经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-5）

不等式选讲

SHUXUE

北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-5）

不等式选讲

SHUXUE

主　　编　严士健　王尚志
副 主 编　张饴慈　李延林　张思明
本册主编　戴佳珉　熊曾润
编写人员（按姓氏笔画排序）
许书华　唐安华　黄龙如
熊曾润　戴佳珉

北京师范大学出版社
·北京·

市场营销部电话　010-58808015　58804236
教材发展部电话　010-58802783
教材服务部电话　010-58802814
邮 购 科 电 话　010-58808083
传　　　　　真　010-58802838
编 辑 部 电 话　010-58802811　58802833
电 子 邮 箱　shuxue3@bnup.com.cn

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
出 版 人：赖德胜
印　　刷：涿州市星河印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：210 mm × 297 mm
印　　张：3.25
字　　数：83千字
版　　次：2007年5月第2版
印　　次：2007年6月第1次印刷
定　　价：3.05元
ISBN 978-7-303-08186-8

责任编辑：邢自兴　　装帧设计：高　霞
责任校对：陈　民　　责任印制：吕少波　杨　岳

前言

你们将进入更加丰富多彩的数学世界.

你们将学到更多重要和有趣的数学知识、技能及应用.

你们将更多地感受到深刻的数学思想和方法.

你们将进一步体会数学对发展自己思维能力的作用，体会数学对推动社会进步和科学发展的意义，体会数学的文化价值.

你们正在长大，需要考虑自己未来的发展. 要学习的东西很多，高中数学的内容都是基础的，时间有限，选择能力是很重要的，你们需要抓紧时间选择发展的方向，选择自己感兴趣的专题，这是一种锻炼.

在高中阶段，学习内容是很有限的. 中国古代有这样的说法：“授之以鱼，不如授之以渔”，学会打鱼的方法比得到鱼更重要. 希望同学们不仅关注别人给予你们的知识，更应该关注如何获得知识. 数学是提高“自学能力”最好的载体之一.

在数学中，什么是重要的（What is the key in Mathematics）？20世纪六七十年代，在很多国家都讨论了这个问题. 大部分人的意见是：问题是关键（The problem is the key in Mathematics）. 问题是思考的结果，是深入思考的开始，“有问题”也是创造的开始. 在高中数学的学习中，同学们不仅应提高解决别人给出问题的能力，提高思考问题的能力，还应保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，养成“问题意识”和交流的习惯，这对你们将来的发展是非常重要的.

在学习数学中，有时会遇到一些困难，树立信心是最重要的. 不要着急，要有耐心，把基本的东西想清楚，逐步培养自己对数学的兴趣，你会慢慢地喜欢数学，她会给你带来乐趣.

本套教材由26册书组成：必修教材有5册；选修系列1有2册，选修系列2有3册，它们体现了发展的基本方向；选修系列3有6册，选修系列4有10册，同学们可以根据自己的兴趣选修其中部分专题. 习题分为三类：一类是可供课堂教学使用的“练习”；一类是课后的“习题”，分为A，B两组；还有一类是复习题，分为A，B，C三组.

研究性学习是我们特别提倡的. 在教材中强调了问题提出，抽象概括，分析理

解，思考交流等研究性学习过程. 另外，还专门安排了“课题学习”和“探究活动”.

“课题学习”引导同学们递进地思考问题，充分动手实践，是需要完成的部分.

在高中阶段，根据课程标准的要求，学生需要至少完成一次数学探究活动，在必修课程的每一册书中，我们为同学们提供的“探究活动”案例，同学们在教师的引导下选做一个，有兴趣也可以多做几个，我们更希望同学们自己提出问题、解决问题，这是一件很有趣的工作.

