



普通高等教育规划教材
港口机械电子工程丛书

机构分析与综合的解

(机械工程专业)

张纪元 / 编著



人民交通出版社
China Communications Press



普通高等教育规划教材
港口机械电子工程丛书

TH112/41

2007

机构分析与综合的解

(机械工程专业)

张纪元 / 编著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书阐述求解机构运动分析与运动综合中多解问题多项式解的有关理论和方法。全书共分九章,其主要内容包括:平面机构、空间机构和机械手运动分析的实用有效方法,机构运动误差分析的全微分法,机构力分析和求解机器真实运动的数值方法,机构惯性力平衡的线性量独立向量法和最优化方法,机器人动力分析的凯恩方法,平面凸轮机构数值反求设计的理论和关键技术,以及机构多方案运动综合等问题的求解理论和方法等。附录介绍多项式方程组的消元理论和方法,是全书的数学基础。

本书可作为机械类研究生的教材,对机械工程技术人员、科研人员、高校教师和其他专业的研究生等都有较大的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

机构分析与综合的解 / 张纪元编著. —北京: 人民交通出版社, 2007.8
ISBN 978-7-114-06563-7

I. 机… II. 张… III. 机构学 IV. TH 112

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 069776 号

书 名: 机构分析与综合的解

著 作 者: 张纪元

责任编辑: 钱悦良

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010) 85285838, 85285995

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市吉祥印务有限公司

开 本: 787 × 1092 1/16

印 张: 20.25

字 数: 498 千

版 次: 2007 年 8 月 第 1 版

印 次: 2007 年 8 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-06563-7

印 数: 0001 - 2000 册

定 价: 36.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

前 言

机构(包括机器人机构)的分析与综合是机构学中的两大核心内容。其中,尤以机构的运动分析最为重要,因为它是机构综合和机械动力学的基础。机构的装配构形、机器人的树状解及机构的多方案综合等问题统称为机构学中的多解问题。多解问题是机构学研究中的重点和难点问题之一。

在机构学研究中,遇到的大量问题是非线性问题。对于一些可以定量描述的非线性问题通常可以归结为三种数学模型:非线性代数方程组模型、非线性微分方程组模型和非线性规划模型。例如,机构的位移分析及机构的精确点综合等问题一般都归结为一组非线性代数方程组的求解问题。机构学中多解问题的实质是求出一组非线性代数方程组的所有解或多个解。因此,非线性代数方程组的求解对机构学研究显得特别重要。能解决多解问题的全局收敛的非线性代数方程组的解法主要有同伦法、区间分析法和消元法。其中,消元法可求得多项式方程组的多项式解。多项式解便于分析和推理,是解决多解问题的最理想方法。

本书阐述求解机构运动分析与运动综合中多解问题多项式解的有关理论和方法。全书共分九章。其中,第1、第2和第3章分别介绍平面机构、空间机构和机械手运动分析的实用有效方法,重点是建立机构位置方程组和机械手位姿方程组及确定机构装配构形和机械手树状解等的理论与方法;第4章介绍机构运动误差分析的全微分法;第5章介绍机构力分析和求解机器真实运动的数值方法;第6章介绍机构惯性力平衡的线性量独立向量法和最优化方法;第7章介绍机器人动力分析的凯恩方法;第8章阐述平面凸轮机构数值反求设计的理论和关键技术;第9章介绍机构多方案运动综合等问题的求解理论和方法;附录介绍多项式方程组的消元理论和方法,是全书的数学基础。

本书有以下5个特点:

- (1)反映当前机构数值分析与数值综合的新颖理论和实用方法;
- (2)机构位置方程组和机械手位姿方程组有统一的建模格式,便于计算机自动生成和自动求解;
- (3)多项式方程组的消元理论有创新,消元方法实用有效,较好地解决了机构学中的多解问题;
- (4)众多机构分析与综合实例的求解结果有较大实用价值;
- (5)确定机构学中多解问题多项式解的计算机程序的计算效率较高,通用性较强。

作者从事机构学的教学和研究工作已有30多年。30多年来,作者专注于非线性问题的解法研究及其在机构学中的应用研究,积累了一些数值处理的经验,编制了大量的计算机程序,提出了不少实用有效算法,并将其应用于机构学的研究。本书集成了作者多年来有关机构学中多解问题的研究成果和长期从事机构学教学的丰富经验。

本书可作为机械类研究生的教材,对机械工程技术人員、科研人員、高校教师和其他专业的研究生等都有较大的参考价值。

与本书有关内容的研究工作,作者得到了国家自然科学基金(编号:58975180、59375203和59875064)、交通部科技进步“通达计划”(编号:95-04-03-07)、上海市高等学校科技发展基金(编号:97JG05055+1、03IK07和05FZ33)及上海市重点学科建设项目——港口机械电子工程(编号:T0601)等的资助。作者的同事吴钢副教授,学生牛志纲硕士、李波硕士、汪萍锋硕士和李学领硕士等,与作者合作完成了本书所涉及的部分研究课题。邹慧君教授和沈守范教授在本书的撰写过程中提出了许多宝贵建议。对以上支持本书撰写的单位和个人,作者在此一并表示衷心的感谢!

