海洋科技书系

董胜 石湘 编著

海洋工程数值计算方法

METHODS OF NUMERICAL COMPUTATION IN OCEAN ENGINEERING

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

海洋工程数值计算方法

董　胜　石　湘　编著

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

海洋工程数值计算方法 / 董胜，石湘编著. —青岛：中国海洋大学出版社，2007. 7

ISBN 978-7-81125-012-1

Ⅰ. 海…　Ⅱ. ①董…　②石…　Ⅲ. 海洋工程－数值计算－计算方法　Ⅳ. P75

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 078895 号

出版发行　中国海洋大学出版社

社　　址　青岛市香港东路 23 号　　邮政编码　266071

网　　址　http://www2.ouc.edu.cn/cbs

电子信箱　hdcbs@ouc.edu.cn

订购电话　0532-82032573(传真)

责任编辑　李建筑　　电　　话　0532-85902505

印　　制　文登市印刷厂有限公司

版　　次　2007 年 7 月第 1 版

印　　次　2007 年 7 月第 1 次印刷

成品尺寸　230mm×170mm　1/16

印　　张　19.625

字　　数　368 千字

定　　价　30.00 元

前 言

随着计算机的日益发展，科学计算已经成为科学实践的重要手段之一。它在物理化学、工程力学、地球天文、经济管理及社会科学中得到了广泛的应用，成为不可或缺的重要工具。与此同时，适用于计算机的数值计算方法逐渐成为理工科专业硕士研究生与本科生的必修课程。目前，国内高校不同专业编写数值计算方法的专著及教学用书很多，有的偏重于理论，有的偏重于工程。中国海洋大学工程学院 1995 年申报设立港口、海岸及近海工程硕士点以来，一直将“数值计算方法”定为必修课程。作者在讲授此课的同时，注重将从事海洋工程环境条件随机性分析及其与结构相互作用方面的科研成果融入教学之中。本书在介绍数值分析理论的基础上，注重与计算机应用的结合，通过海洋工程实例，培养学生的工程理念，提高解决实际问题的能力。

本书介绍了数学问题数值求解的常用方法。全书共分 13 章，主要包括有效数字与误差的相关概念、求解线性方程组的直接方法与迭代方法、插值、函数逼近、数值积分、特征值与特征向量、非线性方程求根、常微分方程初值与边值问题的解法、偏微分方程的差分解法等内容。结合数值计算，对港口工程项目比选的层次分析、年极值水位的灰色马尔科夫预测、极值波高的长期分布、波浪浅水变形计算、平直岸线泥沙淤积、海洋油田风浪设计标准、Stokes 的 5 阶波浪理论计算、导管架平台动力响应分析、模态参数识别、基于局部测量的海洋平台损伤检测等 10 个海洋工程典型问题进行了简介。为了帮助部分读者熟悉 Matlab 软件，还编写了 Matlab 编程基础一章。本书既有一定的理论分析内容，更注重编程思路的介绍，对一些实用方法给出了 Matlab 计算程序。书后附有习题，以帮助学生巩固和加深对有关内容的理解与掌握。

本书第 1～12，14 章以及第 13 章中的第 1～7 节由董胜执笔，第 13 章中的第 8～10 节由石湘执笔。全书由董胜统稿、定稿。

在本书的出版过程中，作者得到中国海洋大学工程学院同事们的鼓励与支持；大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室李玉成教授与大连理工大学土木水利学院陈士荫教授在百忙之中审阅了初稿，并提出了宝贵意见；研究生

宁萌、冯春明、付新钰、宁进进、刘伟完成了部分初稿的文字录入、部分例题的编程绘图工作，在此表示衷心的感谢。在成书过程中，作者参阅了其他学者的论著，已列入书后的“参考文献”，在此对这些作者一并表示感谢。同时要感谢中国海洋大学教务处等有关部门对本书编撰工作的大力支持，还要感谢中国海洋大学出版基金、国家自然科学基金(50579069)和国家863高技术研究发展计划(2006AA09Z344)对本书出版的资助。