同学们一定会感受到，信息技术发展得非常快，日新月异，计算机、数学软件、计算器、图形计算器、网络都是很好的工具和学习资源，在条件允许的情况下，希望同学们多用，“技不压身”. 它们能帮助我们更好地理解一些数学的内容和思想. 教材中有“信息技术建议”，为同学们使用信息技术帮助学习提出了一些具体的建议；还有“信息技术应用”栏目，我们选取了一些能较好体现信息技术应用的例子，帮助同学们加深对数学的理解. 在使用信息技术条件暂时不够成熟的地方，我们建议同学们认真阅读这些材料，对相应的内容能有所了解. 教材中信息技术的内容不是必学的，仅供参考.

另外，我们还为同学们编写了一些阅读材料，供同学们在课外学习，希望同学们不仅有坚实的知识基础，而且有开阔的视野，能从数学历史的发展足迹中获取营养和动力，全面地感受数学的科学价值、应用价值和文化价值.

我们祝愿同学们在高中数学的学习中获得成功.

严士健　王尚志

目　录

第一章　不等关系与基本不等式

我们知道，和等量关系一样，不等量关系也是现实世界中存在着的基本数学关系，在数学研究和数学应用中起着重要作用. 因而，不等式是数学中的一类重要的研究对象和解决问题的重要工具，利用它可以研究一些数学问题，解决很多生活中的实际问题. 这一章我们将在回顾和复习不等式的基本性质以及基本不等式的基础上，了解证明不等式的基本方法，为以后的学习作好准备.

§1　不等式的性质

1.1　实数大小的比较

我们知道，任意两个实数 a，b 总可以比较大小，要么 $a>b$，要么 $a=b$，要么 $a<b$. 因为实数与数轴上的点是一一对应的，所以实数的大小关系可以通过数轴上相应点的位置来确定，例如，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b（如图 1-1 所示）.

图 1-1

若 $a>b$，则点 A 在点 B 的右边；反之，若点 A 在点 B 的右边，则 $a>b$；

若 $a=b$，则 A 与 B 表示同一点；

若 $a<b$，则点 A 在点 B 的左边；反之，若点 A 在点 B 的左边，则 $a<b$.

我们还知道，两个数的不等关系也可以通过运算来表示：

$$\boxed{\begin{aligned} a>b &\Leftrightarrow a-b>0;\\ a<b &\Leftrightarrow a-b<0;\\ a=b &\Leftrightarrow a-b=0. \end{aligned}}$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了.

此外，当 $a>0$，$b>0$ 时，我们还可以用求商的方法来比较两个实数的大小，这就是：

当$a>0, b>0$时，

$$\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b;$$

$$\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b;$$

$$\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b.$$

例 1　比较$(3x-2)(x+1)$与$(2x+5)(x-1)$的大小.

解　$(3x-2)(x+1)-(2x+5)(x-1)$

$=(3x^2+x-2)-(2x^2+3x-5)$

$=x^2-2x+3$

$=(x-1)^2+2>0.$

所以　$(3x-2)(x+1)>(2x+5)(x-1).$

例 2　已知 $a>0, b>0$，试比较 $a^b b^a$ 与 $a^a b^b$ 的大小.

解　因为　$a>0, b>0$，所以　a^b, b^a, a^a, b^b 均大于 0.

$$\frac{a^a b^b}{a^b b^a}=a^{a-b}b^{b-a}=a^{a-b}b^{-(a-b)}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1, a-b>0$，故$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，此时$a^b b^a<a^a b^b$；

当 $a=b\neq 0$ 时，显然 $a^b b^a=a^a b^b$；

当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1, a-b<0$，故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，此时 $a^b b^a<a^a b^b$.

综上所述，对于任意 $a>0, b>0$，总有 $a^b b^a\leqslant a^a b^b$.

练　习

1. 比较$(a+1)(a^2-a+1)$与$(a-1)(a^2+a+1)$的大小.
2. 设 $x\neq 0$，求证：$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.
3. 比较$(2x+5)(3x-4)$与$(3x-5)(2x+4)$的大小.