本书所需数学力学理论较深,所述内容较新,又受作者水平所限,挂一漏万和谬误不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

张纪元

2007年元月于上海

目 录

第 1 章 平面连杆机构的运动分析	1
§ 1-1 坐标变换及坐标变换矩阵	1
一、共原点笛卡儿坐标系间的旋转变换	1
二、不共原点笛卡儿坐标系间的坐标变换	3
三、齐次坐标及其变换	5
四、刚体作空间运动时的位移矩阵	7
五、绕任意轴转动的坐标变换矩阵	7
§ 1-2 封闭向量多边形法	8
一、独立封闭形个数	9
二、用封闭向量多边形法建立机构的位置方程组	9
三、机构位置方程组的求解	9
四、平面连杆机构的速度和加速度分析	10
§ 1-3 复数法	13
一、平面连杆机构位移分析的复数法	13
二、平面连杆机构速度分析的复数法	13
三、平面连杆机构加速度分析的复数法	14
§ 1-4 平面连杆机构的分类及其代号	15
一、杆组的分类及其代号	15
二、平面连杆机构的分类及其代号	15
§ 1-5 平面杆组的装配构形	16
一、平面 II 级杆组	16
二、平面 III 级杆组	19
三、平面 IV 级杆组	57
§ 1-6 平面连杆机构的装配构形	59
一、平面四杆机构	59
二、平面五杆机构	65
三、平面 II 级六杆机构	67
四、平面 III 级六杆机构	72
五、其他平面多杆高级连杆机构	79
§ 1-7 平面连杆机构极限位置的确定	82
一、确定机构极限位置的理论	82
二、确定机构极限位置的算例	83
第 2 章 空间连杆机构的运动分析	90

§ 2-1	方向余弦矩阵法	90
一、机构运动的几何等同性条件		90
二、用空间机构运动的几何等同性条件建立机构的位置方程		91
§ 2-2	完全有效元素法	92
一、矩阵闭环方程及其展开		92
二、机构位置方程组的求解		95
三、速度分析		95
四、加速度分析		95
五、完全有效元素法的特点		97
§ 2-3	确定一类空间连杆机构装配构形的程序	97
一、程序的结构及功用		97
二、程序的输入		97
§ 2-4	单闭环单自由度空间连杆机构的装配构形	100
一、空间四杆机构的装配构形		100
二、空间五杆机构的装配构形		101
三、空间六杆机构的装配构形		110
四、空间七杆机构的装配构形		121
第 3 章	机械手的位姿分析	124
§ 3-1	机械手的直接问题	124
一、机械手的位姿方程		124
二、机械手的位姿正解		125
三、机械手的速度正解		127
四、机械手的加速度正解		128
§ 3-2	机械手的间接问题	128
一、机械手的位姿逆解		128
二、机械手的速度逆解		130
三、机械手的加速度逆解		130
§ 3-3	机械手间接问题的树状解	131
一、三关节机械手的树状解		131
二、四关节机械手的树状解		136
三、五关节机械手的树状解		141
§ 3-4	机械手的绝对速度和绝对加速度	144
一、绝对位矢的递推计算公式		144
二、绝对角速度和绝对角加速度的递推计算公式		144
三、构件上点的绝对速度和绝对加速度的递推计算公式		145
第 4 章	机构的运动误差分析	150
§ 4-1	概述	150
§ 4-2	机构运动误差分析的全微分法	150
一、位置误差		150
二、速度、加速度误差		151