本书可作为海洋、海岸、港航、水利、环境、土木等专业硕士研究生及高年级本科生的教材，亦可作为相关专业科研人员及工程技术人员的参考书。

随着计算技术的迅速发展，新的数值计算方法不断涌现，由于作者从事该领域研究的时间短，加之水平有限，书中难免存在不足甚至错误之处，敬请读者批评指正。

作者

2007年6月

目　次

第一章　绪论 …………………………………………………… (1)
1.1　数值计算方法的研究对象和特点 ……………………… (1)
1.2　误差的基本概念 ………………………………………… (2)
1.2.1　误差的来源 …………………………………………… (2)
1.2.2　绝对误差和相对误差 ………………………………… (3)
1.2.3　有效数字 ……………………………………………… (4)
1.3　误差传播 ………………………………………………… (6)
1.3.1　四则运算的误差传播 ………………………………… (6)
1.3.2　函数计算的误差传播 ………………………………… (7)
1.4　数值计算应注意的问题 ………………………………… (8)
第二章　解线性方程组的直接方法 ………………………… (12)
2.1　Gauss(高斯)消去法 …………………………………… (12)
2.1.1　Gauss 消去法原理 …………………………………… (12)
2.1.2　Gauss 消去法的计算量 ……………………………… (13)
2.1.3　Gauss 消去法编程 …………………………………… (14)
2.2　Gauss-Jordan(高斯-若当)消去法 …………………… (16)
2.2.1　Gauss-Jordan 消去法原理 …………………………… (16)
2.2.2　Gauss-Jordan 消去法编程 …………………………… (18)
2.3　Gauss 主元素消去法 …………………………………… (20)
2.3.1　Gauss 主元素消去法原理 …………………………… (20)
2.3.2　Gauss 主元素消去法编程 …………………………… (22)
2.4　直接三角分解法 ………………………………………… (24)
2.4.1　直接三角分解法原理 ………………………………… (24)
2.4.2　直接三角分解法编程 ………………………………… (27)
2.5　解三对角方程组的追赶法 ……………………………… (29)
2.5.1　追赶法原理 …………………………………………… (29)
2.5.2　追赶法编程 …………………………………………… (31)

第三章 解线性方程组的迭代法 ………………………………… (34)
3.1 Jacobi(雅可比)迭代法 ………………………………… (34)
3.1.1 Jacobi 迭代算法 ………………………………… (34)
3.1.2 Jacobi 迭代法编程 ………………………………… (36)
3.2 Gauss-Seidel(高斯-赛德尔)迭代法 ………………………………… (38)
3.2.1 Gauss-Seidel 迭代算法 ………………………………… (38)
3.2.2 Gauss-Seidel 迭代法编程 ………………………………… (40)
3.3 超松弛迭代法 ………………………………… (41)
3.3.1 超松弛迭代算法 ………………………………… (41)
3.3.2 超松弛迭代法编程 ………………………………… (45)
第四章 插值法 ………………………………… (47)
4.1 Lagrange(拉格朗日)插值 ………………………………… (47)
4.1.1 一次插值 ………………………………… (47)
4.1.2 二次插值 ………………………………… (48)
4.1.3 Lagrange 插值多项式 ………………………………… (49)
4.1.4 Lagrange 插值余项 ………………………………… (50)
4.1.5 Lagrange 插值编程 ………………………………… (51)
4.2 Newton(牛顿)插值 ………………………………… (52)
4.2.1 均差及其性质 ………………………………… (52)
4.2.2 差分及其运算性质 ………………………………… (53)
4.2.3 等距节点的 Newton 插值公式 ………………………………… (55)
4.2.4 Newton 插值公式编程 ………………………………… (57)
4.3 Hermite(埃尔米特)插值 ………………………………… (58)
4.3.1 Hermite 插值原理 ………………………………… (58)
4.3.2 Hermite 插值公式编程 ………………………………… (61)
4.4 三次样条插值 ………………………………… (62)
4.4.1 三次样条函数 ………………………………… (62)
4.4.2 三转角方程 ………………………………… (63)
4.4.3 三弯矩方程 ………………………………… (66)
4.4.4 三次样条插值法计算步骤 ………………………………… (68)
4.4.5 三次样条插值法编程 ………………………………… (70)
第五章 函数逼近 ………………………………… (72)
5.1 最佳一致逼近多项式 ………………………………… (73)
5.1.1 最佳一致逼近多项式存在性 ………………………………… (73)

