全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

高等数学

（上册）

主编　邱雨生　白秀琴

煤炭工业出版社

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

高 等 数 学

（上　册）

主编　邱雨生　白秀琴

煤 炭 工 业 出 版 社

·北　京·

内 容 提 要

本书是全国煤炭高职高专“十一五”规划教材之一.

《高等数学》分为上、下两册. 上册共六章，主要内容包括函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分和定积分及其应用等. 下册共六章，主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程与拉氏变换、数学实验与数学建模等.

本书是高等职业教育和高等专科教育“高等数学”课程的通用教材，也可作为成人教育和函授教育高等数学课程的教学用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/邱雨生，白秀琴主编. —北京：煤炭工业出版社，2007.8

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5020-3126-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①邱… ②白… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 091596 号

煤炭工业出版社 出版
（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）
网址：www.cciph.com.cn
环球印刷（北京）有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 13½
字数 316 千字 印数 1—5,000
2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷
社内编号 5927 定价 20.00 元

全国煤炭高职高专基础课程类“十一五”规划教材

编审委员会

前　言

本书是全国煤炭高职高专“十一五”规划教材之一.

本教材根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《教育部关于加强高职高专教育专业人才培养工作的意见》,并结合煤炭行业高职高专的教育特色的实际情况而编写.

在本教材的编写过程中,重点体现以下指导思想:突出“以应用为目的,以必需、够用为度”的高等职业教育特色;遵循“突出思想分析,立足能力培养,强化动手技能,解决实际问题”的原则;在保证科学性的基础上,力求讲清概念,减少理论求证;注重学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力以及理论联系实际能力的培养;强调数学学科与相关学科之间的横向联系,力求做到立足实践与应用,拓宽基础知识面,使一般能力的培养与职业能力相结合,努力适应工科高职高专教学需求.

为了培养和启迪学生思维空间的发展及应用现代科学工具,本教材编写了数学实验与数学建模基本知识.

参加本书编写的人员有:辽宁工程技术大学职业技术学院邢亚军(第一章),河南理工大学职业技术学院李海清(第二章)、邱雨生(第三章),平顶山工业职业技术学院白永丽(第四章)、白秀琴(第三章)、杨宝玉(第六章).邱雨生、白秀琴任主编,李海清、邢亚军任副主编.

北京工业职业技术学院的吴翠兰老师审阅了本书,并提出了许多宝贵意见.

在此,谨向在本书编写出版过程中,进行指导、参加审稿、提供帮助和支持的所有同志及单位,致以衷心的感谢!

由于编者的水平有限,编写时间仓促,书中不足之处肯定不少,错误之处也在所难免,恳请专家、同行和读者批评指正,以待本书在教学实践中不断完善,并再版时修正.

编　者

2007 年 5 月

目 录

第一章 函数及其图形……(1)
第一节 集合……(1)
第二节 函数……(5)
第三节 函数的几种特性……(8)
第四节 初等函数……(10)
第五节 建立函数关系式举例……(14)
复习题一……(16)
第二章 极限与连续……(21)
第一节 数列极限的概念与性质……(21)
第二节 函数的极限……(27)
第三节 无穷小与无穷大……(33)
第四节 极限的运算法则……(37)
第五节 极限存在准则与两个重要极限……(42)
第六节 无穷小的比较……(48)
第七节 函数的连续性与间断点……(52)
第八节 连续函数的运算与初等函数的连续性……(57)
第九节 闭区间上连续函数的性质……(60)
复习题二……(63)
第三章 导数与微分……(66)
第一节 导数的概念……(66)
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则……(73)
第三节 反函数与复合函数的导数……(77)
第四节 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数……(82)
第五节 高阶导数……(88)
第六节 微分及其应用……(92)
复习题三……(99)
第四章 中值定理与导数的应用……(102)
第一节 中值定理……(102)
第二节 洛必达法则……(106)
第三节 函数单调性、凹凸性和拐点……(109)
第四节 函数的极值与最值……(113)