三、算例	152
第5章 机构的动力分析	154
§5-1 机构的力分析	154
一、引言	154
二、不考虑摩擦时的机构力分析	154
三、考虑摩擦时的平面机构力分析	155
§5-2 机器真实运动的求解	160
一、等效力学模型	160
二、运动方程式	161
三、真实运动的求解	162
第6章 平面机构的平衡	166
§6-1 平面机构平衡的基本条件	166
一、机构的总质心	166
二、机构的惯性主矢和惯性主矩	166
三、机构惯性主矢和惯性主矩的平衡条件	167
§6-2 机构惯性力平衡的线性独立向量法	168
一、线性独立向量法	168
二、用加配重的办法能完全平衡平面连杆机构惯性力的条件	170
三、最少配重数目	172
§6-3 机构惯性力平衡时配重计算的最优化方法	172
一、惯性力完全平衡的最优化方法	173
二、惯性力部分平衡的最优化方法	173
三、最优化方法	173
四、算例	173
第7章 机器人机构的动力分析	177
§7-1 刚体的转动惯量和惯量矩阵	177
一、刚体的转动惯量和回转半径	178
二、刚体对任意轴的转动惯量、惯量积和惯量矩阵	179
三、惯量矩阵的平行移轴定理	180
四、惯量椭球	181
五、惯量主轴	182
六、刚体的动量矩和动能的惯量矩阵表示	183
§7-2 机器人动力学分析的凯恩方程	186
一、刚体的凯恩动力学方程	186
二、机械手的偏速度和偏角速度	188
三、机械手的关节驱动力和驱动力矩	191
四、机械手的关约束反力和约束反力矩	194
§7-3 机器人动力学分析的拉格郎日方法	198
一、刚体的拉格郎日方程	198
二、刚体拉格郎日方程与凯恩动力学方程的相同性	199

第 8 章 平面凸轮机构的设计与反求设计	200
§ 8-1 直动从动件盘状凸轮机构的设计与反求设计	200
一、直动滚子从动件盘状凸轮机构的设计	200
二、直动滚子从动件盘状凸轮机构的反求设计	204
三、直动斜底从动件盘状凸轮机构的设计	206
四、直动斜底从动件盘状凸轮机构的反求设计	208
§ 8-2 摆动从动件盘状凸轮机构的设计与反求设计	211
一、摆动滚子从动件盘状凸轮机构的设计	212
二、摆动滚子从动件盘状凸轮机构的反求设计	216
三、摆动斜底从动件盘状凸轮机构的设计	223
四、摆动斜底从动件盘状凸轮机构的反求设计	228
五、摆动平底从动件盘状凸轮机构的设计与反求设计	234
§ 8-3 平面凸轮机构数值反求设计中的关键技术	241
一、导数 $dr/d\theta$ 的计算	241
二、凸轮四大角和从动件行程的确定	243
三、推杆运动规律解析式的确定	243
§ 8-4 平面凸轮机构设计与反求设计的实例计算	243
一、直动滚子从动件盘状凸轮机构设计与反求设计的实例计算	243
二、直动斜底从动件盘状凸轮机构设计与反求设计的实例计算	245
三、摆动滚子从动件盘状凸轮机构设计与反求设计的实例计算	247
四、摆动斜底从动件盘状凸轮机构设计与反求设计的实例计算	248
五、摆动平底从动件盘状凸轮机构设计与反求设计的实例计算	250
第 9 章 机构的运动综合	252
§ 9-1 机构运动综合的解方程组法	252
一、按从动件的急回特性设计平面连杆机构	252
二、按主动件和从动件的对应位置设计平面连杆机构	259
三、按给定的连杆位置设计平面连杆机构	265
§ 9-2 空间四杆机构的运动综合	271
一、空间四杆机构的函数综合	271
二、空间四杆机构的刚体导引综合	276
§ 9-3 机构运动综合的最优化方法	281
一、数学模型的建立	282
二、优化方法的选择	283
三、优化设计实例	284
附录 非线性代数方程组的求解方法	291
§ 1 求解非线性代数方程组的一般迭代法	292
一、简单迭代法	292
二、牛顿—拉夫逊法	292
三、詹重禧法	293
§ 2 求解多元多项式方程组的消元方法	297

一、基本概念	297
二、吴方法	298
三、 $m = n$ 的基组结式消元法	302
四、 $m \geq n$ 的结式消元法	306
主要参考文献	309
一、主要引文	309
二、作者近期论著	310

第1章 平面连杆机构的运动分析

§ 1-1 坐标变换及坐标变换矩阵

在对机构进行分析与综合时,需要用到各种各样的坐标变换。本节概述各种常用的坐标变换关系^[1~4, Z10, Z13]。

一、共原点笛卡儿坐标系间的旋转变换

1. 任意两坐标系间的旋转变换矩阵

如图 1-1 所示, $O-x_1y_1z_1$ 和 $O-x_2y_2z_2$ 为两共原点的笛卡儿坐标系。设 M 点在两坐标系中的坐标列阵分别为 $[\mathbf{r}]_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ 和 $[\mathbf{r}]_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$ 。若以 $\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l$ 和 $\mathbf{k}_l$ 表示坐标轴 x_l, y_l 和 $z_l (l=1, 2)$ 上的单位矢量, 则 M 点的向径 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ 可表示为:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1 + z_1\mathbf{k}_1 = x_2\mathbf{i}_2 + y_2\mathbf{j}_2 + z_2\mathbf{k}_2$$

