+1}{2}x$．

$$AD=\sqrt{AO^2-OD^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(n+1)^2x^2-\frac{1}{4}(n-1)^2x^2}$$
$$=\frac{x}{2}\sqrt{4n}=x\sqrt{n}.$$

$$\sin B=\frac{AD}{AO}=\frac{x\sqrt{n}}{\frac{1}{2}(n+1)x}=\frac{2\sqrt{n}}{n+1}.$$

例5　某学习小组在探索“各内角都相等的圆内接多边形是否为正