第五节　函数图形的描绘 …… (117)
第六节　曲率* …… (119)
复习题四 …… (123)
第五章　不定积分 …… (125)
第一节　不定积分的概念与性质 …… (125)
第二节　换元积分法 …… (130)
第三节　分部积分法 …… (138)
第四节　两类初等可积函数的积分 …… (142)
复习题五 …… (147)
第六章　定积分及其应用 …… (149)
第一节　定积分的概念与性质 …… (149)
第二节　微积分基本定理 …… (156)
第三节　定积分的换元积分法和分部积分法 …… (161)
第四节　定积分的应用 …… (167)
第五节　广义积分 …… (175)
复习题六 …… (179)
附录　初等数学中的常用公式 …… (183)
学习提要 …… (186)
习题参考答案 …… (190)
主要参考文献 …… (208)

第一章　函数及其图形

本章是在中学学习函数知识的基础上，对函数的进一步学习和总结．先简要介绍集合的概念，再以集合论的观点给出函数的定义，然后着重讨论函数的特性、基本初等函数、复合函数、初等函数及其图形等．

第一节　集　　合

一、集合的概念

下面先考察以下几类事物和对象：

(1) 0,1,4,7 四个数字；

(2) 在同一平面内到两定点距离相等的所有点；

(3) 所有等腰三角形；

(4) 某学院全体学生；

(5) 某图书馆全部藏书．

它们分别是由一些具有相同属性的事物或对象所构成的各自的“全体”或“总体”．具有某种特定属性的对象所组成的总体称做集合(简称集)．把组成集合的每一个对象称做这个集合的元素．

对于一个给定的集合，它的元素有以下三个特征．

(1) 确定性：集合中的元素是确定的．

(2) 互异性：集合中的元素都是不同的对象，当两个相同的对象归入同一个集合时，只能算作这个集合的一个元素，一个集合的元素是不允许重复的．

(3) 无序性：就是说，对于一个给定的集合，集合中的各个元素间不考虑其顺序关系．

一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．用“$a\in A$”表示 a 是集合 A 的元素或说“a 属于 A”，用“$a \notin A$”表示 a 不是集合 A 的元素或说“a 不属于 A”．属于关系是元素与集合之间的关系，故属于符号“$\in$”两边就分别是元素和集合．

含有有限个元素的集合称做有限集；含有无限个元素的集合称做无限集；只含有一个元素的集合称做单元素集；不含任何元素的集合称做空集，空集用符号“Φ”表示．例如，只由 0,1,4,7 四个元素组成的集合是有限集；全体自然数组成的集合是无限集；方程 $x^2+1=0$，在实数范围内的解的集合是空集 Φ．

元素为数的集合称做数集．常见的数集有：全体非负整数组成的集合称做自然数集，通常记作 $\mathbf{N}$；全体整数组成的集合称做整数集，通常记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数组成的集合称做有理数集，通常记作 $\mathbf{Q}$；全体实数组成的集合称做实数集，通常记作 $\mathbf{R}$．另外，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集；

$\mathbf{Z}^-$ 表示负整数集；$\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集；$\mathbf{Q}^-$ 表示负有理数集；$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集；$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集.

集合的表示法有列举法和描述法. 把集合中的元素一一列举出来，并记在{}内，这种表示集合的方法称做列举法. 如方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的集合是$\{2,3\}$. 把集合中所包含元素的共同特性，用描述性短语或数学表达式写在{}内，这种表示集合的方法称做描述法. 如$\{x \mid x^2-5x+6=0\}$.

例 1 用列举法或描述法表示下列集合，并判断它们是有限集还是无限集.

(1) 大于 2 且小于 12 的偶数； (2) 由全体正奇数组成的集合；

(3) 方程 $x^2-x-2=0$ 的解集.

解 (1) 用描述法表示为

$$\{\text{大于 2 且小于 12 的偶数}\}\text{或}\{x \mid x=2n, 1<n<6, n\in\mathbf{N}\},$$

用列举法表示为

$$\{4,6,8,10\},$$

该集合为有限集；

(2) 用描述法表示为

$$\{\text{全体正奇数}\}\text{或}\{x \mid x=2n+1, n\in\mathbf{N}\},$$

用列举法表示为

$$\{1,3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots\},$$

该集合为无限集；

(3)用描述法表示为

$$\{x \mid x^2-x-2=0\},$$

用列举法表示为

$$\{-1,2\},$$

该集合为有限集.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，这时集合 A 称做集合 B 的子集，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A". 包含关系是集合与集合之间的一种关系，故包含关系符号两边就都是集合.

根据子集的概念可得，任何一个集合 A 都是它自身的子集，即

$$A\subseteq A.$$

如果 A 是 B 的子集，并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A，那么 A 称做 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

通常用圆或封闭曲线来形象的表示集合，用封闭曲线内部的点表示该集合的元素(图 1－1). 这样的图形称做文氏图. 图 1－2 表示 A 是 B 的真子集.

还规定：空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，所以对任何集合 A，有 $\Phi\subseteq A$.

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

例 2 写出$\{1,2,3\}$的所有子集与真子集.

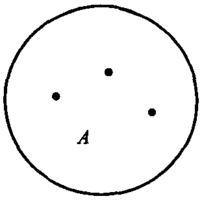

图 1-1

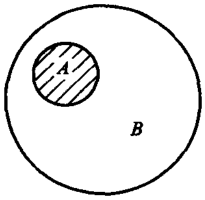

图 1-2

解 $\{1,2,3\}$的所有子集是Φ、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$. 其中,除了$\{1,2,3\}$以外的子集都是$\{1,2,3\}$的真子集.

二、集合的运算

设A、B是两个集合,由属于集合A或集合B的一切元素组成的集合,称做集合A与B的并集,记作$A\cup B$,读作"A并B",即$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$. 并集可用图1-3的阴影部分来表示.

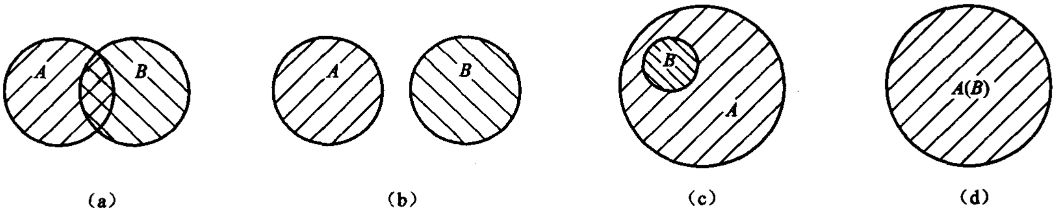

图 1-3

由并集定义可得,对任何一个集合A都有$A\cup A=A$,$A\cup\Phi=A$,对于集合A、B和C有$A\cup B=B\cup A$(交换律),$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$(结合律).

求集合并集的运算称做并运算.

例 3 设$A=\{0,1,2\}$,$B=\{-1,1\}$,求$A\cup B$.

解 $A\cup B=\{0,1,2\}\cup\{-1,1\}=\{-1,0,1,2\}$.

例 4 设$A=\{x\mid 0<x<3\}$,$B=\{x\mid 1<x<5\}$,求$A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x\mid 0<x<3\}\cup\{x\mid 1<x<5\}=\{x\mid 0<x<5\}$,如图1-4所示.

设A、B是两个集合,把属于集合A且属于集合B的所有元素组成的集合,称做集合A与集合B的交集,记作$A\cap B$,读作"A交B",即$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$,如图1-5所示.

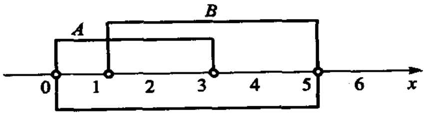

图 1-4

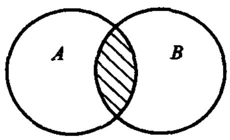

图 1-5

由交集定义可得,对于任何一个集合A都有$A\cap A=A$,$A\cap\Phi=\Phi$,对于集合A、B和C有$A\cap B=B\cap A$(交换律),$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(结合律),$(A\cap B)\cup C=(A\cup$

$C)\cap(B\cup C)$、$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$分配律.

求集合交集的运算称做交运算.

例5 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{b,c,d\}$,求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{a,b,c\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c\}$.

例6 设 $A=\{x\mid -3<x<2\}$,$B=\{x\mid -1<x<4\}$,求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x\mid -3<x<2\}\cap\{x\mid -1<x<4\}=\{x\mid -1<x<2\}$,如图 1－6 所示.

研究集合与集合的关系时,常遇到一些集合是某一个给定集合的子集,这个给定的集合称做全集,用 Ω 表示. 也就是说,全集包含了所要研究的各个集合的全部元素.

对于全集 Ω,集合 A 是 Ω 的子集,即 $A\subseteq\Omega$,由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合,称做集合 A 在 Ω 中的补集,记作 $\overline{A}$,读作"A 补",即 $\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega,且\ x\notin A\}$. 补集可用图 1－7 阴影部分表示.

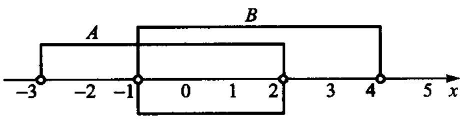

图 1－6

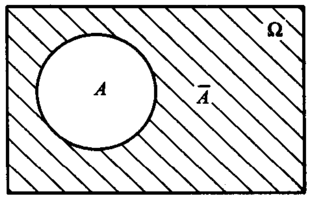

图 1－7

由定义可知 $\overline{\Omega}=\Phi$,$\overline{\Phi}=\Omega$.

求集合补集的运算称做补运算.

例7 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A=\{1,3,5\}$,求 $\overline{A}$.

解 $\overline{A}=\{2,4,6,7,8\}$.

例8 设 $\Omega=\{三角形\}$,$A=\{直角三角形\}$,求 $\overline{A}$.

解 $\overline{A}=\{斜三角形\}$.

习题 1－1

1. 用列举法或描述法表示下列集合,指出哪些集合是有限集,哪些集合是无限集?

(1) 能整除 15 的整数;(2) 方程 $x^2-5x+4=0$ 的解;(3) 不等式 $x^2+5x+6>0$ 的解;

(4) 大于 3 的偶数; (5) 方程 $3x+y=11$ 的解.

2. 写出集合$\{a,b,c\}$的全部真子集.

3. (1) 设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$;

(2) 设 $A=\{x\mid x<5\}$,$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$;

(3) 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+2y=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$,求 $A\cap B$.

4. 设 $A=\{x\mid -2<x<1\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$.

5. (1) 设 $\Omega=\{x\mid 1<x<10,x\in\mathbf{N}\}$,$A=\{2,3\}$,求 $\overline{A}$;

(2) 设 $\Omega=\mathrm{R}$,$A=\{无理数\}$,求 $\overline{A}$.

6. (1) 设 $\Omega=\{小于 9 的正整数\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$,$\overline{A}$,$\overline{B}$,$\overline{A}\cap\overline{B}$,$A\cap\overline{B}$;

(2) 设 $\Omega=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid -3<x<2\}$,$B=\{x\mid -1<x<5\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$,$\overline{A}$,$\overline{B}$,$\overline{A}\cap B$ 和 $\overline{A}\cap\overline{B}$.

7. 设全集 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$,集合 $M=\{1,3,5,6\}$,$N=\{2,4,6,7\}$,$P=\{3,4,8,10\}$.

求：(1) $M\cup N$；(2) $M\cap N$；(3) $(M\cap N)\cup P$；(4) $\overline{M}\cap P$；(5) $\overline{M\cap N}$；(6) $\overline{N}\cap P$.

8. 设全集 $\Omega=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$，$B=\{x\mid |x|<2\}$.