分别以 $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1$ 和 $\mathbf{k}_1$ 点乘上式, 则可得:

$$\begin{cases} x_1 = x_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\ y_1 = x_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\ z_1 = x_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2) + y_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2) + z_2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \end{cases}$$

若以两坐标轴间的方向余弦表示上式中相应的两单位矢量的点积, 则上式可用矩阵表示为:

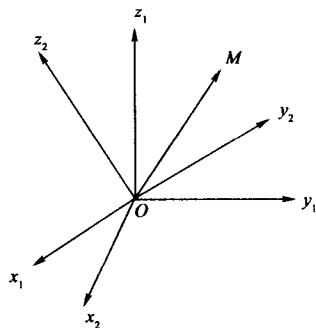


图 1-1

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1, x_2) & \cos(x_1, y_2) & \cos(x_1, z_2) \\ \cos(y_1, x_2) & \cos(y_1, y_2) & \cos(y_1, z_2) \\ \cos(z_1, x_2) & \cos(z_1, y_2) & \cos(z_1, z_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

式(1-1)可简记为:

$$[\mathbf{r}]_1 = C_{12}[\mathbf{r}]_2 \quad (1-2)$$

式中, C_{12} 代表式(1-1)中的 (3×3) 矩阵, 称为坐标系 $O-x_2y_2z_2$ 到坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 的旋转变换矩阵。由 $\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l$ 和 $\mathbf{k}_l (l=1, 2)$ 为互相正交的单位矢量及方向余弦的定义, 易知旋转变换矩阵 C_{12} 为一正交矩阵。因此, 坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 到坐标系 $O-x_2y_2z_2$ 的旋转变换矩阵 $C_{21} = C_{12}^{-1} = C_{12}^T$ 。即:

$$[\mathbf{r}]_2 = C_{21}[\mathbf{r}]_1 = C_{12}^{-1}[\mathbf{r}]_1 = C_{12}^T[\mathbf{r}]_1 \quad (1-3)$$

2. 绕坐标轴的旋转变换矩阵

(1) 绕 x 轴的旋转变换矩阵

如图 1-2 所示, 设坐标系 $O-x'y'z'$ 是将坐标系 $O-xyz$ 绕 x 轴旋转 θ 角而得, 即对着 x 轴的

正向看,将 yOz 平面沿逆时针方向绕 x 轴旋转 θ 角,得 $y'Oz'$ 平面。根据式(1-2),易知:

$$[r] = Rot(x, \theta) [r]'$$

式中, $[r]$ 和 $[r]'$ 分别是任一点 M 在 $O-xyz$ 坐标系和 $O-x'y'z'$ 坐标系中的坐标列阵, $Rot(x, \theta)$ 为绕 x 轴转 θ 角后从新坐标系 $O-x'y'z'$ 到老坐标系 $O-xyz$ 的旋转变换矩阵,其表达式为:

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

(2) 绕 y 轴的旋转变换矩阵

如图 1-3 所示,若将坐标系 $O-xyz$ 绕其 y 轴旋转 θ 角,得新坐标系 $O-x'y'z'$,仿上可得绕 y 轴转 θ 角后,从新坐标系 $O-x'y'z'$ 到老坐标系 $O-xyz$ 的旋转变换矩阵 $Rot(y, \theta)$,其表达式为:

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

$$[r] = Rot(y, \theta) [r]'$$

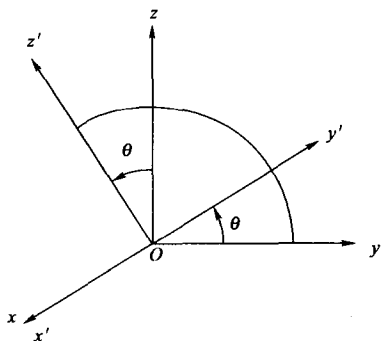


图 1-2

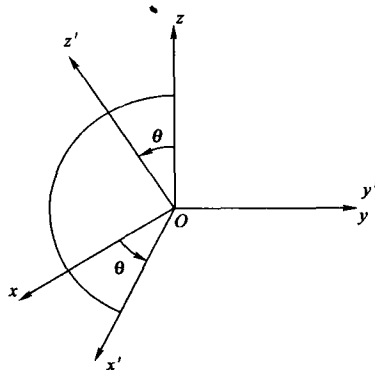


图 1-3

(3) 绕 z 轴的旋转变换矩阵

如图 1-4 所示,若将坐标系 $O-xyz$ 绕其 z 轴旋转 θ 角,得新坐标系 $O-x'y'z'$,则新坐标系 $O-x'y'z'$ 到老坐标系 $O-xyz$ 的旋转变换矩阵为:

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

$$[r] = Rot(z, \theta) [r]'$$

3. 以欧拉角表示的旋转变换矩阵

如图 1-5 所示,设坐标平面 x_1Oy_1 与 x_2Oy_2 的交线(即节线)为 ON 。对着 z_1 轴正向看,在 x_1Oy_1 平面内轴 Ox_1 沿逆时针方向转到与节线 ON 重合时的角度 α 称为进动角;对着节线 ON 的正向看,在 z_1Oz_2 平面内轴 Oz_1 沿逆时针方向转到与轴 Oz_2 重合时的角度 β 称为章动角;对着 z_2 轴正向看,在 x_2Oy_2 平面内节线 ON 沿逆时针方向转到与轴 Ox_2 重合

时的角度 γ 称为自转角。 α 、 β 和 γ 统称为坐标系 $O-x_2y_2z_2$ 对坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 的 3 个欧拉角。将坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 依次作 3 个运动: 绕 z_1 轴转 α 角、绕节线 ON 转 β 角和绕 z_2 轴转 γ 角即得坐标系 $O-x_2y_2z_2$ 。因此, 可得欧拉角表示的旋转变换矩阵 C_{12} 的表达式为:

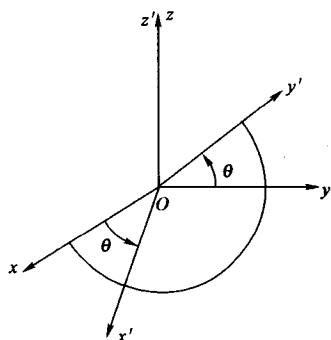


图 1-4

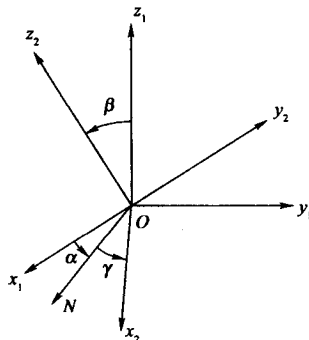


图 1-5

$$C_{12} = Rot(Z_1, \alpha) Rot(\overline{ON}, \beta) Rot(z_2, \gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [c_{ij}] \quad (1-7)$$

其中, C_{12} 中的各元素为:

$$\begin{cases} c_{11} = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ c_{12} = -(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\ c_{13} = \sin\alpha\sin\beta \\ c_{21} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ c_{22} = -(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\ c_{23} = -\cos\alpha\sin\beta \\ c_{31} = \sin\beta\sin\gamma \\ c_{32} = \sin\beta\cos\gamma \\ c_{33} = \cos\beta \end{cases} \quad (1-8)$$

根据式(1-8), 若已知欧拉角 α 、 β 和 γ , 则可求得旋转变换矩阵 C_{12} ; 若已知 C_{12} , 则可进一步求得坐标系 $O-x_2y_2z_2$ 对坐标系 $O-x_1y_1z_1$ 的 3 个欧拉角 α 、 β 和 γ 。

应当指出的是: 由于一个矢量有其起点和终点, 因此一个矢量的坐标表达式仅与坐标轴的方向有关, 而与坐标系的原点无关。也即: 矢量的坐标变换, 只需用到旋转变换矩阵。

二、不共原点笛卡儿坐标系间的坐标变换

如图 1-6 所示, 设 M 点在坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 和 $O_2-x_2y_2z_2$ 中的坐标列阵分别为 $[r]_1$ 和

$[\mathbf{r}]_2$, 原点 O_2 在坐标系 $O_1 - x_1 y_1 z_1$ 中的坐标列阵为 $[\mathbf{r}_{O_2}]$, 坐标系 $O_2 - x_2 y_2 z_2$ 到坐标系 $O_1 - x_1 y_1 z_1$ 的旋转变换矩阵为 C_{12} ; 若以 O_2 为原点, 引进与 $O_1 - x_1 y_1 z_1$ 平行的坐标系 $O_2 - x'_1 y'_1 z'_1$; 则 M 点在 $O_2 - x'_1 y'_1 z'_1$ 坐标系中的坐标列阵为 $[\mathbf{r}]'_1 = C_{12}[\mathbf{r}]_2$, 因 $\overrightarrow{O_1 M} = \overrightarrow{O_2 M} + \overrightarrow{O_1 O_2}$, 故得:

$$[\mathbf{r}]_1 = C_{12}[\mathbf{r}]_2 + [\mathbf{r}_{O_2}] \quad (1-9)$$

例 1-1 如图 1-7 所示的楔块为一五面体, 其 6 个顶点 $A_1 \sim A_6$ 在与楔块相固联的坐标系 $O - xyz$ 中的坐标见图。在楔块未运动时, 楔块坐标系 $O - xyz$ 与固定坐标系 $O_0 - x_0 y_0 z_0$ 相重合。若将楔块先绕 z_0 轴转 90° , 然后再绕 y_0 轴转 90° , 最后沿 x_0 轴正向平移 4 个单位。求经上述 3 个运动后, 楔块 6 个顶点 $A_1 \sim A_6$ 在固定坐标系 $O_0 - x_0 y_0 z_0$ 中的坐标。