5.1.2　Chebyshev(切比雪夫)定理 …………………………… (73)
5.1.3　最佳一次逼近多项式 ………………………………… (74)
5.2　最佳平方逼近多项式 ……………………………………… (75)
5.2.1　内积空间 ……………………………………………… (75)
5.2.2　函数的最佳平方逼近 ………………………………… (77)
5.3　Legendre(勒让德)正交多项式 …………………………… (79)
5.4　函数的正交多项式展开 …………………………………… (80)
5.5　曲线拟合的最小二乘法 …………………………………… (81)
第六章　数值积分 ……………………………………………… (84)
6.1　插值型求积公式的构造 …………………………………… (84)
6.2　Newton-Cotes(牛顿-柯特斯)求积公式 ………………… (85)
6.2.1　公式推导 ……………………………………………… (85)
6.2.2　误差分析 ……………………………………………… (87)
6.2.3　Newton-Cotes 公式编程 ……………………………… (89)
6.3　复合求积公式 ……………………………………………… (89)
6.3.1　公式推导 ……………………………………………… (89)
6.3.2　误差分析 ……………………………………………… (90)
6.3.3　复合求积公式编程 …………………………………… (92)
6.4　Romberg(龙贝格)求积公式 ……………………………… (95)
6.4.1　积分步长的自动选择 ………………………………… (95)
6.4.2　Romberg 积分算法 …………………………………… (96)
6.4.3　Romberg 求积公式编程 ……………………………… (99)
6.5　Gauss 求积公式 …………………………………………… (101)
6.5.1　Gauss 点 ……………………………………………… (101)
6.5.2　Gauss-Legendre 公式 ………………………………… (102)
6.5.3　Gauss 公式的余项 …………………………………… (103)
6.5.4　Gauss 公式的稳定性 ………………………………… (103)
6.5.5　Gauss-Legendre 公式编程 …………………………… (104)
第七章　矩阵的特征值与特征向量的计算 …………………… (106)
7.1　幂法与反幂法 ……………………………………………… (107)
7.1.1　幂法 …………………………………………………… (107)
7.1.2　幂法编程 ……………………………………………… (108)
7.1.3　原点平移法 …………………………………………… (110)
7.1.4　反幂法 ………………………………………………… (112)

7.1.5 反幂法编程 …………………………………… (113)

7.2 Jacobi(雅可比)方法 …………………………………… (115)

7.2.1 Jacobi 方法的理论基础 …………………………………… (115)

7.2.2 旋转变换 …………………………………… (116)

7.2.3 Jacobi 方法 …………………………………… (117)

7.2.4 Jacobi 法编程 …………………………………… (121)

7.3 QR 算法 …………………………………… (122)

7.3.1 QR 算法原理 …………………………………… (123)

7.3.2 Schmit(施密特)正交化的 QR 分解方法 …………………………………… (124)

7.3.3 基于 Householder(豪斯霍尔德)变换的 QR 分解方法 …………………………………… (126)

7.3.4 基于 Givens(吉文斯)变换的 QR 分解方法 …………………………………… (130)

7.3.5 QR 算法编程 …………………………………… (133)

第八章 非线性方程求根 …………………………………… (137)

8.1 二分法 …………………………………… (137)

8.1.1 二分法原理 …………………………………… (137)

8.1.2 二分法编程 …………………………………… (139)

8.2 迭代法 …………………………………… (141)

8.2.1 迭代法原理 …………………………………… (141)

8.2.2 迭代法编程 …………………………………… (142)

8.2.3 迭代公式的加工 …………………………………… (143)

8.2.4 Aitken(艾特肯)法 …………………………………… (143)

8.3 Newton 法 …………………………………… (144)

8.3.1 Newton 法计算公式 …………………………………… (144)

8.3.2 Newton 法编程 …………………………………… (146)

8.4 弦截法 …………………………………… (147)

8.4.1 弦截法原理 …………………………………… (147)

8.4.2 弦截法编程 …………………………………… (148)

8.5 抛物线法 …………………………………… (149)

8.5.1 抛物线法原理 …………………………………… (149)

8.5.2 抛物线法编程 …………………………………… (152)

第九章 常微分方程初值问题的数值解法 …………………………………… (154)

9.1 Euler(欧拉)公式 …………………………………… (154)

9.1.1 Euler 公式的推导 …………………………………… (154)

9.1.2 Euler公式编程 …… (155)
9.2 后退Euler公式 …… (156)
9.2.1 后退Euler公式的推导 …… (156)
9.2.2 后退Euler公式编程 …… (157)
9.3 梯形Euler公式 …… (159)
9.3.1 梯形Euler公式的推导 …… (159)
9.3.2 梯形Euler公式编程 …… (159)
9.4 改进的Euler公式 …… (161)
9.4.1 改进Euler公式的推导 …… (161)
9.4.2 改进Euler公式编程 …… (162)
9.5 Euler两步法 …… (163)
9.6 Runge-Kutta(龙格-库塔)方法 …… (164)
9.6.1 二阶Runge-Kutta方法 …… (164)
9.6.2 高阶Runge-Kutta方法 …… (165)
9.6.3 四阶Runge-Kutta方法编程 …… (168)
9.7 高阶微分方程或一阶微分方程组求解 …… (169)
第十章 常微分方程边值问题的数值解法 …… (172)
10.1 试射法 …… (172)
10.2 解微分方程边值问题的差分方法 …… (175)
10.2.1 数值微分格式 …… (175)
10.2.2 边值问题的差分算法 …… (178)
第十一章 偏微分方程的数值方法基础 …… (181)
11.1 椭圆型方程 …… (183)
11.1.1 Laplace(拉普拉斯)差分方程 …… (183)
11.1.2 线性方程组的建立 …… (185)
11.1.3 边界的导数 …… (186)
11.1.4 求解Laplace差分方程的迭代法 …… (187)
11.1.5 Poisson(泊松)方程和Helmholtz(亥姆霍兹)方程 …… (189)
11.2 抛物型方程 …… (190)
11.2.1 热传导方程 …… (190)
11.2.2 差分方程的推导 …… (190)
11.2.3 Crank-Nicholson(克兰克-尼科尔森)方法 …… (193)
11.3 双曲型方程 …… (195)
11.3.1 波动方程 …… (195)

11.3.2 微分方程的导出 …………………………………………………… (195)
11.3.3 计算初值的确定 …………………………………………………… (197)
11.3.4 D'Alembert(达朗贝尔)算法 ………………………………………… (198)
第十二章 海洋工程典型问题的数值计算 ………………………………… (200)
12.1 港口工程项目比选的层次分析 ………………………………………… (200)
12.1.1 层次分析法的基本原理 …………………………………………… (200)
12.1.2 码头设计方案选优的层次分析 …………………………………… (203)
12.1.3 结语 ……………………………………………………………… (206)
12.2 年极值水位的灰色马尔科夫预报模型 ………………………………… (206)
12.2.1 改进的GM(1,1)求解方法 ……………………………………… (206)
12.2.2 马尔科夫预报模型 ………………………………………………… (208)
12.2.3 灰色马尔科夫预报原理 …………………………………………… (208)
12.2.4 年极值水位的灰色马尔科夫预报 ………………………………… (211)
12.2.5 结语 ……………………………………………………………… (212)
12.3 长期极值波高的Weibull(威布尔)统计分布 …………………………… (212)
12.3.1 Weibull分布 ……………………………………………………… (212)
12.3.2 非线性最小二乘法的原理 ………………………………………… (213)
12.3.3 对Weibull分布参数的拟合 ……………………………………… (214)
12.3.4 分布拟合的检验 …………………………………………………… (214)
12.3.5 工程算例 ………………………………………………………… (215)
12.3.6 结语 ……………………………………………………………… (217)
12.4 基于射线理论的波浪折射模型 ………………………………………… (218)
12.4.1 基本方程的导出 …………………………………………………… (218)
12.4.2 数值求解微分方程组 ……………………………………………… (219)
12.4.3 数值计算实例 ……………………………………………………… (221)
12.5 平直岸线上突堤建设后泥沙淤积计算 ………………………………… (222)
12.5.1 岸线变形计算的一线模型 ………………………………………… (222)
12.5.2 岸线变形计算的数值方法 ………………………………………… (227)
12.6 海洋油田开发中风浪联合设计标准 …………………………………… (230)
12.6.1 PBGUML分布 …………………………………………………… (231)
12.6.2 PBGUML在海洋平台设计中的应用 ……………………………… (233)
12.6.3 不同风浪参数选取标准的比较 …………………………………… (235)
12.6.4 结语 ……………………………………………………………… (236)
12.7 Stokes(斯托克斯)的5阶波浪理论 ………………………………………… (236)

12.7.1　Stokes 的 5 阶波计算原理 …………………………… (237)
12.7.2　算法流程 ……………………………………………… (239)
12.7.3　工程算例 ……………………………………………… (239)
12.8　导管架海洋平台的动力响应分析 ……………………… (240)
12.8.1　由波谱模拟波浪的方法 ……………………………… (241)
12.8.2　波浪载荷下的结构运动方程 ………………………… (244)
12.8.3　波浪载荷下结构响应的求解 ………………………… (247)
12.8.4　白噪声地震激励下的运动方程及其求解 …………… (248)
12.8.5　数值模拟实例 ………………………………………… (249)
12.9　导管架海洋平台的模态参数识别 ……………………… (252)
12.9.1　标量型 ARMA 方法的原理 …………………………… (252)
12.9.2　标量型 ARMA 方法的模态识别过程 ………………… (257)
12.9.3　工程算例 ……………………………………………… (258)
12.10　基于局部测量的导管架海洋平台的损伤检测 ……… (261)
12.10.1　损伤检测算法 ……………………………………… (262)
12.10.2　数值模拟验证 ……………………………………… (265)
12.10.3　结语 ………………………………………………… (270)
第十三章　Matlab 编程基础 ……………………………………… (272)
13.1　Matlab 简介 ……………………………………………… (272)
13.1.1　变量 …………………………………………………… (273)
13.1.2　常用函数 ……………………………………………… (273)
13.1.3　一些特殊的控制键 …………………………………… (274)
13.1.4　帮助 …………………………………………………… (274)
13.1.5　结束 Matlab 程序运行 ………………………………… (274)
13.2　数组 ……………………………………………………… (275)
13.2.1　数组的创建 …………………………………………… (275)
13.2.2　数组中元素的引用和数组的变形 …………………… (276)
13.2.3　数组的运算 …………………………………………… (277)
13.2.4　数组的操作 …………………………………………… (277)
13.3　矩阵 ……………………………………………………… (280)
13.3.1　矩阵的生成 …………………………………………… (280)
13.3.2　矩阵的运算 …………………………………………… (281)
13.4　Matlab 语言程序设计 …………………………………… (282)
13.4.1　M 文件 ………………………………………………… (282)

13.4.2 程序流程语句 …………………………………………… (283)
13.5 图形的绘制 ………………………………………………… (286)
13.5.1 二维图形 ……………………………………………… (287)
13.5.2 三维图形 ……………………………………………… (287)
13.5.3 图轴变换 ……………………………………………… (288)
13.6 程序代码的向量化 ……………………………………… (288)
习题 ………………………………………………………………… (290)
参考文献 …………………………………………………………… (297)

第一章 绪论

本章介绍数值计算方法的研究对象、内容和特点，讨论误差、有效数字的相关概念，并提出数值计算中应当注意的若干问题。

1.1 数值计算方法的研究对象和特点

随着海洋资源的开发与海洋工程技术的迅速发展，大量的复杂计算成为结构设计的前提条件。因此，探寻适合计算机使用的数值计算方法是科研工作的重要保证。

用计算机解决工程计算问题的一般过程，可以概括为图 1.1.1。

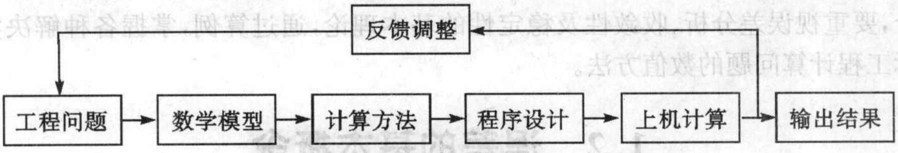

图 1.1.1 利用计算机解决工程问题的流程

为了解决工程问题，通常应用有关科学知识和数学理论建立数学模型，选择合适的计算方法，编制程序，上机算出结果。所谓数值计算方法就是研究用计算机解决数学问题的数值方法及其理论。其内容包括误差理论、线性与非线性方程(组)的数值解、矩阵的特征值与特征向量计算、插值方法、线性拟合与函数逼近、数值积分与数值微分、常微分方程与偏微分方程数值解等。

数值计算方法是一门与计算机使用密切结合的数学课程。它既有纯数学高度抽象性与严密科学性的特点，又有应用广泛性与高度技术性的特点。以求解线性方程组为例，用 Cramer(克拉默)法则求解一个 n 阶线性方程组，要算 $n+1$ 个 n 阶行列式，总共需要 $(n-1)(n+1)n!$ 次乘法。若 n 等于 20，则求解方程组时大约要做 10^{20} 次乘法。如此大的工作量，即使是运算速度为每秒百亿次的电子计算机去做，也要连续工作数千年才能完成，显然这是没有实际意义的。

而采用消元法,求解一个 n 阶线性方程组大约需要($n^3/3+n^2$)次乘法。对于一个20阶的方程组,即使使用一台小型计算器也能很快解出来。由此例可知:合适算法的选取是科学计算成败的关键。此外,为了提供效率,应根据方程的特点,研究满足计算机运算精度要求的、节省机时的有效算法及其相关理论。在算法的实现过程中,还要根据计算机的容量、字长、速度等指标,研究具体的求解步骤和程序设计技巧。有的方法在理论上虽不够严密,但通过实际运算和结果的对比分析,证明是行之有效的方法,也应该采用。数值计算方法的特点可归纳如下:

(1)数值算法要面向计算机。算法只包括加、减、乘、除运算和逻辑运算,是计算机能直接处理的。

(2)数值算法要有可靠的理论分析。在此基础上,能达到精度要求,保证算法的收敛性,还要对误差进行分析。

(3)数值算法要有好的计算复杂性。时间复杂性好是指节省时间,空间复杂性好是指节省存储量,这关系到算法能否在计算机上实现。

(4)数值算法要有数值试验。任何一个算法除了从理论上要满足上述三点外,还应通过数值试验证明其有效性。

根据上述特点,在实际应用时,要注意方法处理的技巧及其与计算机的结合,要重视误差分析、收敛性及稳定性的基本理论,通过算例,掌握各种解决实际工程计算问题的数值方法。

1.2 误差的基本概念

数值计算往往是近似计算,即实际计算结果与理论结果之间存在着差值,此值称为误差。数值分析的目的之一是将误差控制在容许范围内或者对误差有所估计。

1.2.1 误差的来源

误差有多种类型。用计算机解决科学计算问题首先要建立数学模型,它是对被描述的实际问题进行抽象、简化而得到的,因而是近似的,我们把数学模型与实际问题之间的误差称为模型误差。由于这种误差难以用数量表示,通常都假定数学模型是合理的,这种误差可忽略不计。

在数学模型中往往还有一些根据观测得到的物理量,如波高、周期、结构尺寸等,这些参量受测量工具及手段的影响,测量的结果不可能绝对准确,这种误差称为观测误差。

在数学模型不能得到精确解时，通常要用数值方法求它的近似解，其近似解与精确解之间的误差称为截断误差。例如，函数 $f(x)$ 用 Taylor（泰勒）多项式

$$P_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \tag{1.2.1}$$

近似代替时，有误差

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1} \tag{1.2.2}$$

式中，ξ 在 0 与 x 之间。这种误差就是截断误差。

有了求解数学问题的计算公式以后，用计算机进行数值计算时，由于计算机的字长有限，由此产生的误差以及计算过程又可能产生的误差称为舍入误差。例如，用 3.141 6 近似代替 π 产生的误差。

观测误差和原始数据的舍入误差，就其来源说，有所不同，但就其对计算结果的影响看，却完全一样。数学描述和实际问题之间的模型误差，往往是计算工作者不能独立解决的，甚至是尚待研究的课题。基于这些原因，在数值计算方法课程中所涉及的误差，一般指舍入误差和截断误差。讨论它们在计算过程中的传播和对计算结果的影响；研究控制它们的影响以保证最终结果有足够的精度；既希望解决数值问题的算法简便而有效，又想使最终结果准确而可靠。

1.2.2　绝对误差和相对误差

设变量的精确值用 x 表示，其近似值为 x^*，记

$$e(x^*)=x^*-x \tag{1.2.3}$$

称 $e(x^*)$ 为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。当 $e(x^*)>0$ 时，近似值 x^* 偏大，叫做强近似值；当 $e(x^*)<0$ 时，近似值 x^* 偏小，叫做弱近似值。

准确值 x 一般是未知的，因而绝对误差 $e(x^*)$ 也是未知的，但通常可以估计出绝对误差的一个上界，即可以找出一个正数 η，使

$$|e(x^*)|\leqslant\eta \tag{1.2.4}$$

实践中用 $|e(x^*)|$ 尽可能小的上界 $\varepsilon(x^*)$ 估计 x^* 的误差，称 $\varepsilon(x^*)$ 为 x^* 的绝对误差限（或误差限）。

例 1.2.1　令 $x=\pi=3.141\,592\,65\cdots$，若取 $\pi^*=3.14$，则

$$|e(x^*)|\leqslant 0.002$$

$\varepsilon(x^*)=0.002$ 就可以作为用 π^* 近似表示 π 的绝对误差限。

显然，误差限总是正数，且

$$|e(x^*)|\leqslant\varepsilon(x^*) \tag{1.2.5}$$

式(1.2.5)在应用上可采用如下写法：

$$x=x^*\pm\varepsilon(x^*) \tag{1.2.6}$$

例 1.2.2 某观测尺的读数刻度为厘米，测某一水位时，如果该值接近某一刻度 x^*，则 x^* 作为 x 的近似值时，

$$|e(x^*)|=|x^*-x|\leqslant 0.5\ \text{cm} \tag{1.2.7}$$

它的误差限是 $\varepsilon(x^*)=0.5$ cm。如果读出的水位值为 $x^*=344$，则有 $|344-x|\leqslant 0.5$，据此我们仍然不知道 x 的准确值，只知道 x 的测量值位于区间[343.5, 344.5]内。

绝对误差不能完全说明近似值的精确程度，例如，有两个量 $x_1=10\pm1$，$x_2=50\pm2$，虽然 x_1 的绝对误差限比 x_2 的绝对误差限小，但 $\varepsilon(x_2{}^*)/x_2{}^*=2/50=4\%$ 要比 $\varepsilon(x_1{}^*)/x_1{}^*=1/10=10\%$ 小，说明 $x_2{}^*=50$ 作为 x_2 的近似值远比 $x_1{}^*=10$ 作为 x_1 的近似值的近似程度要好得多。所以，除考虑误差的大小外，还应考虑准确值 x 本身的大小。我们把近似值的误差 $e(x^*)$ 与准确值 x 的比值记作

$$e_r(x^*)=\frac{e(x^*)}{x}=\frac{x^*-x}{x} \tag{1.2.8}$$

称为近似值 x^* 的相对误差。

实际计算时，由于真值 x 总是未知的，且由于

$$\frac{e(x^*)}{x}-\frac{e(x^*)}{x^*}=\frac{e(x^*)(x^*-x)}{xx^*}=\frac{[e(x^*)]^2}{x[x+e(x^*)]}=\frac{[e_r(x^*)]^2}{1+e_r(x^*)}$$

是 $e_r(x^*)$ 的二次项，故当 $e_r(x^*)$ 较小时，常取

$$e_r(x^*)=\frac{e(x^*)}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*} \tag{1.2.9}$$

相对误差可正可负，它的绝对值的上界称为该近似值的相对误差限，记作 $\varepsilon_r(x^*)$，即

$$|e_r(x^*)|\leqslant\frac{\varepsilon(x^*)}{|x^*|}=\varepsilon_r(x^*) \tag{1.2.10}$$

1.2.3 有效数字

如果近似值 x^* 的误差限是某数位的半个单位，该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，则称 x^* 有 n 位有效数字。

例 1.2.3 令 $x=\pi=3.141\,592\,65\cdots$，取 $x^*=3.14$ 时，

$$|x^*-x|\leqslant 0.002<0.005$$

所以，$x^*=3.14$ 作为 π 的近似值时，就有 3 位有效数字；而取 $x^*=3.141\,59$