求：(1) $A\cap B$；(2) $A\cup B$；(3) $\overline{A}$；(4) $\overline{B}$；(5) $\overline{A}\cap B$；(6) $\overline{A}\cup B$.

第二节　函　　数

一、函数的概念

定义　设 D 是一个实数集，如果对于 D 上的每一个 x，按照某种对应关系 f，y 都有唯一确定的值和它对应，y 就称做定义域在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 称做自变量，D 称做函数的定义域，当自变量 x 在定义域 D 内取定值 x_0 时，x_0 所对应的函数 y 的值称做 x_0 的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中所有值时，所得函数值的集合 M 称做函数的值域.

例如，一次函数 $y=2x-1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，因为对于 $x\in\mathbf{R}$ 的每一个值，按照"2 乘 x 减 1"的对应关系，y 都有确定的值和 x 对应，所以 $y=2x-1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的 x 的一个函数.

如果同时研究两个或两个以上的函数，一定要用不同的符号表示不同的函数. 除 $f(x)$ 外，还常用 $F(x)$、$G(x)$、$g(x)$ 等.

例 1　设 $f(x)=2x^2-x-1$，求 $f(-1)$、$f(0)$、$f(\sqrt{2})$、$f(a)$、$f(2t-1)$.

解　$f(-1)=2\times(-1)^2-(-1)-1=2$；$f(0)=2\times0^2-0-1=-1$；

$$f(\sqrt{2})=2\times(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}-1=3-\sqrt{2}；\ f(a)=2a^2-a-1；$$

$$f(2t-1)=2(2t-1)^2-(2t-1)-1=8t^2-10t+2.$$

例 2　设函数 $f(x)=\begin{cases}-2x-1, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x<0,\\ 2x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(-2)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 和 $f(1)$.

解　$f(-2)=-2\times(-2)-1=3$；$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$；$f(1)=2\times1+1=3$.

例 2 中的函数是分段表示的，即当自变量取值范围不同，函数的局部表达式也不同，像这样的函数称做分段函数.

由函数的定义知道，一个函数是否确定，就在于它的定义域和对应关系是否确定. 如果两个函数是相同的，那么它们的定义域和对应关系也必须是相同的，否则，就不是同一个函数. 因此，称函数的定义域和对应关系为函数的两要素.

在学习和研究实数集时，常常要用到区间的概念.

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$，集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称做从 a 到 b 的开区间，记作 (a,b).

集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称做从 a 到 b 的闭区间，记作 $[a,b]$.

集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称做从 a 到 b 的左开右闭区间，记作 $(a,b]$.

集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 称做从 a 到 b 的左闭右开区间，记作 $[a,b)$.

左开右闭区间与左闭右开区间统称为半开半闭区间，以上四种区间均称为有限区间.

符号"$-\infty$"与"$+\infty$"分别读作"负无穷大"与"正无穷大". 它们不表示数，而表示变量分别沿负或正方向无止境地变化. 符号"∞"读作无穷大，它表示某变量绝对值无止境地变大.

实数集可以表示为$(-\infty,+\infty)$;集合$\{x|x<a\}$用区间$(-\infty,a)$表示;集合$\{x|x\leqslant a\}$用区间$(-\infty,a]$表示;集合$\{x|x>b\}$用区间$(b,+\infty)$表示;集合$\{x|x\geqslant b\}$用区间$[b,+\infty)$表示;集合$\{x|x\neq a\}$用区间$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$表示. 这六种区间都称为无限区间.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 若不考虑函数的实际意义,而抽象的研究用解析式表达的函数,则规定函数的定义域是使解析式有意义的一切实数.

通常求函数的定义域应注意以下几点.

(1) 分式函数的分母不能为零.

(2) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零.

(3) 对数函数的真数必须大于零.

(4) 反正弦函数与反余弦函数的定义域为$[-1,1]$.

(5) 如果函数表达式中同时含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

通常用不等式、区间或集合形式表示定义域.

例 3 判断下列各组函数是否相同:

(1) $y=x$ 与$y=\sqrt{x^2}$;(2) $y=x$ 与$y=(\sqrt{x})^2$;(3) $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 函数 $y=x$ 与$y=\sqrt{x^2}$的定义域相同,都是$\mathbf{R}$,而函数

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

与函数 $y=x$ 在定义域内的对应关系不同,所以这两个函数不相同.

(2) 因为 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是$\{x|x\geqslant 0\}$,与函数 $y=x$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 不相同,所以这两个函数不相同.

(3) 因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,而且 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$的定义域都是$\mathbf{R}$,因此这两个函数的对应关系和定义域都是相同的,所以这两个函数相同.

例 4 求下列函数的定义域:

(1) $y=x^2-2x+3$;　　　　(2) $y=\sqrt{x+3}-\dfrac{1}{x^2-1}$.

解 (1) 函数 $y=x^2-2x+3$ 为多项式函数,当 x 取任何实数时,y 都有唯一确定的值与之对应,故所求函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 若使$\sqrt{x+3}$有意义,需 $x+3\geqslant 0$,即 $x\geqslant -3$;若使$\dfrac{1}{x^2-1}$有意义,需 $x^2-1\neq 0$,即 $x\neq\pm 1$,所以函数的定义域为$[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

二、函数的表示法

函数 $f(x)$的具体表达方式是不尽相同的,这就产生了函数的不同表示法,函数的表示法通常有三种:解析法(或公式法)、列表法(或表格法)和图像法(或图示法).

用等式来表示两个变量之间的函数关系的方法,称做解析法. 例如,$y=2x^2-x+1$,$y=\lg(x+1)$,$y=2^x$ 等都是解析法表示的函数. 解析法的优点是便于理论推导和计算.

用列表来表示两个变量之间的函数关系的方法,称做列表法. 它是将自变量的值与对应的函数值列为表格. 例如,平方根表、三角函数表、对数表、企业历年产值表等都是用列表法表示的函数. 列表法的优点是与表中列出的自变量值对应的函数值容易查得.

用图像来表示两个变量之间的函数关系的方法，称做图像法．满足 $y=f(x)$关系的点(x,y)的集合，即 $M=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$，将这些点描在平面直角坐标系中，就形成函数的图像．这种方法在工程技术上应用较普遍，它的优点是直观形象，且容易看到函数的变化趋势．

三、隐函数

用解析法表示函数可以有不同的形式．若函数 y 可以用含自变量 x 的算式表示，像 $y=\sin x$，$y=1+3x$ 等，这样的函数称为显函数，前面所遇到的大多都是显函数．

一般地，如果方程 $F(x,y)=0$ 中，令 x 在某一区间内任取一值时，相应地总有满足此方程的 y 值存在，则说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间上确定了 x 的隐函数y.

把一个隐函数化成显函数的形式，称做隐函数的显化．

四、反函数

设函数 $y=f(x)$定义域是 D，值域是 M．如果对于 M 中的每一个y值，都可以由关系式 $y=f(x)$确定唯一的 x 值($x\in D$)与之对应，从而就确定了一个以 y 为自变量的新函数 $x=\phi(y)$，这个函数 $x=\phi(y)$称做函数 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，M 是其定义域，D 是值域．

因为研究函数时，习惯上常把字母 x 作为自变量，字母 y 作为函数，所以把函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$改写成 $y=f^{-1}(x)$的形式．

例如，函数 $y=2x-1$，由解析式解出 $x=\frac{1}{2}(y+1)$．这里 $x=\frac{1}{2}(y+1)$就是 $y=2x-1$ 的反函数，但是我们却把 $x=\frac{1}{2}(y+1)$改写成 $y=\frac{1}{2}(x+1)$的形式．

把函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一个直角坐标平面上，那么这两个图形关于直线 $y=x$ 对称．

例 5　求下列函数的反函数：

(1) $y=3x+2$；　(2) $y=-x^2+1,x\in[0,\infty]$；　(3) $y=\sqrt{x}-1$；

(4) $y=\dfrac{4x+3}{x-2}$；　(5) $y=x^2,x\in(-\infty,0)$.

解　(1) 由 $y=3x+2$ 得 $x=\frac{1}{3}(y-2)$，所以函数 $y=3x+2$ 的反函数是 $y=\frac{1}{3}(x-2)$；

(2) 由 $y=-x^2+1,x\in[0,\infty]$得 $x=\sqrt{1-y}$，所以函数 $y=-x^2+1,x\in[0,\infty]$的反函数是 $y=\sqrt{1-x}$；

(3) 由 $y=\sqrt{x}-1$ 得 $x=(y+1)^2,y\in[-1,+\infty)$，所以函数 $y=\sqrt{x}-1$ 的反函数是

$$y=(x+1)^2,x\in[-1,+\infty);$$

(4) 由 $y=\dfrac{4x+3}{x-2}$得 $x=\dfrac{2y+3}{y-4}$，所以 $y=\dfrac{4x+3}{x-2}$的反函数是 $y=\dfrac{2x+3}{x-4}$；

(5) 由 $y=x^2,x\in(-\infty,0)$，得 $x=-\sqrt{y}$，所以函数 $y=x^2,x\in(-\infty,0)$的反函数是

$$y=-\sqrt{x},x\in(0,+\infty).$$

例 6　判断 $y=x^2$ 在定义域内是否有反函数．

解　由 $y=x^2$，可解出 $x=\pm\sqrt{y}$．当 y 每取一个确定的值时，x 都有 $\pm\sqrt{y}$两个值和它对应，因此不符合反函数的定义，所以 $y=x^2$ 在定义域内没有反函数．

例 6 清楚地告诉我们在求反函数时应注意的一个问题，就是在某些函数 $y=f(x)$ 中，在解出 x 后，即得出 $x=\phi(y)$ 时，其新的对应关系是 y 每取一个确定的值时，x 并不只是有唯一确定的值相对应，这样就不符合反函数的定义，因此这种函数在定义域内没有反函数．然而，若解出的 $x=\phi(y)$ 的对应关系仍然是 y 每取一个确定的值，x 只有唯一确定的值和它对应，那么这样的函数在定义域就一定有反函数．

习题 1－2

1. 将下列各表达式写成函数 $y=f(x)$ 的形式：

(1) $xy=4$；　(2) $2x+3y=6$；　(3) $y^2-8x=0(y\geqslant 0)$；

(4) $\dfrac{x+6}{3y+x}=5$；　(5) $(x-3)(y+3)=7$.

2. 已知函数 $f(x)=3x+5$，求 $f(-3)$、$f(0)$、$f(a)$ 和 $f(2a+1)$.

3. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, x<-1, \\ 1-x^2, -1\leqslant x<1, \\ -x+1, x\geqslant 1. \end{cases} \text{求 } f(-2)、f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{和 } f(2).$$

4.(1) 已知函数 $f(x)=x^2-4$，求证 $f(-m)=f(m)$；

(2) 已知函数 $f(x)=x^3+x$，求证 $f(-m)=-f(m)$.

5. 下列每一组 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是否表示同一个函数：

(1) $f(x)=1$ 与 $\phi(x)=\dfrac{x}{x}$；　(2) $f(x)=|x|^3$ 与 $\phi(x)=x^3$；

(3) $f(x)=\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+2}$ 与 $\phi(x)=\sqrt{(x-5)(x+2)}$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　(2) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{2x+7}$；　(4) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}$；

(5) $y=\sqrt{16-x^2}$；　(6) $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x-2}$；

(7) $y=\sqrt{-x^2+3x+4}$；　(8) $y=\sqrt{4-|x-3|}$.

7. 设 $f(x)=x^2-x+6$，求：

(1) $f(0)$；　(2) $f(4)$；　(3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；　(4) $f(x+1)$.

8. 已知二次函数的图像以(1,3)为顶点，并且通过点(2,5)，求这个二次函数的解析式.

第三节　函数的几种特性

一、函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subseteq D$，如果存在正数 M，使得任一 $x\in I$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 I 内有界．如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 内无界．这就是说，如

果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in I$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 I 内无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都能成立. 这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M，而 $|\sin x|\leqslant M$ 成立）. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 事实上，对于任意取定的正数 M（不妨设 $M>1$），则 $\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，当 $x_1=\dfrac{1}{2M}$ 时，$\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 值都成立.

二、函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$(a,b)\subseteq D$，任取 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；如果任取 $x_1,x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是增函数（或是减函数），则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调函数，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调区间. 函数在区间 (a,b) 内的单调增加或单调减少的性质，叫做函数的单调性.

例 1　用定义判断函数 $f(x)=-2x+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性.

解　任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，因为

$$f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1+1)-(-2x_2+1)=2(x_2-x_1)>0,$$

即

$$f(x_1)>f(x_2),$$

所以函数 $f(x)=-2x+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

三、函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（若 $x\in D$，必有 $-x\in D$），对于任意一个 $x\in D$，如果恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

又如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

函数 $y=\sin x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数，称为非奇非偶函数.

例 2　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x+\dfrac{2}{3x}$；　　(2) $f(x)=x^4-|x|+1$；

(3) $f(x)=x^2-x+1$；　　(4) $f(x)=x\sqrt{x+5}$.

解 (1)因为 $f(-x)=(-x)+\frac{2}{3(-x)}=-x-\frac{2}{3x}=-\left(x+\frac{2}{3x}\right)=-f(x)$,所以函数 $f(x)=x+\frac{2}{3x}$是奇函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)^4-|-x|+1=x^4-|x|+1=f(x)$,所以函数 $f(x)=x^4-|x|+1$ 是偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=(-x)^2-(-x)+1=x^2+x+1$,所以 $f(x)=x^2-x+1$ 既不是奇函数,也不是偶函数,为非奇非偶函数.

(4) 因为 $f(x)$的定义域是$[-5,+\infty)$,所以 $f(x)=x\sqrt{x+5}$是非奇非偶函数.

四、函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在不为零的数 T 使得对于任意的 $x\in D$,都有 $x\pm T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,其中 T 称做函数的周期. 通常,周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,$y=\tan x$、$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

习题 1-3

1. 证明函数 $f(x)=\frac{3}{x}$在$(0,+\infty)$上是减函数.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=5x$; (2) $f(x)=x^2+1$; (3) $f(x)=2x^2+2x+1$;

(4) $f(x)=x^2+x$; (5) $f(x)=\sqrt{x^2+x^{-2}}$; (6) $f(x)=x^{-1}$;

(7) $f(x)=10^x-10^{-x}$; (8) $f(x)=x^3+x$; (9) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

3.(1) 已知函数 $f(x)$是奇函数,$\phi(x)$是偶函数,求证 $f(x)\phi(x)$是奇函数;

(2) 设 $f(x)$、$g(x)$都是偶函数,证明 $f(x)g(x)$为偶函数.

4. 下列函数在指定的定义域内是否有反函数?如果有反函数,将它求出来:

(1) $y=x^2-1,x\in(-\infty,+\infty)$; (2) $y=|x|,x\in(-\infty,0]$;

(3) $y=\sqrt{x-2},x\in[2,+\infty)$; (4) $f(x)=x^2\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

(5) $f(x)=2x+1$; (6) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$.

5. 求下列函数的反函数,并写出反函数的定义域和值域:

(1) $y=5-x$; (2) $y=2x^2,x\in(0,+\infty)$; (3) $y=(x-1)^2,x\in[1,+\infty)$.

第四节 初等函数

一、基本初等函数

1. 幂函数

函数 $y=x^\mu$(μ 为常数,$\mu\in\mathbf{R}$)称做幂函数.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随μ 的取值而变化. 例如:当 $\mu=2$ 时,$y=x^2$ 和 $\mu=\frac{1}{3}$时 $y=$