解: 经 2 个转动后的楔块坐标系 $O - xyz$ 的位置分别记为 $O - x_1 y_1 z_1$ 和 $O - x_2 y_2 z_2$, 则由式 (1-6) 和式 (1-4) 知, 相邻两坐标系间的旋转变换矩阵分别为:

$$C_{01} = \text{Rot}(z_0, 90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_{12} = \text{Rot}(x_1, 90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

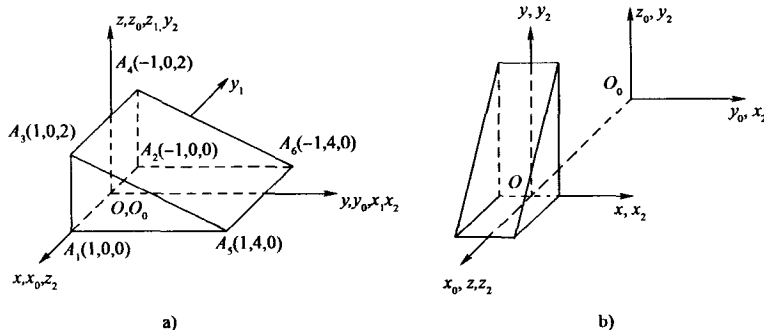


图 1-7

楔块沿 x_0 (即 z_2) 轴正向平移 4 个单位后, 原点 O 在固定坐标系 $O_0 - x_0 y_0 z_0$ 中的坐标为 $[\mathbf{r}_O]_0 = [4, 0, 0]^T$. 因此由式 (1-9) 知, 经 3 个运动后的楔块坐标系 $O - xyz$ 到固定坐标系 $O_0 - x_0 y_0 z_0$ 的坐标变换矩阵为: $[\mathbf{r}]_0 = C_{01} C_{12} [\mathbf{r}]_2 + [\mathbf{r}_O]_0$, 即

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+z \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

以楔块 6 个顶点 $A_1 \sim A_6$ 在楔块坐标系 $O - xyz$ 中的坐标代入上式, 即得所求:

$$[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

三、齐次坐标及其变换

1. 齐次坐标

不同时为零的任意四个数 $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 称为三维空间点的齐次坐标。一个点的齐次坐标 $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 与该点的直角坐标 $[x, y, z]^T$ 间的关系为:

$$\begin{cases} x = x_1/x_4 \\ y = x_2/x_4 \\ z = x_3/x_4 \end{cases} \quad x_4 \neq 0 \quad (1-10)$$

关于齐次坐标,下面几点值得注意:

①齐次坐标不是单值的。只要 $\lambda \neq 0$,齐次坐标 $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 和 $\lambda[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 均表示三维空间中的同一个点。

②只有当 $x_4 \neq 0$ 时,齐次坐标 $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 才能确定三维空间中的一个点。

③原点的齐次坐标为 $[0, 0, 0, x_4 \neq 0]^T$;而 $[x_1 \neq 0, 0, 0, 0]^T$ 、 $[0, x_2 \neq 0, 0, 0]^T$ 和 $[0, 0, x_3 \neq 0, 0]^T$ 分别表示 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的无穷远点,也即表示 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴。

④为简便起见,在机构学中,一个点的齐次坐标的第4个分量特取为 $x_4 = 1$,于是点 $[x, y, z]^T$ 的齐次坐标为 $[x, y, z, 1]^T$ 。

⑤一个矢量的齐次坐标的第4个分量为 $x_4 = 0$;即三维矢量 $[x, y, z]^T$ 的齐次坐标为 $[x, y, z, 0]^T$ 。这是因为一个矢量的齐次坐标是其终点和起点的齐次坐标之差的原因。

2. 齐次坐标变换矩阵

参见图1-6,若记 M 点在坐标系 $O_1 - x_1y_1z_1$ 和 $O_2 - x_2y_2z_2$ 中的齐次坐标分别为 $\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_1$ 和 $\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_2$,则根据式(1-9)可得:

$$\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} C_{12} & [r_{02}] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_2 = T_{12} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_2 \quad (1-11)$$

式中,

$$T_{12} = \begin{bmatrix} C_{12} & [r_{02}] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