1.2　不等式的性质

由我们学过的一些不等式，容易概括出不等式的下列性质：

性质 1　如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$.

性质 2　如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$.

性质 3　如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

性质 3 说明,不等式的两边都加上同一个实数,所得不等式与原不等式同向.

利用性质 3 可以得到:

如果 $a+b>c$,那么 $a>c-b$.

也就是说,不等式中任何一项改变符号后,可以把它从不等式一边移到另一边.

推论　如果 $a>b,c>d$,那么 $a+c>b+d$.

证明　因为 $a>b$,

所以　$a+c>b+c$.　①

因为　$c>d$,

所以　$b+c>b+d$.　②

由①②得　$a+c>b+d$.

性质 4　如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b$, $c<0$,那么 $ac<bc$.

推论 1　如果 $a>b>0,c>d>0$,那么 $ac>bd$.

证明　因为 $a>b,c>0$,由性质 4 可得 $ac>bc$;

同理,因为 $c>d,b>0$,所以有 $bc>bd$.

于是,由性质 2 可知 $ac>bd$.

在推论 1 中,若 $c=a,d=b$,可得

推论 2　如果 $a>b>0$,那么 $a^2>b^2$.

一般地,可以得到

推论 3　如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n$(n 为正整数).

推论 4　如果 $a>b>0$,那么 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$($n$ 为正整数).

这三个推论均可证明.

思考交流

如果 $ac>bc$,是否一定能得出 $a>b$?

例 1　已知 $a>b,c<d$,求证 $a-c>b-d$.

证明　因为 $c<d$,两边同乘-1,得$-c>-d$.

因为　$a>b$,所以　$a+(-c)>b+(-d)$,即　$a-c>b-d$.

例 2　已知$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{4}$,求 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

解 因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{4}$，

由性质3的推论，得 $\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，

即 $-\frac{\pi}{6}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{4}$，这是 $\alpha+\beta$ 的取值范围.

由性质4可得 $-\frac{\pi}{4}<-\beta<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)<\alpha+(-\beta)<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，

即 $-\frac{\pi}{12}<\alpha-\beta<\frac{5\pi}{6}$，这是 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

思考交流

1. 如果 $a^2>b^2$，是否一定能得出 $a>b$？为什么？
2. 如果 $a>b$，是否一定能得出 $a^2>b^2$？为什么？

练　习

1. 设 $a>b>0$，求证：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.
2. 若 $a>b$，$c<d$，试比较 $2a-3c$ 与 $2b-3d$ 的大小.
3. 如果 $mx-n^3<nx-m^3$，且 $m<n$，求证：$x>-(m^2+mn+n^2)$.

习 题 1—1

A 组

1. 设 $a>b>c>0$，

   (1)把 ab，bc，ca 按从大到小的顺序排成一列；

   (2)把 $\frac{1}{ab}$，$\frac{1}{bc}$，$\frac{1}{ca}$ 按从大到小的顺序排成一列.
2. 若 $a+b<0$，$b>0$，试把 a，$-a$，b，$-b$ 按从小到大的顺序排成一列.
3. 试比较 x^2+4 与 $4x$ 的大小.
4. 甲、乙两家旅行社对家庭旅游实行优惠政策，甲旅行社提出：如果户主买一张全票，那么其余家庭成员都可以享受五五折优惠. 乙旅行社提出：家庭旅游按照集体票计算，一律按七五折优惠. 如果这两家旅行社的原票价相同，那么哪家旅行社的家庭旅游价格更优惠呢？
5. 设 $x\geqslant 1$，求证：$x^3\geqslant x^2-x+1$.
6. 设 $a>b$，$c>d$，$x>0$，求证：$d-ax<c-bx$.

7. 求证：

(1)若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$；

(2)若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

8. 若 $8<x<12$，$2<y<10$，求 $x+y$，$x-y$ 及 $\frac{x}{y}$ 的取值范围.

9. 证明：

(1)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$；

(2)不等式性质 4 的推论 3.

B 组

1. 如果 $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}$，那么，从 $b<d$ 能否推出 $a>c$？并且加以讨论.

2. 利用不等式性质 4 的推论 1 证明：如果 a,b,c,d 都是正数，且 $a>b$，$c<d$，那么 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

3. 设 $a>0$，$b>0$，$c>0$，$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$，且 a,b,c 满足 $a+b>c$，求证：

$$a^3+b^3+c^3+3abc>2(a+b)c^2.$$

4. 证明不等式性质 4 的推论 4.

§2 含有绝对值的不等式

2.1 绝对值不等式

设 a 是任意一个实数，在数轴上 $|a|$ 表示实数 a 对应的点与原点 O 的距离，$|x-a|$ 的几何意义是实数 x 对应的点与实数 a 对应的点之间的距离.

因为 $|x+a|=|x-(-a)|$，所以 $|x+a|$ 的几何意义是实数 x 对应的点与实数 $-a$ 对应的点之间的距离.

定理 对任意实数 a 和 b，有

$$\boxed{|a+b|\leqslant|a|+|b|.}$$

下面我们用几何和代数的不同方法证明这个定理.

证法一 在数轴上，$|a+b|$ 表示实数 a 对应的点（记为 A）与实数 $-b$ 对应的点（记为 B）的距离 AB，$|a|$ 表示点 A 与原点 O 的距离 AO，$|b|$ 表示原点 O 与点 B 的距离 OB. 根据“平面上（包括数轴）的任意三点所连成的三条线段中，任何两条线段的长度之和不小于第三条线段的长度”可知

$$AB\leqslant AO+OB,$$

于是，得到

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证法二 因为 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，

所以 $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$，

即 $$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

思考交流

1. 当 a，b 满足什么条件时，上述定理中的不等式等号成立？
2. 在上述定理中，以 $-b$ 代替 b，将得到怎样的结论？
3. 设 a，b 是任意实数，求证：$|a|-|b|\leqslant|a+b|$.

利用上述定理,可以证明许多含有绝对值的不等式.

例 1　求证:对任意实数 a,b,c,有 $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

证明　记 a,b,c 分别对应数轴上的 A,B,C 三点,则 $AB=|a-b|$, $AC=|a-c|$, $CB=|c-b|$,根据"平面上(包括数轴)的任意三点所连成的三条线段中,任何两条线段的长度之和不小于第三条线段的长度"可知

$$AB\leqslant AC+CB,$$

即

$$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|.$$

根据上面所证明的定理,本题还可以这样证明

$|a-b|=|(a-c)+(c-b)|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

例 2　若 $|A-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}$,求证:$|(A+B)-(a+b)|<\varepsilon$.

证明　$|(A+B)-(a+b)|=|(A-a)+(B-b)|\leqslant$

$$|A-a|+|B-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

例 3　设 $a\neq0$,求证:$\frac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$.

> **问题与思考**
>
> 试讨论例 3 中等号成立的条件.

证明　分两种情况:

(1) $|a|\leqslant|b|$,结论显然成立.

(2)当 $|a|>|b|$ 时

因为
$$\begin{aligned}|a^2-b^2|&\geqslant|a^2|-|b^2|\\&=|a|^2-|b|^2\\&=(|a|+|b|)(|a|-|b|)\\&\geqslant|a|(|a|-|b|),\end{aligned}$$

所以 $\frac{|a^2-b^2|}{|a|}\geqslant|a|-|b|$.

练　习

1. 求证:$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|$.
2. 已知 $|x|<\frac{a}{4}$, $|y|<\frac{a}{6}$,求证:$|2x-3y|<a$.
3. 已知 $|x-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|y-B|<\frac{\varepsilon}{2}$,求证:$|(x-y)-(A-B)|<\varepsilon$.

2.2 绝对值不等式的解法

例 4 解不等式 $|x-3|\leqslant 2$.

解法一 原不等式可化为 $-2\leqslant x-3\leqslant 2$.

即 $\begin{cases} x-3\geqslant -2, & ① \\ x-3\leqslant 2. & ② \end{cases}$

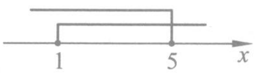

图 1-2

解不等式①，可得解集 $\{x|x\geqslant 1\}$，解不等式②，可得解集 $\{x|x\leqslant 5\}$，如图 1-2 所示.

所以，原不等式的解集是 $\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$.

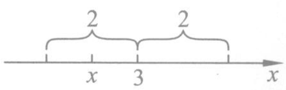

图 1-3

解法二 这个不等式解的几何意义是：在数轴上，到实数 3 对应的点的距离小于或等于 2 的点，如图 1-3 所示. 也可以说，这些点都在以实数 3 对应的点为圆心，2 为半径的圆内或圆上.

所以，这个不等式的解为 $3-2\leqslant x\leqslant 3+2$，即 $1\leqslant x\leqslant 5$，

从而，原不等式的解集是 $\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$.

例 5 解不等式 $|3-2x|\leqslant 5$.

解 原不等式可化为 $-5\leqslant 3-2x\leqslant 5$，

即 $\begin{cases} 3-2x\geqslant -5, & ① \\ 3-2x\leqslant 5. & ② \end{cases}$

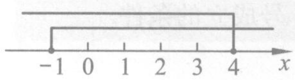

图 1-4

解不等式①，可以得到解集 $\{x|x\leqslant 4\}$，解不等式②，可以得到解集 $\{x|x\geqslant -1\}$，如图 1-4 所示.

所以，原不等式的解集是 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$.

从以上的例子可以看到：解含有绝对值的不等式，关键在于利用绝对值的意义设法去掉绝对值符号，把它转化为一个或几个普通不等式或不等式组. 掌握了这一点，就不难解其他一些较复杂的含有绝对值的不等式.

例 6 解不等式 $|x+1|+|x-2|\geqslant 5$.

解 这个不等式解的几何意义是：数轴上到 -1 对应的点的距离与到 2 对应的点的距离之和不小于 5 的点.

图 1-5

因为 -1 与 2 对应的点之间的距离是 3，$3<5$，从图 1-5 可见，-2对应的点到 -1 与 2 对应的点的距离之和等于 5，3 对应的点到最小 -1与 2 对应的点的距离之和也等于 5. -1 左侧的点以及 3 右侧

的点到-1与2对应的点的距离之和都大于5.

所以不等式的解集是$\{x\mid x\leqslant -2$或$x\geqslant 3\}$.

思考交流

你能否根据绝对值的意义解例6.

练　习

解下列不等式：

(1) $4|3x-1|-1\leqslant 0$；　　(2) $2|2x-1|>1$；

(3) $|x-1|+|x-3|\leqslant 4$；　　(4) $|x+10|-|x-2|\geqslant 8$.

习题1—2

A　组

1. 求证：

(1) $|a+b|+|a-b|\geqslant 2|a|$；　　(2) $|a+b|-|a-b|\leqslant 2|b|$.

2. (1) 已知$|x-A|<r$，求证：$|x|<|A|+r$；

(2) 已知$|x-A|<c$，$|y-A|<c$，求证：$|x-y|<2c$.

3. 已知$|x-a|<1$，求证：$|(x^2-x)-(a^2-a)|<2(|a|+1)$.

4. 证明不等式：$\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

5. 解下列不等式：

(1) $|2-3x|<\dfrac{1}{2}$；　　(2) $|4x+3|-11\leqslant 0$；

(3) $|2x+5|\geqslant 7$；　　(4) $2|3x-1|-5\geqslant 0$；

(5) $|x-1|+|x+2|\geqslant 4$.

