全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

# 高等数学辅导讲义

GAODENG SHUXUE FUDAO JIANGYI

主编　赵达夫

★ 精选典型习题

★ 总结重点、难点

★ 附送2006、2007年高等数学考研真题及答案

2008



新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书

金榜®考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

# 高等数学辅导讲义

GAODENG SHUXUE FUDAO JIANGYI

主编　赵达夫

新华出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学辅导讲义/赵达夫主编.
北京:新华出版社,2007.3
全国硕士研究生入学考试用书
ISBN 978－7－5011－7884－1

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019610 号

## 敬告读者

本书封面有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

**高等数学辅导讲义**

---

责任编辑:白云覃
出版发行:新华出版社
地　　址:北京石景山区京原路 8 号
邮　　编:100043
经　　销:新华书店
印　　刷:北京云浩印刷有限责任公司印刷
开　　本:787mm×1092mm 1/16
印　　张:14.5
字　　数:343 千字
版　　次:2007 年 3 月第 1 版
印　　次:2007 年 3 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978－7－5011－7884－1
定　　价:20.00 元

---

本社购书热线:(010)63077122　中国新闻书店电话:(010)63072012
若有印装质量问题,请与印厂联系(010)82570560

# 前　言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生在较短的时间内全面、系统地复习有关的数学内容，我们根据教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的有关要求，结合我们多年参加数学考研及有关考试的命题、阅卷和辅导积累的经验，编写了这套数学《2008 年全国硕士研究生入学考试辅导讲义》丛书。

《高等数学辅导讲义》一书是作者多年来在全国各地考研辅导班讲课的基础上整理而成的。本书自出版、修订五年多来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本书在编写体例上有"特色"，在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂，较适合考生的需要。本书每一章由以下三部分构成：

**一、本章的重点内容与常见的典型题型**——编写这部分的目的是使广大考生明确每一章重点考的内容是什么，掌握到什么程度。在编写过程中，根据我们多年来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，便于广大考生能够正确地把握考试要求。同时根据考试大纲的要求，将概念、定理和公式、方法进行了简明扼要地叙述、归纳和总结；通过对历年试题归类分析，总结本章的常见典型题型，使考生能够在较短时间内对重点、难点、热点问题有个清楚的了解，在考试时能够拿得出、用得上，这也是区别于其他考研辅导书的一大特点。

**二、习题——填空题，选择题，解答题。**每题在内容设计上均是全优化设计，涉及两个以上知识点，题型新颖、重点类型突出。几乎涵盖新大纲所有考查知识点。我们相信通过这些试题的训练，一定会尽快提高考生的分析问题和解决问题的能力。

**三、习题的解答与分析——几乎每道题都有**：分析——该题的解题思路和解题步骤、方法；解答——该题的详细、规范解题过程；评注——该题所考查的知识点(或命题意图)，解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，拓展考生视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书最后给出四套综合练习题，每套题都有详尽的分析、解答。建议考生根据各卷种数学考试大纲要求，有选择地做题，来考查自己复习的效果。

本套书可作为参加全国硕士研究生入学考试数学一至数学四考生的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本套书也是较好的学习参考书。

在本书的编写过程中，北京交通大学的阿荣老师、刘晓老师、龚漫奇老师为本书的编写和校对付出了辛勤劳动，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者
2007 年 2 月

# 内 容 简 介

本书是工学类、经济类和管理学类硕士研究生入学考试科目“高等数学(微积分)”的复习指导书。本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的阅卷和考研辅导班的教学工作，具有丰富的教学经验，深知考生的疑难与困惑。作者把自己的教学经验结合考生与考试的实际加以细化、归纳和总结，整理成书奉献给广大读者，旨在提高考研者的数学水平与考试成绩。

本书紧扣数学考试大纲，贴近考试实际，内容丰富。全书共分十章。内容包括：函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，微分方程，微积分在经济中的应用，差分方程及附录(综合练习题)。本书结构新颖，每一章按照本章的重点内容与常见的典型题型、习题、习题的解答与分析三部分编写。概念叙述简捷，解题思路清晰，对典型题从多侧面、不同角度、用多种解法进行讲解，注意对考生基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养，是考研者较好的复习指导书和良师益友。

本书可作为硕士研究生入学考试数学一至数学四的“高等数学(微积分)”的复习指导书，对于在校的大学生、大专生及自学考试者，本书也是一本较好的学习参考用书。

编 者

2007 年 2 月

# 目　录

学习札记：

# 第一章　函数、极限与连续

## 一、本章的重点内容与常见的典型题型

1. 本章的重点内容是极限，既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件，又要能正确求出各种极限．求极限的方法很多，在考试中常用的主要方法有：

(1) 利用极限的四则运算法则及函数的连续性；

(2) 利用两个重要极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

(3) 利用洛必达法则及泰勒公式求未定式的极限；

(4) 利用等价无穷小代替(常会使运算简化)；

(5) 利用夹逼定理；

(6) 先证明数列的极限存在(通常会用到“单调有界数列必有极限”的准则)，再利用关系式求出极限；

(7) 利用定积分求某些和式的极限；

(8) 利用导数的定义；

(9) 利用级数的收敛性证明数列的极限为零．

这里需要指出的是：题型与方法并不具有确定的关系，一种题型可以有几种计算的方法，一种方法也可能用于几种题型，有时在一个题目中要用到几种方法，所以还要具体问题具体分析，方法要灵活运用．

2. 由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续、判断函数的间断点类型等问题本质上仍是求极限，因此这部分也是重点．

3. 函数这一部分，重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算．

通过历年试题归类分析，本章常见的典型题型有：

1. 直接计算函数的极限值或给定函数极限值求函数表示式中的常数；
2. 讨论函数的连续性、判断间断点的类型；
3. 无穷小的比较；
4. 讨论连续函数在给定区间的零点，或讨论方程在给定区间有无实根；
5. 求分段函数的复合函数．

## 二、习　题

**(一) 选择题**

1. 设 $f(x)=x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　)．

(A) 偶函数．　(B) 无界函数．　(C) 周期函数．　(D) 单调函数．

学习札记：

2. 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是(　　).

(A) 2.　　(B) 0.

(C) $\infty$.　　(D) 不存在但不为 $\infty$.

3. 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)dt$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价的无穷小.

4. $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 $x^2$ 高阶无穷小，则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$.　　(B) $a=1$，$b=1$.

(C) $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$.　　(D) $a=-1$，$b=1$.

5. 当 $x\to 0$ 时，下列 4 个无穷小阶数最高的是(　　).

(A) $\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2$.　　(B) $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$.

(C) $x-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x\right)\sin x$.　　(D) $e^{x^4-x}-1$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在，但不连续.

(C) 连续，但不可导.　　(D) 可导.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x\sin(t^2)dt, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在，但不连续.

(C) 连续，但不可导.　　(D) 可导.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续.　　(B) 连续但不可导.

(C) 可导但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续.　　(D) 可导且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

9. 设常数 $a_i>0\ (i=1,2,3)$，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 则方程 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$(　　).

(A) 没有根.　　(B) 正好有 1 个根.

(C) 正好有 2 个根.　　(D) 正好有 3 个根.

10. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导，且 $g(0)=g'(0)=0$. 并设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续.　　(B) 连续但不可导.

(C) 可导，但导函数不一定连续.　　(D) 导函数连续.

学习札记：

**（二）填空题**

1. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$ ______，$g[f(x)]=$ ______.

2. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$ ______ 的定义域为 ______.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=$ ______.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ ______.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$ ______.

6. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小：$\ln(1+x)$，$x-\sin x$，$x\tan x$，$\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$，$\frac{1}{\ln|x|}$ 中：______ 是 $x$ 的低阶无穷小；______ 是 $x$ 的一阶无穷小；______ 是 $x$ 的二阶无穷小；______ 是 $x^2$ 的高阶无穷小.

7. 设 $\alpha>0,\beta\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$，则 $(\alpha,\beta)=$ ______.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=$ ______.

9. 在区间 $[0,1]$ 上函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 的最大值记为 $M(n)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$ ______.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \frac{\sin bx}{x}+cx, & x<0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则常数 $a,b,c$ 分别等于 ______，______，______.

**（三）解答题**

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{a(\sin x-x)}{x^3}, & x>0,\\ \frac{1}{x}\left(2\sin x-\int_0^x\sin t^2\,dt\right), & x<0,\end{cases}$ 问 $a$ 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

学习札记：

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{\sin^{10}x}$.

5. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\mathrm{d}t$.

6. 确定$a,b,c$的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=C\ (C\neq 0)$.

7. 设$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，求常数$a$之值.

8. 求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1\right)$.

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

10. 设$a>0$，数列$\{a_n\}$满足$\begin{cases}a_0>0,\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right),\end{cases}$ $n=0,1,2,\cdots$. 求$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

11. 设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，$(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

12. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ x+3, & x>5.\end{cases}$ 讨论$y=f(g(x))$的连续性，若有间断点并指出类型.

13. 求函数$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$在区间$(0,2\pi)$内的间断点，并判断其类型.

14. 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为$f(x)$，求函数$f(x)$的间断点并指出其类型.

15. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$，求证：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=+\infty$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=A$.

16. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)$，证明：至少存在$x_0\in[a,b]$，使

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right).$$

17. 以$[x]$表示不超过$x$的最大整数，试确定常数$a$的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$存在，并求出此极限.

18. 设$G'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$且$\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$，求$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t^2G(t)\mathrm{d}t$.

19. (1) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$;

(2) 证明$f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

学习札记：

# 三、习题的解答与分析

**(一) 选择题**

1. 应选(B)

**【分析】**（排除法）　由于 $f(-x)=x\tan x \mathrm{e}^{-\sin x}\neq f(x)$，当 $\sin x\neq 0$ 时，$f(x)$ 不是偶函数. 由于 $f(0)=f(\pi)=0$ 知 $f(x)$ 不是单调函数，又 $f(x)$ 也不是周期函数，因此选(B).

（直接法）　由于 $\mathrm{e}^{\sin x}\geqslant \mathrm{e}^{-1}$ 及 $x\tan x$ 无界可以推出 $f(x)$ 无界. 因为 $x\tan x$ 无界，则 $\forall M>0$，$\exists x_0\in$ 定义域，$|x_0\tan x_0|>M\mathrm{e}$，进而 $|f(x_0)|=|x_0\tan x_0 \mathrm{e}^{\sin x_0}|\geqslant M\mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{-1}=M$.

**【评注】**　研究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的. 因此，常用的解题方法是两大类：一种是直接验证某个选项正确，则其余选项必定不正确(不必验证). 这种方法叫直接法；另一种方法是验证其中三个选项不正确，则剩下的一个选项必定正确(也不必验证)，这种方法通常称作排除法.

直接法就是直接验证某个选项正确，通常有两种途径，一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确，这种方法通常称为推演法；另一种方法是借助几何分析得出正确选项，这种方法叫几何法. 而排除法在使用时通常是举反例.

2. 应选(D)

**【分析】**　对这一类题目，一般是考查函数在该点的左、右极限. 因为左、右极限都存在且相等，是函数极限存在的充要条件.

由于

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}2\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0.$$

所以只有(D)是正确的.

**【评注】**　本题主要考查函数在一点的左、右极限. 这里应特别注意的是 $\lim\limits_{x\to 1^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，而 $\lim\limits_{x\to 1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$. 本题的函数由两个因式相乘而得，其中 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，故因式 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 是关键部分. 所以解题中要善于抓住关键部分，才能提高效率.

3. 应选(B)

**【分析】**　多次利用洛必达法则，并利用 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)\cdot\sin(1-\cos x)^2}{x^4+x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{x^3+x^4}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0,$$

因此选(B).

学习札记：

【评注】 以上运算中，考查了求积分上限函数的导数，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]=(f[\varphi(x)])\varphi'(x).$$

4. 应选(A)

【分析】 将 $e^x$ 的麦克劳林展开式代入(因原式的 $x^2$ 高阶无穷小，所以展开到二阶即可).

$$e^x-(ax^2+bx+1)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)-ax^2-bx-1$$

$$=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2),\quad x\to 0,$$

由于原式是比 $x^2$ 高阶的无穷小，所以 $a=\frac{1}{2},b=1$.

5. 应选(C)

【分析】 由于

$$\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}=1+x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x)^2+o_1(x^2)$$

$$-\left[1+x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(3x)^2+o_2(x^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

$$x-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x\right)\sin x=x-\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o_1(x^2)\right)\right]\cdot$$

$$\left[x-\frac{1}{6}x^3+o_2(x^3)\right]=o(x^3),$$

$$e^{x^4-x}-1\sim x^4-x\sim -x.$$

可见应选(C).

6. 应选(D)

【分析】 由一元函数性质，若能首先判定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则(A),(B),(C) 均被排除.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^{3/2}}=0,$$

$$f'(0^-)=\lim\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0,$$

所以 $f'(0)=0$. 选(D).

【评注】 本题考查了函数极限、连续、可导性等重要知识点.

7. 应选(C)

【分析】 由

$$\lim\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0, \tag{*}$$

学习札记：

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^2}{1}=0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

又因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\sin\frac{1}{x}$$

不存在，由此得出 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导，选(C).

**【评注】** 1° 本题考查了分段函数在分段点处极限及导数的求法；函数的可导与连续的关系，即函数在一点连续未必在该点可导；无穷小之间的等价：当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$ 等；无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

2° 注意(*)式计算时，容易犯的错误是：$\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}x\cdot\lim\limits_{x\to0^-}\sin\frac{1}{x}=0$，上式运算不符合极限运算法则.

8. 应选(D)

**【分析】** 先考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否可导. 若不可导，再考察在 $x=0$ 处是否连续. 若可导，则进一步求 $f'(x)$，考察 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}.$$

$x>0$ 时，

$$f'(x)=\arctan\frac{1}{x}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}.$$

$x<0$ 时，

$$f'(x)=-\arctan\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}.$$

所以

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\frac{\pi}{2}=f'(0),$$

即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，选(D).

9. 应选(C)

**【分析】** 记

$$f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3},$$

易知 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $f(x)$ 的三个无穷间断点. 除这三个点外均有 $f'(x)<0$. 又当 $x<\lambda_1$ 时 $f(x)<0$，故区间 $(-\infty,\lambda_1)$ 内 $f(x)=0$ 没有根.

又因为

$$f(\lambda_1^+)=\lim_{x\to\lambda_1^+}f(x)=+\infty,\quad f(\lambda_2^-)=\lim_{x\to\lambda_2^-}f(x)=-\infty,$$

所以在 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 内 $f(x)=0$ 有且仅有一个根. 类似可知在 $(\lambda_2,\lambda_3)$ 内 $f(x)=0$ 也有且仅有一个根，$(\lambda_3,+\infty)$ 内没有根，故选(C).

10. 应选(D)

**【分析】** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0,$

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

**(二) 填空题**

1. 应填：$f[g(x)]=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$　$g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

学习札记：

【分析】 由 $g(x) \geqslant 0$，

$$f[g(x)] = \frac{1}{2}[g(x) + |g(x)|] = g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

由 $f(x) \geqslant 0$，

$$g[f(x)] = f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

【评注】 本题主要考查分段函数的复合．要求两个分段函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 的复合函数 $y = f[\varphi(x)]$，实际上就是将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$．而这里的关键是要搞清 $u = \varphi(x)$ 的函数值 $\varphi(x)$ 落在 $y = f(u)$ 的定义域的哪一部分．

2. 应填：$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$，$x \leqslant 0$

【分析】 由 $f(x) = e^{x^2}$ 知，$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$，又 $\varphi(x) \geqslant 0$，则 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$，$x \leqslant 0$．

【评注】 本题主要考查函数的复合．

3. 应填：$\frac{6}{5}$

【分析】 本题在经过倒数变换后，再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限．令 $x = \frac{1}{t}$，则 $x \to \infty$ 时，$t \to 0$，所以

$$原式 = \lim_{t\to 0}\frac{3+5t^2}{5+3t}\cdot\frac{\sin 2t}{t} = \frac{6}{5}.$$

本题也可以利用等价无穷小，$\sin\frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$ $(x \to \infty)$ 求解．

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+5)}{(5x+3)}\cdot\frac{2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+10}{5x^2+3x} = \frac{6}{5}.$$

4. 应填：$\ln 2$

【分析】 由重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 确定 $a$．

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = 8,$$

所以 $3a = \ln 8 = 3\ln 2$，$a = \ln 2$．

5. 应填：$e^{-\frac{1}{2}}$

【分析】 由连续性定义知

$$a = f(0) = \lim_{x\to 0}f(x) = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{(\cos x)2x}\right) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

6. 应填：$\frac{1}{\ln|x|}$，$\ln(1+x)$，$x\tan x$ 或 $\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$，$x - \sin x$

【分析】 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln|x|}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0,$$

知$\frac{1}{\ln|x|}$是$x$的低阶无穷小.

由$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$知$\ln(1+x)$是$x$的一阶无穷小.

由

$$1-\sqrt{\cos x^2}=\frac{1-\cos x^2}{1+\sqrt{\cos x^2}}\sim\frac{1}{4}x^4\quad(x\to 0),$$

从而$\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$是$x$的$(6-4=2)$二阶无穷小.

由

$$x-\sin x=\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\quad(x\to 0),$$

则$x-\sin x$是$x^2$高阶无穷小.

由$\tan x\sim x$是$x$的一阶无穷小，则$x\tan x$是$x$的二阶无穷小$(x\to 0)$.

7. 应填：$\left(2,\frac{1}{2}\right)$

**【分析】** 通过变量替换化成$\frac{0}{0}$型后用洛必达法则或作适当变形后用泰勒公式求解.

**【解法一】** 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\alpha}t^{\alpha-2}=\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to 0}t^{\alpha-2}=\begin{cases}0, & \alpha>2,\\ \frac{1}{2}, & \alpha=2,\\ \infty, & \alpha<2.\end{cases}$$

因为$\alpha>0,\beta\neq 0$，所以$(\alpha,\beta)=\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

**【解法二】** 原式$=x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]=x^2\left[1+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)-1\right]$

$$=x^2\left[\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right]=x^{2-\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+o(1)\right]\quad(x\to+\infty),$$

由此得$(\alpha,\beta)=\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

8. 应填：$e^4$

**【分析】** 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

9. 应填：$e^{-1}$

**【分析】** 由于

$$f'(x)=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x],$$

令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{n+1}$. 又因为$f(0)=f(1)=0$，所以

$$M(n)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

学习札记：

故 $$\lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\mathrm{e}^{-1}.$$

10. 应填：1,1,0

**【分析】** 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，可得

$$f(0^+)=a=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}\right]=1,$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\sin bx}{x}+cx\right]=b.$$

所以 $b=a=1, f(0)=1$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{2}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln(1+x)+x^2-2x}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x-x^2+o(x^2)+x^2-2x}{2x^2}=0.$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+cx-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x+cx^2-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}+c=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-1}{2x}+c=c.$$

所以 $c=0$. 故 $a=1, b=1, c=0$.

**（三）解答题**

1. (1)**【解】** 恒等变形：分子分母同乘 $\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}$，得

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

(2)**【解】** 恒等变形：分子、分母同除 $-x$ $(x<0, -x=|x|=\sqrt{x^2})$，得

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1.$$

(3)**【解】** 恒等变形：分子分母同除 $x$，得

$$原式=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\times\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{3}{2}.$$

**【评注】** 1° 几题均是作简单恒等变形后消去极限为 0 或 $\infty$ 的因子，或直接相消或等价无穷小取极限后相消.

2° 几题均为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限，有的也可用洛必达法则，但并不简单. 而题(3)不能用洛必达法则，因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)'}{(x)'}$ 的极限不存在.

2. (1)**【解】** 属 $\infty-\infty$ 型，先化成 $\dfrac{0}{0}$ 型，即

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}$$