称为坐标系 $O_2 - x_2y_2z_2$ 到坐标系 $O_1 - x_1y_1z_1$ 的齐次坐标变换矩阵。 T_{12} 为一个 (4×4) 非奇异矩阵。其 (3×3) 的主子矩阵为式(1-1)中的旋转变换矩阵 C_{12} ,而第4列实为原点 O_2 对坐标系 $O_1 - x_1y_1z_1$ 的齐次坐标列阵。易知,坐标系 $O_1 - x_1y_1z_1$ 到坐标系 $O_2 - x_2y_2z_2$ 的齐次坐标变换矩阵为:

$$T_{21} = T_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} C_{12}^T & -C_{12}^T[r_{02}] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

即:

$$\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_2 = T_{21} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}_1 \quad (1-14)$$

3. D—H 矩阵

在空间机构的分析与综合中,广泛地应用着一种特殊的齐次坐标变换矩阵,即D—H矩

阵。图 1-8 所示的 2 个坐标系的配置特点是: x_j 轴是 z_i 轴和 z_j 轴的公垂线, o'_i 和 o_j 是 2 个垂足。为表达两坐标系间的齐次坐标变换关系, 需用到 4 个参数: d_i 、 θ_{ji} 、 h_j 和 α_{ji} 。它们的含意为:

d_i —— x_i 轴到 x_j 轴的有向距离, $d_i = \overline{O_i O'_i}$; 当有向线段 $\overline{O_i O'_i}$ 的方向与 z_i 轴正向相同时, d_i 为正值; 反之, d_i 为负值。

θ_{ji} —— x_i 轴到 x_j 轴的有向夹角; 即对着 z_i 轴正向看, x_i 轴绕 z_i 轴沿逆时针方向转到与 x_j 轴平行时的角度。

h_j —— z_i 轴到 z_j 轴的有向距离, $h_j = \overline{O'_i O_j}$; 当有向线段 $\overline{O'_i O_j}$ 的方向与 x_j 轴正向相同时, h_j 为正值; 反之, h_j 为负值。

α_{ji} —— z_i 轴到 z_j 轴的有向夹角; 即对着 x_j 轴正向看, z_i 轴绕 x_j 轴沿逆时针方向转到与 z_j 轴平行时的角度。

在上述 4 个参数中, d_i 和 θ_{ji} 描述了异面轴线 x_i 和 x_j 的几何关系, 而 h_j 和 α_{ji} 则描述了异面轴线 z_i 和 z_j 的几何关系。根据 4 个参数的定义, 坐标系 $O_j - x_j y_j z_j$ (y_j 轴略画, 由右手法定则, 下同) 可视作坐标系 $O_i - x_i y_i z_i$ 经 2 个螺旋运动所得。一个是 x_i 轴沿 z_i 轴的螺旋运动 (d_i , θ_{ji}); 另一个是 z_i 轴沿 x_j 轴的螺旋运动 (h_j , α_{ji})。因此, 坐标系 $O_j - x_j y_j z_j$ 到坐标系 $O_i - x_i y_i z_i$ 的齐次坐标变换矩阵为:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Rot}(z_i, \theta_{ji}) & [r_{O'_i}] \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Rot}(x_j, \alpha_{ji}) & [r'_{O_j}] \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} & 0 & 0 \\ \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h_j \\ 0 & \cos\alpha_{ji} & -\sin\alpha_{ji} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{ji} & \cos\alpha_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

展开上式, 可得:

$$T_{ij} = T_{ij}(d_i, \theta_{ji}, h_j, \alpha_{ji}) = \begin{bmatrix} \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji}\cos\alpha_{ji} & \sin\theta_{ji}\sin\alpha_{ji} & h_j\cos\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\alpha_{ji} & -\cos\theta_{ji}\sin\alpha_{ji} & h_j\sin\theta_{ji} \\ 0 & \sin\alpha_{ji} & \cos\alpha_{ji} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{ij} & [r_{O'_i}] \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

式中, C_{ij} 是 T_{ij} 中的 (3×3) 主子矩阵, 也即 j 坐标系到 i 坐标系的旋转变换矩阵; 而 $[r_{O'_i}]$ 为原点 O'_i 在 i 坐标系中的坐标列阵。

$$C_{ij} = C_{ij}(\theta_{ji}, \alpha_{ji}) = \begin{bmatrix} \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji}\cos\alpha_{ji} & \sin\theta_{ji}\sin\alpha_{ji} \\ \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\alpha_{ji} & -\cos\theta_{ji}\sin\alpha_{ji} \\ 0 & \sin\alpha_{ji} & \cos\alpha_{ji} \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

由式(1-13)易知, i 坐标系到 j 坐标系的齐次坐标变换矩阵(D—H 矩阵)为:

$$T_{ji} = T_{ji}(d_i, \theta_{ji}, h_j, \alpha_{ji}) = T_{ij}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_{ji} & \sin\theta_{ji} & 0 & -h_j \\ -\sin\theta_{ji}\cos\alpha_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\alpha_{ji} & \sin\alpha_{ji} & -d_i\sin\alpha_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\sin\alpha_{ji} & -\cos\theta_{ji}\sin\alpha_{ji} & \cos\alpha_{ji} & -d_i\cos\alpha_{ji} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

