21世纪高等职业学校规划教材

Advanced Mathematics

高等数学

（上册）

张子辉　谭鑫　主编

国防科技大学出版社

21世纪高等职业学校规划教材

Advanced Mathematics

高 等 数 学

（上册）

主　编　张子辉　谭　鑫
副主编　曾　苗　刘旺林　喻平元　胡阳春

国防科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）/张子辉，谭鑫主编. —长沙：国防科技大学出版社，2007.6
ISBN 978-7-81099-421-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①张…②谭… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 078299 号

国防科技大学出版社出版发行
电话：（0731）4572640　邮政编码：410073
http：//www.gfkdcbs.com
责任编辑：石少平　黄煌
新华书店总店北京发行所经销
衡阳博艺印务有限公司印装
*
开本：787×1092　1/16　印张：25　字数：480 千
2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷　　印数：1—3000 册
*
ISBN 978-7-81099-421-7
定价：28.00 元

前　　言

“高等数学”课程在高等学校课程体系中占有特殊重要的地位。随着社会、经济的不断发展，高等数学的应用已渗透到自然科学、工程技术、生命科学、社会科学、经济管理等众多领域，成为解决各种实际问题的重要工具。为了深入贯彻和落实教育部最新颁发的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育人才培养目标及规格》，切实提高广大高职高专学生的数学理论基础，强化数学的应用与实际操作能力，以科学发展观为指导，走中国特色高等职业发展之路，进一步适应高等职业教育领域高等数学教学的改革和发展，我们在广泛比较现行各种不同版本高职高专高等数学教材的优点和不足基础上，深入各级各类高职高专院校一线教学实践的教师队伍中，进行调查研究，组织了一批教学经验丰富、专门从事高职高专教学资深教授和中青年骨干教师编写一套《高等数学》教材。在本套丛书中，力求彰显以下几个特色：

一．实现课程体系与内容的优化整合，定位精确，量体裁衣

本套教材是一套专供全国高职高专院校使用的高职高专高等数学规划教材，体现《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》提出的教学目的，覆盖了所要求掌握的数学理论基础知识和应用能力培养的内容。结合目前高职高专的高等数学课程设置特点和学生的实际水平以及社会对高职高专学生数学素质的期望，本套教材注重突出内容的实用性，降低了理论推导的难度，内容取材汲取了同类教材的优点和实际教学中的教改成果，融科学性、实用性、特色性、现代性、创新性、通俗性于一体，以应用为目的，以必需、够用为原则，注重学生数学素质和应用能力的培养．遵循“拓宽基础、培养能力、重在应用”的宗旨，将基础理论学习、实用技能训练有机地融为一体，力求使高等数学的学习做到学用结合、学以致用、学后会用。

二．选材实用得到，内容与时俱进、方法简洁实用

在本套教材中，追求突出数学知识实用重点，淡化数学证明和数学推导，没有过分追求数学自身的系统性，严密性和逻辑性，降低了学习的难度，从而也提高了学生学习的兴趣。对于一般概念的引出，则遵循了实例—抽象—概念的形成过程。并重视了相关知识的整合。整个体系中强化与实际应用联系较多的基础知识和基本方法，加强基础知识的案例教学，力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法的作用，揭示重要的数学概念和方法的本质。例如，在导数中强调导数的实质——变化率；在积分中强调定积分的实质——无限累加；在级数中强调近似计算思想。同时也在内容中渗透了数学建模思想、方法，开设数学实验，培养学生用数学知识解决实际问题的意识与能力。根据高职高专教学实际，有针对性地选择适当（特别是在例题、习题、应用案例及实验题目等方面）的教学内容，尽力淡化计算技巧。

三．纵横结构科学，体现立体化教学

本套教材涵盖了高职高专各专业所需的数学知识，不同专业可以根据专业特点进行教学内容的选择，其它内容则可以作为专业之外学习的补充内容。所有内容无论是概念的引入、定理的建立还是应用例题的讲解，大都从不同角度、不同层次加以描述，并经常用数值表格或直观图形来阐明，让读者能在自我阅读过程中理解和把握学习内容，试图改变很

多教材由于表述简洁而带来阅读上的困难。同时，教材的易读易懂，也为课堂教学变“细讲少练”为“精讲多练”提供了可能。在每节内容后提供了一定数量的练习题，足以加强学生对本节知识的巩固和提高，在每章后附有复习题和自测题，既能进一步加强和巩固学习效果，同时也让学生能及时、准确的把握自己的学习情况，及时进行知识的补充和巩固。在后面的数学实验部分更是从现代信息技术的角度加强数学学习的素养和提高学生实践数学的能力，真正让数学能够指导后面的学习和解决实际问题，提高学生的应用数学习惯和实际操作能力。

为适应现代化教学的需要，本套教材还配置有多媒体系列教学软件和教学服务网站，为解决老师的教学问题和学生的学习问题提供了配套的后续服务。

本套教材分为上下两册，上册为微积分部分内容，内容涵盖了函数与图形、极限与连续、导数、导数的应用、不定积分及其应用、定积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数等内容，每章后附有复习题和单元测试题．下册内容涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、线性代数的应用模型、线性规划、随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步等，每章后附有复习题和单元测试题．在两册书后都有专门的章节讨论有关数学应用和实际操作的数学实验内容，针对于本书中间出现的数学问题的在数学软件 Mathematica 中的详细操作方法给予了详细的介绍，并给出了实际操作练习。

由于成书仓促，错误难免，恳请同行、专家批评指正。

《高职高专高等数学》教材编委会

2007 年 6 月 30 日

第一章 函数及其图形

高等数学与中学学过的初等数学有很大区别，初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变动的量为研究对象的．函数关系是对客观世界中变动的量之间相互依赖关系的一种数学抽象，是高等数学的基本研究对象．本章将在中学所学有关函数知识的基础上进一步回顾和深化有关集合、函数的概念及相关的性质．

第一节 集合与映射

集合是最基本的数学概念之一，在集合概念基础上建立起来的集合论，几乎渗透到数学的每一个分支，为数学的基本理论奠定了基础，并把数学引入到抽象推理的更加广阔的天地．在新兴的计算机科学中，由于使用了集合，使得它的一些数学概念更加明确和易于理解．作为集合之间的关系，映射也是数学中非常重要的概念，它是数学上各种对应关系的抽象．

一、集合及其表示

一般地，将具有某个共同属性的一些对象汇聚成一个整体就形成一个集合．它与日常生活中的“全体”、“整体”，“一群”，“所有”等词意义相近，如“某班的全体男同学”，“我校图书馆的所有经济类图书”，“全部大写英文字母”等，它们都构成一个集合．

集合中的每个对象称为这个集合的元素．对象可以是各种各样的事物和一些抽象符号，如“某班的全体男同学”，构成这个集合的对象是人；“所有大于零的整数”，构成这个集合的对象是数；而“全部大写英文字母”，构成这个集合的对象则是 26 个大写英文字母．

通常用大写英文字母 A、B、C 等表示集合，用小写字母 a、b、c 等表示元素．如果元素 a 是集合 M 中的元素，就说 a 属于 M，记作 $a\in M$；元素 a 不是集合 M 的元素，就说 a 不属于 M，记作 $a\notin M$ 或 $a\overline{\in} M$．一个集合中的元素如果只有有限个，这样的集合称为有限集；不是有限集的集合称为无限集．

集合的表示方法通常有两种，一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来．例如，由绝对值小于 4 的整数组成的集合 A，可以表示为 $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$．又如，方程 $x^2=1$ 的所有实数根组成的集合 B，可以表示为 $B=\{-1,1\}$．

另一种经常使用的方法是描述法，若集合 M 中的元素是因为具有某个共同性质 P 构成一个整体，则用描述法可以表示为

$$M=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }P\}.$$

如上述集合 A 用描述法可表示为

$$A=\{x\mid x\text{是绝对值小于 4 的整数}\}.$$

集合 B 用描述法可表示为

$$B=\{x\mid x^2=1\}.$$

需要注意的是，用描述法表示一个集合时，定义该集合所用的那个陈述句应当表达出一个清晰的概念．诸如“某某班级的高个子男生”不能形成一个集合，因为“高个子”不是一个清晰确定的概念．

设 A、B 是两个集合，如果两个集合所包含的元素完全一样，则称这两个集合相等，记作 $A=B$（或 $B=A$）．集合的相等与集合的名称和集合的表示法无关．

如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$（读作 A 含于 B 或 B 包含 A）．若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A\subsetneq B$ 或 $B\supsetneq A$（读作 A 真含于 B 或 B 真包含 A）．

不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$．空集是任何集合的子集．注意空集与含有单个元素“0”的集合 $\{0\}$ 不能混淆．

如果一个集合的元素全部由数字构成，则该集合称为数集．常用数集用特定字母表示，如 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集．有时在表示数集的字母右上角标上“*”来表示该数集内排除 0 的集，标上“＋”表示该数集内排除 0 与负数．如 $\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集，$\mathbf{R}^*$ 表示排除 0 的有理数集．

二、集合运算及其性质

集合的最基本的运算是“并”、“交”、“差”，它与数与数之间的四则运算类似，集合之间也具有一些特定的运算规律．

设 A、B 是两个集合，将集合 A 和集合 B 的所有元素汇合在一起组成的集合，称为集合 A 和集合 B 的并集（简称为并），记为 $A\cup B$．用描述法表示为

$$A\cup B=\left\{x\middle|x\in A\text{或}x\in B\right\}.$$

由集合 A 和集合 B 的公共元素组成的集合，称为集合 A 和集合 B 的交集（简称交），记为 $A\cap B$．集合 A 和 B 的交集合用描述法表示为

$$A\cap B=\left\{x\middle|x\in A\text{且}\, x\in B\right\}.$$

将所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素汇合在一起组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的差集（简称差），记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$．用描述法表示为

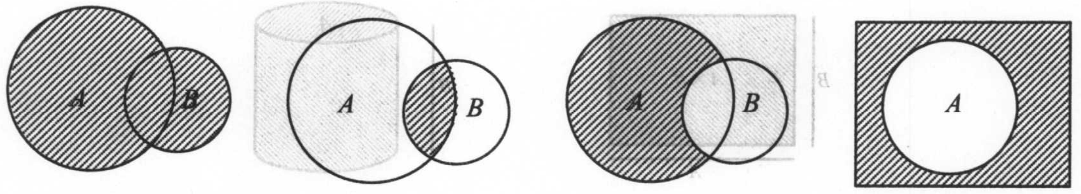
$$A-B=\left\{x\middle|x\in A\text{且}\, x\notin B\right\}.$$

例 1 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，集合 $B=\{c,d,e,f\}$，则有 $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A\cap B=\{c,d\}$，$A\setminus B=\{a,b\}$．

集合及其运算可以用下面的文氏图来加以直观理解，如图 1.1.1 所示，阴影部分表示

各运算结果．

有时，我们在研究和处理问题时需要将研究的问题局限在某个大的集合 I 内进行，所研究的其他集合 A 都是集合 I 的子集，这时，我们称集合 I 为全集或基本集，称 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^C．图 1.1 中(d)图中矩形表示全集 I，圆表示集合 A，阴影部分表示 $A^C = I - A$．



(a) $A\cup B$　(b) $A\cap B$　(c) $A\setminus B$　(d) $A^C = I - A$

图 1.1.1 集合运算的文氏图

集合运算满足下列性质：

（1）交换律　$A\cap B = B\cap A$，　$A\cup B = B\cup A$．

（2）结合律　$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$，

$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$．

（3）分配律　$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$．

（4）对偶律　$(A\cap B)^C = A^C\cup B^C$，　$(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$．

这些性质可以根据集合相等的定义进行验证．下面就对偶律举实例给以说明．

例 2　设全集 $I = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $A = \{1,2,4,5,7\}$，集合 $B = \{2,3,4,6,8\}$，则

$A\cap B = \{1,2,4,5,7\}\cap\{2,3,4,6,8\} = \{2,4\}$，$(A\cap B)^C = \{1,3,5,6,7,8\}$

$A^C = \{3,6,8\}$，$B^C = \{1,5,7\}$，$A^C\cup B^C = \{3,6,8\}\cup\{1,5,7\} = \{1,3,5,6,7,8\}$，

显然 $(A\cap B)^C = A^C\cup B^C$；

$A\cup B = \{1,2,4,5,7\}\cup\{2,3,4,6,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$(A\cup B)^C = \varnothing$

$A^C = \{3,6,8\}$，$B^C = \{1,5,7\}$，$A^C\cap B^C = \{3,6,8\}\cap\{1,5,7\} = \varnothing$，

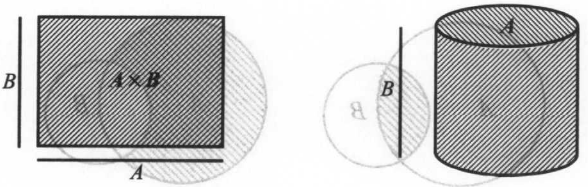
显然 $(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$，所以对偶律成立．

最后再介绍一种集合的运算．

设 A、B 是两个集合，在集合 A 中任取一个元素 x，在集合 B 中任取一个元素 y，组成一个有序数对 (x,y)，把这样的有序数对作为新的元素组成集合 $\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$，称这个集合为集合 A 和集合 B 的笛卡儿积，又叫做直积，记为 $A\times B$．用描述法表示为

$$A\times B=\{(x,y)\big|x\in A, y\in B\}.$$

例如，在图 1.1.2（a）中，A,B 分别为一直线段上点的集合，$A\times B$ 为一矩形区域的点的集合；在图 1.1.2（b）中，A 为一圆盘上点的集合，B 为一直线段上点的集合，$A\times B$ 为一圆柱体的点的集合.



(a) 线段 A 与线段 B 的笛卡儿积　　(b) 圆盘 A 与线段 B 的笛卡儿积

图 1.1.2 笛卡儿积的直观图例

从直积的角度看，二维平面就是一维数轴 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 的直积，记作 $\mathbf{R}^2$，即：

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}.$$

下面看一个直积的具体例子.

例 3 设集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{1,2,3\}$. 如果把 A 看成 x 轴上的两点的集合，把 B 看成 y 轴上的三点的集合，那么 $A\times B$ 就是平面上对应的六点的集合．即

$$A\times B=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}.$$

在图 1.1.3 中用空心圆圈表示.

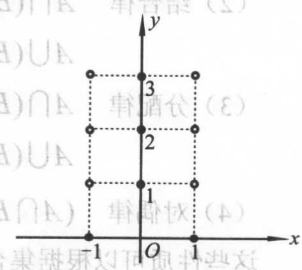


图 1.1.3 例 3 中直积的图示

三、区间与邻域

定义介于两个实数之间的全体实数组成的集合为区间，这两个实数称为区间的端点，两端点间的距离（线段的长度）称为区间的长度．区间是用得较多的一类实数数集，根据区间的长度可以将区间分为有限区间与无限区间.

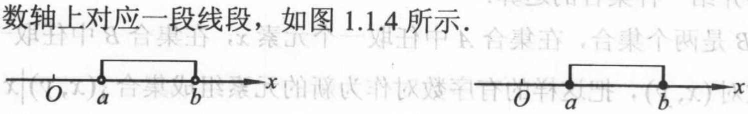
设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，下面给出四种形式的有限区间：

（1）开区间 (a,b)，即数集：$\{x|a<x<b\}$.

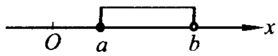
（2）闭区间 $[a,b]$，即数集：$\{x|a\le x\le b\}$.

（3）半开闭区间，包含 $[a,b)$ 与 $(a,b]$，分别对应数集：$\{x|a\le x<b\}$，$\{x|a<x\le b\}$.

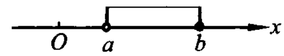
以上 a 和 b 都是实数，称 a 为区间的左端点，b 为区间的右端点，$b-a$ 为区间的长度．这些区间在数轴上对应一段线段，如图 1.1.4 所示.



(a) 开区间 (a, b)　　(b) 闭区间 $[a ,b]$



(*c*) 半开闭区间$[a, b)$



(*d*) 半开闭区间$(a, b]$

图 1.1.4 以 a, b 为端点的有限区间

无限区间有如下三种形式：

（1）无限开区间$(-\infty,a)$与$(a,+\infty)$，分别对应数集

$$\{x\,|\,x<a\}\text{，}\{x\,|\,x>a\}.$$

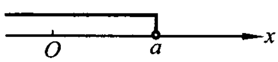
这里，记号$-\infty$与$+\infty$分别读作“负无穷大”与“正无穷大”，是引用的符号，并不表示数.

（2）无限闭区间$(-\infty,a]$与$[a,+\infty)$，分别对应数集

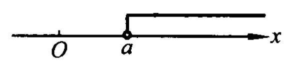
$$\{x\,|\,x\le a\}\text{，}\{x\,|\,x\ge a\}.$$

（3）全体实数的集合$\mathbf{R}$也可记做区间$(-\infty,+\infty)$，它在几何上对应整个实数轴.

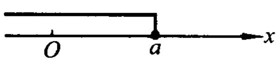
无限开区间与无限闭区间在数轴上如图 1.1.5 所示.



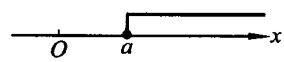
(*a*) 开区间$(-\infty,a)$



(*b*) 开区间$(a,+\infty)$



(*c*) 闭区间$(-\infty,a]$



(*d*) 闭区间$[a,+\infty)$

图 1.1.5 无限区间

邻域也是一个常用的数学概念. 设δ是某一个正数，则称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的一个δ邻域，其中点 a 称为该邻域的中心，δ称为该邻域的半径，如图 1.1.6 所示，记作$U(a,\delta)$.

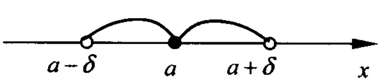


图 1.1.6 点 a 的 δ 邻域

点 a 的一个δ邻域表示为数集

$$U(a,\delta)=\{x\,||\,x-a\,|<\delta\}=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的一个δ邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心δ邻域，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，它用数集表示为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|\,x-a\,|<\delta\},$$

也可以表示为点 a 附近左、右两个区间$(a-\delta,a)$与$(a,a+\delta)$的并集. 称区间$(a-\delta,a)$为点 a 的一个左δ邻域，称区间$(a,a+\delta)$为点 a 的一个右δ邻域.

四、三角不等式与平均值不等式

下面列举几个初等但非常有用的不等式和两个常用的求和、求积记号.

（1）绝对值的三角不等式：设a和b都是实数，则

$$||a|-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|.$$

右端等号成立当且仅当a,b同号，左端等号成立当且仅当a,b异号.

（2）算术一几何平均值不等式：设a和b都是正实数，则

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}.$$

等号成立当且仅当a,b相等.

上述两个不等式都可以推广到有限多个数的情况．设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为实数，那么有

（3）$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$，等号成立当且仅当$x_1,x_2,\cdots,x_n$同号.

（4）$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$都为正实数．等号成立当且仅当$x_1,x_2,\cdots,x_n$都相等.

其中不等式（3）可以用连加号表示为 $|\sum\limits_{i=1}^{n}x_i|\le\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，$\sum$ 叫做连加号或者求和号，连加号上下的“$i=1$”和“n”表示i的取值范围，即对$i=1,2,\cdots,n$求和．例如

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=1+2^2+3^2+\cdots+n^2.$$

不等式（4）则可以表示为 $\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}\le\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\prod$ 叫做连乘号，连乘号上下的“$i=1$”和“n”表示i的取值范围，即对$i=1,2,\cdots,n$求积．例如

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i^{\ 2})=(1-x_1^{\ 2})(1-x_2^{\ 2})\cdots(1-x_n^{\ 2}).$$

五、映射

映射是现代数学的基本概念，它反映了事物之间“一对一”或“多对一”的依赖关系．例如，我们全班同学每个人都对应一个性别，而且每个人也对应一个学号．从这两个例子可以看出，同学的性别、同学的学号确定了两个对应关系，其中，同学与性别的对应是“多对一”的关系，同学与学号的对应是“一对一”的关系，这种对应关系就是我们下面要研究的映射.

定义 **设X、Y是两个非空集合，若对X中的任一元素x，依照某个对应法则f，有Y中唯一确定的元素y与之对应，则称按照对应法则f为一个X到Y的映射，记为**

$$f:X\to Y,$$

并把元素 y 称为（在映射 f 下）x 的像，即

$$y=f(x).$$

同时，把元素 x 称为 y 的原像．集合 X 称为映射 f 的定义域，记为 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的像集 $\{f(x)|x\in A\}$ 称为 f 的值域，记为 R_f，即

$$R_f=\{f(x)|x\in A\}.$$

设 f 是集合 X 到集合 Y 的映射，若对于 X 中任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是 X 到 Y 的单映射，简称单射；若 $R_f=Y$，即对于 Y 中的任一元素 y 都是 X 中某个元素的像，则称 f 为 X 到 Y 的满映射，简称满射；若 f 既是单射，也是满射，则称 f 为 X 到 Y 的一一映射，又称为双射．

例 4 考虑数轴上点到原点的距离，这是一个从 $\mathbf{R}$ 到区间 $[0,+\infty)$ 的映射，可以将这个映射 $f:\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ 表示为 $f(x)=|x|$．该映射是满射，但不是单射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，如图 1.1.7 所示．

例 5 设 $f:[0,\pi]\to[-1,1]$，对每一个 $x\in[0,\pi]$，$f(x)=\cos x$．这是一个映射，且既是单射，又是满射，f 的定义域 $D_f=[0,\pi]$，值域 $R_f=[-1,1]$．

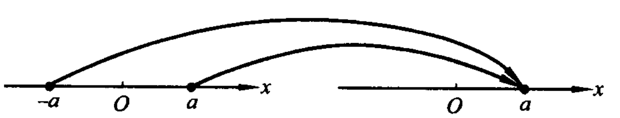


图 1.1.7 数轴上点到原点的距离是一个满射

说明：根据映射的定义，构成一个映射必须满足以下三个要素：定义域 D_f，值域 R_f，对应法则 f. 对于每个 $x\in D_f=X$ 的像是惟一的，但是 y 的原像不一定惟一，并且映射的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$．

习 题 1.1

1. 下面所说的对象哪些能够构成集合，如果不能，说明理由；如果能，该集合的元素是什么？并用适当的方法表示.

（1）一个班级中的所有高个子的男同学；

（2）小于 100 并且被 4 除余 1 的自然数；

（3）接近于 2 的有理数；

（4）小于 10 的自然数；

（5）方程 $x^2-x-6=0$ 的解；

（6）所有能被 3 整除的正整数；

（7）数轴上 1 和 2 之间并包含 1 和 2 的所有点；

(8) 和湖南省没有公共边界的中国省份.

2. 将符号$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\supseteq$、$=$填入以下适当位置:

(1) 0_____$\mathbf{N}$, -3.1_____$\mathbf{Z}$, $\sqrt{2}$_____$\mathbf{Q}$, 1.79_____$\mathbf{R}$, π_____$\mathbf{R}^+$.

(2) 设$A=\{x\mid 2x-x^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$, 则$2$____$A$, 1____A, -1____A.

(3) $\mathbf{Z}$___$\mathbf{R}$; a___$\{a, b, c\}$; $\{a\}$___$\{a, b, c\}$;

$\varnothing$___ $\{0\}$; $\{b, c\}$___$\{c, b\}$; $\{a, b, c\}$___$\varnothing$;

A___$A\cup B$; B___$A\cup B$; A___$A\cap B$;

B___$A\cap B$; $A\cup B$___$A\cap B$; $(A\cap B)\cap A$___B;

$(A\cup B)\cap(A\cap B)$___ A, {等腰三角形}_____{等边三角形}.

3. 用列举法表示大于 3 小于 20 的整数的全体.

4. 用列举法表示方程$x^2-1=0$的解构成的集合.

5. 用描述法表示不等式$x-3>0$的解构成的集合.

6. 用描述法表示所有非负偶数的集合.

7. 写出$\{a, b, c\}$的所有子集, 并指明哪些是它的真子集.

8. 设$I=\{$绝对值小于 6 的整数$\}$, $A=\{x\mid x<6, x\in\mathbf{Z}^+\}$, 求$A^C$.

9. 设$A=\{x\mid x$是奥运会中参加跳马比赛的运动员$\}$, $B=\{x\mid x$是奥运会中参加双杠比赛的运动员$\}$, 求$A\cap B$.

10. 设$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 求$A\cap B$, $A\cup B$.

11. 设$A=\{x\mid x<4\}$, $B=\{x\mid |x|\le 6, x\in\mathbf{Z}\}$, 求$A\cap B$, $A\cup B$.

12. 设直线$y=2x+3$上的点集为P, 试用描述法表示集合P; 并确定点$(2,7)$, 点$(1,3)$与集合P的关系.

13. 已知$A=\{(x,y)\mid y=3x-1\}$, $B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$, $a\in A$, $a\in B$, 求a.

14. 用图形表示下列运算:

(1) $(A-B)\cup(B-A)$; (2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$;

(3) 设$A=[0,1]$, $B=\{1,2\}$, 求$A\times B$.

15. 证明下列不等式, 并说明其几何意义.

(1) $\big||a|-|b|\big|\le|a+b|\le|a|+|b| \quad (a,b\in\mathbf{R})$.

(2) $\left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}-\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|\le|a_1-a_2|+|b_1-b_2| \quad (a_1,a_2,b_1,b_2\in R)$

16. 用集合A表示全班同学, 集合B表示一年的 12 个月, 试建立一个从集合A到B的映射. 在此映射下, 如果集合A中的两个元素有相同的像, 问这在现实中说明什么事情发生?

17. 写出集合{农夫, 狼, 羊, 菜}的所有子集. 现在农夫要将它们运到一条河的对岸, 船每次只能承载农夫和一样东西, 并且农夫不在的时候狼要吃羊, 羊要吃菜, 现在根据分析写出的所有集合, 设计一套方案, 帮助农夫将狼、羊、菜运到河对岸.

第二节 变量与函数

客观事物都是相互影响、相互联系而且是发展变化着的，同时这种联系和发展都有一定的规律性，认识和掌握这些事物的规律是科学研究的任务，也是科学研究造福人类的基础. 而函数则是我们用数学语言来描述现实世界的主要工具，它是从量的侧面在研究客观事物规律时所得到的一种依赖关系，也是高等数学研究的主要内容.

一、常量与变量

在观察各种自然现象或过程中，常常会遇到各种不同的量，这些量一般可以分为两类：一类是在某个考察过程中保持不变的量，只取一个固定的值，我们称之为常量；另一类是在考察过程中发生变化的量，可以取不同的数值，我们称之为变量. 例如，从长沙乘飞机到北京，长沙到北京的直线距离是保持不变的量，即为常量；而在这个过程中飞机所存储的油量是不断减少的，因此是不断变化的，即为变量. 又如，作匀速直线运动的物体的速度、商场中一个星期内某件商店的价格等都为常量；地球上的人口数、一天中的气温、我们一天中心脏跳动的次数等等，都是在一定范围内变化着的，它们都为变量.

常量和变量是依赖于某个考察过程的，一个量可能在某个过程中是常量，但是在另外一个过程中则可能又是变量，如商场中某件商品的价格，在一个星期内可能就是常量，但是由于市场的变化，新产品的推出，这件商品可能在一个月，或者半年内价格会不断降低，因此对于一个月或者半年来说，则该件商品的价格则是变量. 这说明常量和变量具有相对性.

从几何意义上讲，常量对应着实轴上的定点，变量则对应着数轴上的动点，一个变量所能取的数值的全体称为这个变量的变动区域（变化范围）.

二、函数的概念

在自然现象、生产过程中，存在着各种各样的变量，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并且遵循一定规律的.

例 1 圆的面积 A 与它的半径 r 之间存在着相依关系，它们之间的关系由公式

$$A=\pi r^2$$

给定，当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内取定任意一个数值时，根据上面的关系式可以惟一确定一个圆的面积 A 的值.

例 2 在自由落体运动中，物体下落的时间 t 与在这个时间内落下的距离 s 之间的关系可由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度，为常量. 这样若 t 的取值给定，则物体下落的距离也就确定