B　组

1. 解不等式$|x+19|-|x-98|\leqslant 100$.

2. 求使不等式$\left|\dfrac{3n}{n+1}-3\right|<\dfrac{1}{100}$成立的最小正整数$n$.

3. 解不等式$|2x+1|+|3x-2|\geqslant 5$.

§3 平均值不等式

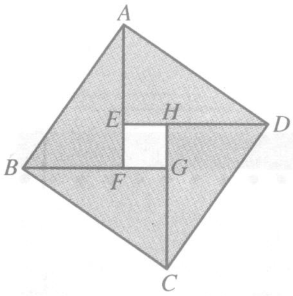

图 1-6

图 1-6 是 2002 年北京国际数学家大会的会徽图，它由 4 个全等的直角三角形拼接而成.

令 $AF=a, BF=b$，则 $AB^2=a^2+b^2$，而 $S_{正方形ABCD} \geqslant 4S_{\triangle ABF}$，

即 $a^2+b^2 \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b$，所以 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

当 $AF=BF$ 时，正方形 $EFGH$ 缩为一点，$S_{正方形ABCD}=4S_{\triangle ABF}$.

于是，我们得到如下结论：

定理 1 对任意实数 a,b，有 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$，(此式当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

这个定理我们也可以通过不等式 $(a-b)^2 \geqslant 0$ 得到.

由定理 1 还可以推得：

定理 2 对任意两个正数 a,b，有 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (此式当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

证明 由定理 1 有 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2 \geqslant 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$，

所以 $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$，

即 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

显然，此式当且仅当 $a=b$ 时取"="号.

我们称 $\frac{a+b}{2}$ 为正数 a 与 b 的算术平均值，$\sqrt{ab}$ 为正数 a 与 b 的几何平均值. 因此，定理 1 又可叙述为：两个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

思考交流

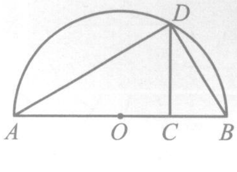

图 1-7

试根据图 1-7 给出定理 1 的几何解释.

例 1 设 a,b,c 为任意实数，求证：$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$，此式当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号.

证明　由定理1可知，$a^2+b^2\geqslant 2ab$，

$$b^2+c^2\geqslant 2bc,$$

$$c^2+a^2\geqslant 2ca.$$

以上三式当且仅当 $a=b=c$ 时同时取“$=$”号. 将这三个同向不等式的两边分别相加，得

$$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca),$$

所以　$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$

此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号.

定理3　对任意三个正数 a,b,c，有 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号）.

证明　因为对任意两个正数 a,b，如果 $a>b$，那么 $a^2>b^2$；如果 $a<b$，那么 $a^2<b^2$. 这说明 $(a-b)$ 与 (a^2-b^2) 同号，所以有

$$(a-b)(a^2-b^2)\geqslant 0,$$

即　$a^3+b^3-(ab^2+ba^2)\geqslant 0$，

所以　$a^3+b^3\geqslant ab^2+ba^2$，

同理　$b^3+c^3\geqslant bc^2+cb^2$，

$c^3+a^3\geqslant ca^2+ac^2$.

将这三个同向不等式的两边分别相加，可得

$$\begin{aligned}2(a^3+b^3+c^3)&\geqslant a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\\&\geqslant a\cdot 2bc+b\cdot 2ca+c\cdot 2ab\\&=6abc,\end{aligned}$$

所以　$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$

显然，此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号.

> **问题与思考**
>
> 你可以用其他方法证明这个定理吗？

定理4　对任意三个正数 a,b,c，有 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号）.

证明　由定理2可得 $(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3\geqslant 3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$，

从而　$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，

即　$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$

显然，此式当且仅当 $a=b=c$ 时取“$=$”号.

类似于定理1，我们可以将定理2叙述为：三个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.