四、刚体作空间运动时的位移矩阵

在进行空间机构的刚体导引综合时,必然要涉及刚体空间位置间的位移描述。如图 1-9 所示,当刚体从位置 1 运动到位置 j 时,刚体上的两点 P 和 Q 分别从 P_1 、 Q_1 运动到 P_j 、 Q_j 位置。设 $O-xyz$ 为固定参考系(简称为 0 坐标系),与刚体相固联的某一动坐标系在位置 1 时处于 $P_1-x_1y_1z_1$ 位置(简称为 1 坐标系);在位置 j 时处于 $P_j-x_jy_jz_j$ 位置(简称为 j 坐标系);并设 1 坐标系和 0 坐标系平行。若以 C_{ij} 表示 j 坐标系到 i 坐标系的旋转变换矩阵, C_{ij} 为正交矩阵,其中, $C_{01} = C_{10} = I$ (单位矩阵);以 $[p_i]^{(k)}$ 和 $[q_i]^{(k)}$ ($i=1, j; k=0, 1, j$) 表示点 P_i 和 Q_i 在 k 坐标系中的坐标列阵,因 $\overrightarrow{OQ_j} = \overrightarrow{OP_j} + \overrightarrow{P_jQ_j}$, 于是有:

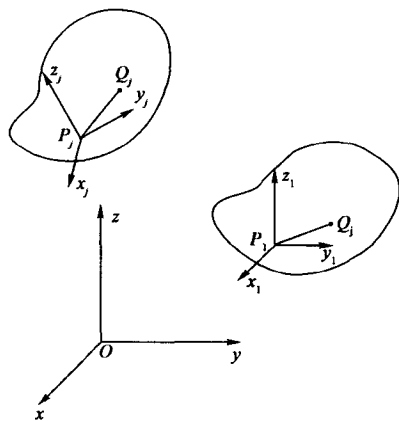


图 1-9

$$[q_j]^{(0)} = [p_j]^{(0)} + [\overrightarrow{P_jQ_j}]^{(0)} = [p_j]^{(0)} + C_{01}C_{1j}[\overrightarrow{P_jQ_j}]^{(1)} = [p_j]^{(0)} + C_{1j}[\overrightarrow{P_jQ_j}]^{(1)}$$

根据刚体的性质知: $[\overrightarrow{P_jQ_j}]^{(j)} = [\overrightarrow{P_1Q_1}]^{(1)} = C_{10}[\overrightarrow{P_1Q_1}]^{(0)} = [\overrightarrow{P_1Q_1}]^{(0)} = [q_1]^{(0)} - [p_1]^{(0)}$, 代入上式, 可得:

$$[q_j]^{(0)} = [p_j]^{(0)} + C_{1j}([q_1]^{(0)} - [p_1]^{(0)}) \quad (1-18)$$

若以齐次坐标表示式(1-18), 则得:

$$\begin{bmatrix} [q_j]^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1j} & ([p_j]^{(0)} - C_{1j}[p_1]^{(0)}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [q_1]^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = T_{j1} \begin{bmatrix} [q_1]^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

式中,

$$T_{j1} = \begin{bmatrix} C_{1j} & ([p_j]^{(0)} - C_{1j}[p_1]^{(0)}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

称为刚体从位置 1 移动到位置 j 的位移矩阵。此处, T_{j1} 并不表示 1 坐标系到 j 坐标系的 D—H 矩阵。而是在已知 $[q_1]^{(0)}$ 、 $[p_1]^{(0)}$ 、 $[p_j]^{(0)}$ 和 j 坐标系到 1 坐标系的旋转变换矩阵 C_{1j} 的条件下, 根据式(1-19)可计算得刚体内任一点 Q 运动到 j 位置时的位置坐标列阵 $[q_j]^{(0)}$ 。

五、绕任意轴转动的坐标变换矩阵

如图 1-10 所示, 当一矢量 r 绕轴 ω 转 θ 角后, 到达 r_θ 位置; 其中, ω 为转轴上的单位矢量, θ 为对着 ω 的正向看, r 绕 ω 沿逆时针方向转过的角度; 现求 r_θ 的表达式。

若分别以 $(\omega \times r) \times \omega$, $\omega \times r$ 和 ω 为坐标轴正向, 建立图示的坐标系 $O-x_0y_0z_0$, 并设 r 的模为 r , r 和 ω 的夹角为 δ , 则 x_0 、 y_0 和 z_0 轴上的各单位矢量分别为: