高等医药院校药学专业教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

主编／蒋秋浩

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

经 济 数 学

主　编　蒋秋浩
副主编　盛海林

东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学 / 蒋秋浩主编. —南京:东南大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-5641-0827-4

Ⅰ.经… Ⅱ.蒋… Ⅲ.经济数学 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 115639 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编 210096)

出版人:江 汉

江苏省新华书店经销 盐城印刷总厂有限责任公司

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:12.75 字数:315千字

2007年8月第1版 2007年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5641-0827-4/O·50

印数:1～3000册 定价:20.00元

前　言

一种科学，只有成功地运用数学时才达到了真正完善的地步.随着科学技术的飞速发展，数学在经济、管理等领域的应用显得越来越重要.为了让从事经济、管理的工作者更多更好地掌握经济领域中常用的数学知识和数学方法，编写一本既系统全面又通俗易懂的教材尤为重要.

本书在编写时注重数学思想的渗透，重视对数学概念的产生及发展的分析.在内容上由浅入深，既保持了数学理论的系统性，又重点突出了数学方法在经济、管理等领域中的应用.对经济、管理领域中广泛涉及的生产成本、商品需求、价格弹性及边际分析等常用概念，从数学的角度给以定量描述与分析计算.在第 10 章还介绍了经济、管理学上常用的数学模型，便于经济、管理学工作者参考查阅.

本书的第 1、2、3、4、5 章由蒋秋浩编写，第 6、7、8、9、10 章由盛海林编写.

在本书出版之际，特别要感谢王艾、李雪玲、王菲等老师为本书做了大量的校对工作，并提出了许多宝贵的意见.

尽管编者力求本书在系统性、应用性、严格性等方面达到完美统一，但囿于水平有限，加之时间仓促，谬误与不当之处恳请广大读者批评指正.

编　者

2007 年 7 月

目　录

第 1 章　函数与极限

本经济数学课程的主要内容是微积分及其应用. 微积分与初等数学是有很大区别的，初等数学研究的主要是常量及其运算，而微积分研究的主要是变量之间的依赖关系. 函数正是这种依赖关系的体现. 函数是微积分中最重要的基本概念. 本章将在复习中学有关函数内容的基础上，进一步研究函数的性质、极限和函数的连续性等基本概念，这些内容是学习本课程必需掌握好的基础知识.

1.1　函数概念

1.1.1　区间与邻域

1. 集合

集合概念是数学中一个原始的概念，就是说，它不能用更简单的概念定义，通常可把所考察的各个确定的对象汇总称为一个集合，而每个考察对象都称为这个集合的元素. 例如，全体自然数汇总起来就是一个集合，其中每个自然数就是这一集合的元素. 又如，一个教室里的学生汇总起来就是一个集合，其中每个学生就是这一集合的元素. 一般地说，所谓集合（或简称集）是指具有特定性质的一些事物的总体.

集合一般用大写的拉丁字母表示，即 $A,B,C,\cdots$；元素用小写的拉丁字母表示，即 $a,b,c,\cdots$.

集合常用的表示法有列举法和描述法两种.

用列举法表示集合，是将组成集合的所有元素一一列举在一个大括号内，且列举时不计元素的排列顺序. 例如，集合

$$A=\{1,3,5\},\quad B=\{(1,1),(1,2),(2,1)\},\quad C=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$$

分别是由有限个元素或无限个元素组成的集合.

用描述法表示集合，是把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律写在大括号内，一般的描述方法是$\{X \mid X$ 具有的性质$\}$. 例如，集合

$$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$$

表示 $x^2+y^2=1$ 上的所有点构成的集合.

设 a 是集合 A 的元素，就称集合 A 含有元素 a，或称 a 属于 A，记为 $a\in A$，其中记号“$\in$”读作“属于”；$a \overline{\in} A$ 表示 a 不属于 A，其中记号“$\overline{\in}$”读作“不属于”.

我们把不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 例如，$\{x \mid x^2<0$ 且 x 为实数$\}=\varnothing$.

2. 实数的绝对值

实数的绝对值有如下性质：

(1) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$，有 $|x| \geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$；

(2) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$，有 $|-x|=|x|$；

(3) 对于任意的 $x \in \mathbf{R}$，有 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

关于实数四则运算的绝对值，有以下的结论：对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$，恒有

(1) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$（三角不等式）；

(2) $|x-y| \geqslant ||x|-|y|| \geqslant |x|-|y|$；

(3) $|xy|=|x||y|$；

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\ (y \neq 0)$.

我们来证明结论(1)，其余的结论留给读者去完成.

证 有

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

于是

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$$

所以

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$

例 1-1 解不等式 $0<(x-2)^2<4$.

解 由绝对值性质可得

$$0<|x-2|<2$$

即有 $-2<x-2<2$ 且 $x-2 \neq 0$，所以 $0<x<4$ 且 $x \neq 2$.

3. 区间与邻域

区间是高等数学中常用的实数集，包括四种有限区间和五种无限区间.

(1) 闭区间：$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

(2) 开区间：$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$；

(3) 半开区间：$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$，$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$；

(4) 无限区间：$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$，$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty<x \leqslant b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

以上，a,b 为确定的实数，分别称为区间的左端点和右端点；闭区间 $[a,b]$，半开区间 $[a,b)$ 及 $(a,b]$，开区间 (a,b) 为有限区间；有限区间的左、右端点之间的距离 $b-a$ 称为区间长度；$+\infty$ 与 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”、“负无穷大”，它们不表示任何数，仅仅是记号.

区间在数轴上的表示如图 1-1 所示.

邻域也是在高等数学中常用的概念.

称实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 由邻域的定义知

$$U(a,\delta)=(a-\delta, a+\delta)$$

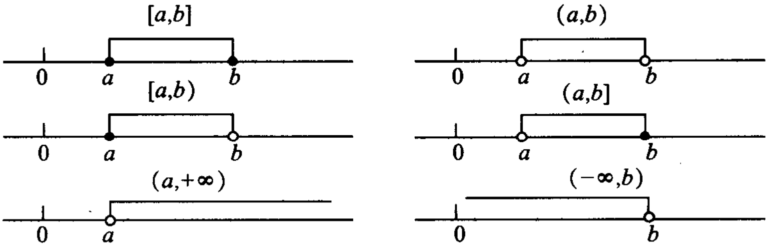


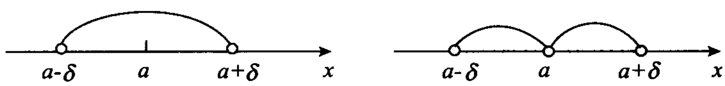
图 1-1

表示分别以 $a-\delta$，$a+\delta$ 为左、右端点，区间长度为 2δ 的开区间(见图 1-2(a)).

在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心 a，实数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，显然 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$(见图 1-2(b)).



$U(a,\delta)$　　$\mathring{U}(a,\delta)$

(a)　　(b)

图 1-2

1.1.2　函数概念

1. 变量与常量

在人们观察自然现象或社会现象的过程中，经常遇到一些量，例如温度、时间、路程、长度、面积、物价、成本、利润、收益等. 有的量在观察过程中保持固定的数值，称为常量，通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示；另一些量在观察过程中会不断变化，称为变量，通常用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示.

常量在数轴上表示为一个定点，变量在数轴上则表示为一个动点.

常量与变量是相对的，不是绝对的. 例如，重力加速度 g 在同一地点来考虑，是常量，在不同地点来考虑，是变量；又如，在一定时间间隔内，某种商品的价格，在计划经济模式中是常量，在市场经济模式中是变量.

2. 函数的概念

在研究实际问题时，所涉及的两个变量之间常会具有某种确定的关系. 例如，圆的面积 S 与半径 r 之间便存在这样的关系：对于给定的半径 r，面积 S 可按公式 $S=\pi r^2$ 唯一确定；又如，当某商品的售价 a 不变时，若知道月销售量 x，那么月销售额 y 也就确定了：它们之间的依赖关系可用公式 $y=ax$ 表示.

抽去上面例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应规则，根据这种规则，当其中一个变量在某变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量之间的这种依赖关系称为函数关系.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 称 D 为该函数

的定义域,称 x 为自变量,y 为因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 的各个值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{\,y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的值域.

在函数 $y=f(x)$ 中记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系,f 也可改用其他字母,如 F,Φ,Ψ 等.

由函数定义可以看出,函数关系和定义域是函数的两个要素,在描述一个函数时,必须说明这两个要素. 如果两个函数的对应法则 f 和定义域 D 都相同,则称这两个函数相同,否则就是不同的. 至于自变量和因变量用什么符号表示则无关紧要. 例如,函数 $y=f(x)(x\in D)$ 与 $u=f(v)(v\in D)$ 就是同一函数.

例 1-2 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有定义,必须使

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x-1\neq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x\geqslant -2, \\ x\neq 1 \end{cases}$$

故所求函数的定义域为 $[-2,1)\cup(1,+\infty)$.

例 1-3 下列各对函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\cos x, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

(2) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 注意到 $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$,所以,当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 时,有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$$

当 $(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 时,有

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=-\cos x$$

因此,虽然它们的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$,但它们的对应法则不相同,所以不是同一个函数.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同,因为它们的对应法则相同,定义域均为 $(-\infty,+\infty)$.

1.1.3 函数的表示法

函数的表示法多种多样,它反映了各种变量与变量之间关系的不同体现方法. 函数常用的表示方法有如下三种.

1. 公式法

用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系,叫做公式法.

2. 表格法

在实际应用中,常将一系列自变量与对应的函数值列成表. 它的优点是可以直接从自变量查对应的函数值. 统计数据、经济分析等各种因素之间的关系,就是常用表格形式反映的,以便从中找出规律.

3. 图示法

函数 $y=f(x)$ 在其定义域内取一个数 x 时，相应地就得到一个 y 值，在平面直角坐标系 xOy 中就以 x，y 为坐标确定一个点 $M(x,y)$，当 x 在定义域内变化时，$M(x,y)$ 就在平面上运动并描出一条曲线，这条曲线叫做函数 $y=f(x)$ 的图像. 因此，函数也可以由平面上的曲线表示，这种表示函数的方法叫做图示法. 它的优点是直观性强，函数的主要特征在图上一目了然.

以上三种方法是最常用的表示法，根据三者的特点，通常可以结合使用.

1.1.4　分段函数

一个函数在其定义域内不同部分用不同的公式表示，这种函数称为分段函数.

例如

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$$

是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数.

对分段函数求函数值时要注意自变量的取值范围，当 x 属于哪个集合时，就用该集合对应的式子计算.

如上例

$$f(1)=(x^2+1)\big|_{x=1}=2$$

$$f(-1)=(x-1)\big|_{x=-1}=-2$$

应当注意，分段表示的函数是用几个公式合起来表示一个函数，不能理解为几个函数. 经济分析当中函数常用分段函数表示.

1.2　函数的几种特性

1.2.1　函数的有界性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 定义在数集 D 上，如果存在常数 $M>0$，对任意 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界；如果不存在这样的 M，则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

特别地，若存在数 p（或 q），对任意的 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant p$（或 $f(x)\geqslant q$），则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有上界（或有下界）.

显然，函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界是指既有上界又有下界.

例 1-4　判断 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否有界.

解　因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

例 1-5　判断 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是否有下界.

解 因为对于任意 $x \in (1, +\infty)$，都有 $\frac{1}{x-1} > 0$，所以 $y = \frac{1}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 内有下界.

应该注意，函数的有界性与所取数集有关. 例如，函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，而在区间 $(0,2)$ 内无界.

1.2.2 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 在数集 D 上有定义，如果对 D 中任意两点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（或单调减少），也称函数在 D 上是单调的. 如果 D 为区间，则称 D 是 $y = f(x)$ 的单调区间.

单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的（如图 1－3 所示）；单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的（如图 1－4 所示）.

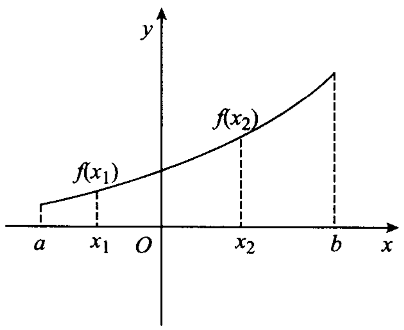


图 1－3

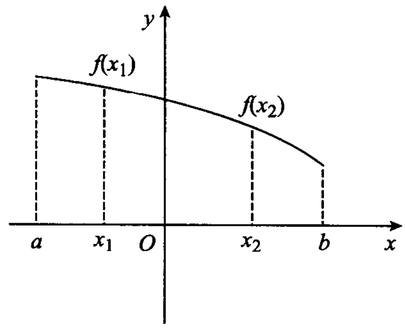


图 1－4

例 1－6 证明 $y = x^3$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上是单调增加的.

证 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，设 $x_1 < x_2$，有 $x_1^3 < x_2^3$，因此有 $f(x_1) < f(x_2)$，所以 $y = x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增加的.

有些函数在定义域上并不是单调的，但在部分区间上是单调的. 例如，$y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少，在 $(0, +\infty)$ 内单调增加，在实数域 $\mathbf{R}$ 上不是单调的.

1.2.3 函数的奇、偶性

定义 1.4 设 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意的 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$（或 $f(-x) = -f(x)$），则称 $f(x)$ 在 D 上是偶函数（或奇函数）. 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

1.2.4 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$ 定义在数集 D 上，如果存在正数 T，对于任意的 $x \in D$，使得 $f(x + T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 上是周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期.

显然，若 T 是周期函数 $f(x)$ 的周期，则 kT 也是 $f(x)$ 的周期（k 为非零整数）. 通常说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $f = \tan x$ 及 $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

1.3　反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,因为 W 是由函数值组成的数集,所以对每一个 $y_0 \in W$,必定有 $x_0 \in D$ 使得 x_0 与之对应,即 $f(x_0) = y_0$ 成立.这样的 x_0 可能不止一个,如图 1-5 所示.

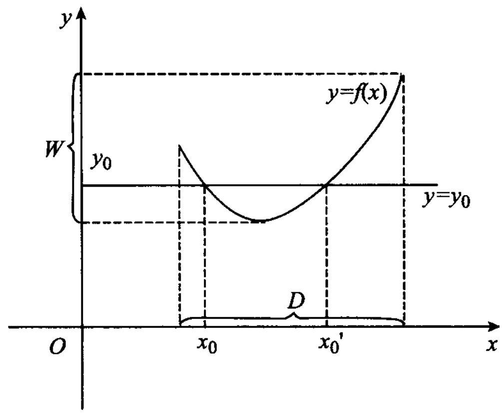


图 1-5

一般地,对于任意的 $y \in W$,至少存在一个 $x \in D$,使得 x 与 y 相对应,且满足

$$f(x) = y$$

按照函数的定义,如果把 y 看成是自变量,把 x 看成是因变量,便得到一个新的函数.称这个新的函数为 $y = f(x)$ 的反函数,记作 $x = \varphi(y)$,其定义域为 W,值域为 D.这个新的函数关系是源于函数 $y = f(x)$ 的.相对于反函数来说,称函数 $y = f(x)$ 为直接函数.

由图 1-5 可知,即使 $y = f(x)$ 是单值函数,也不能保证其反函数 $x = \varphi(y)$ 是单值函数.例如 $y = x^2$ 或 $y = \sin x$,它们都是单值函数,但它们的反函数都不是单值函数.

如果函数 $y = f(x)$ 不但是单值的而且是单调的,则其反函数 $x = \varphi(y)$ 也一定是单值并且是单调的.

设函数 $y = f(x)$ 的反函数为

$$x = \varphi(y)$$

则其在直角坐标系 xOy 上的图形与 $y = f(x)$ 的图形是一致的.习惯上,常用 x 来表示自变量,y 表示函数,所以我们可以将反函数改写成

$$y = \varphi(x)$$

由于改变了自变量和因变量的记号,因而反函数 $y = \varphi(x)$ 在直角坐标系 xOy 中的图形与 $y = f(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的(见图 1-6).

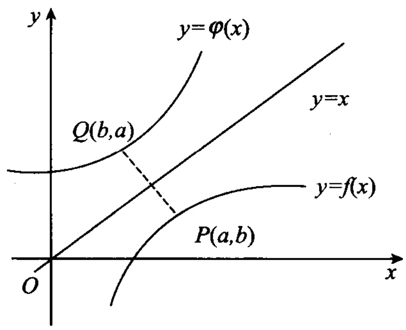


图 1-6

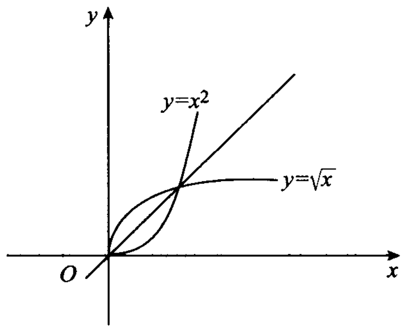


图 1-7

例 1-7 求函数 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 的反函数,并画出图形.

解 因为 $x\in[0,+\infty)$,由 $y=x^2$ 解得 $x=\sqrt{y}, y\geqslant 0$. 于是所求函数的反函数为 $y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$,其图形见图 1-7.

1.4 基本初等函数及其图形

基本初等函数是最常见、最基本的一类函数,包括常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 这些函数绝大部分我们已经比较熟悉,下面给出这些函数的简单性质和图形.

1.4.1 常量函数 $y=c$(c 为常数)

常量函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 这是最简单的一类函数,无论 x 取何值,y 都取常数 c(见图 1-8).

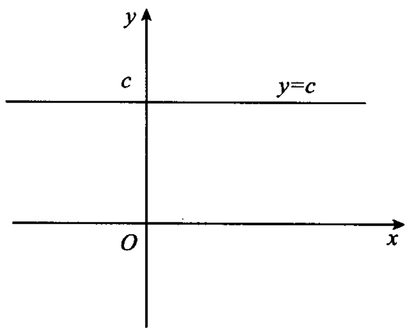


图 1-8

1.4.2 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数)

幂函数的定义域随 μ 的不同而不同. 但无论取何值,它在$(0,+\infty)$ 内都有定义,而且图形都经过(1,1) 点(见图 1-9).

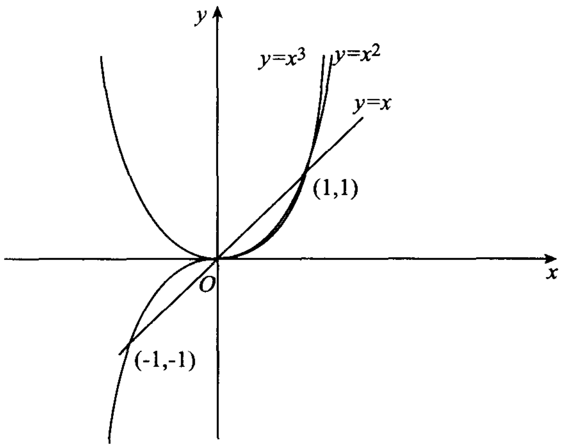


图 1-9

(1) 当 μ 为正整数时，x^μ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$. 图 1-9 给出函数 $y = x^\mu$ 当 μ 取几个不同正整数时的图像. 容易验证，当 μ 为正奇数时，函数 $y = x^\mu$ 为单调增加的奇函数；当 μ 为正偶数时，函数 $y = x^\mu$ 则为偶函数. 所以这些函数所描绘出的曲线都通过点$(0,0)$ 与$(1,1)$. 当 μ 为正奇数时还通过点$(-1, -1)$，当 μ 为正偶数时，通过点$(-1,1)$.

(2) 当 μ 为负整数时，x^μ 的定义域为$(-\infty,0)$ 和$(0, +\infty)$. 图 1-10(a) 给出了当 μ 为负奇数时的几个图像；图 1-10(b) 给出了当 μ 为负偶数时的几个图像.

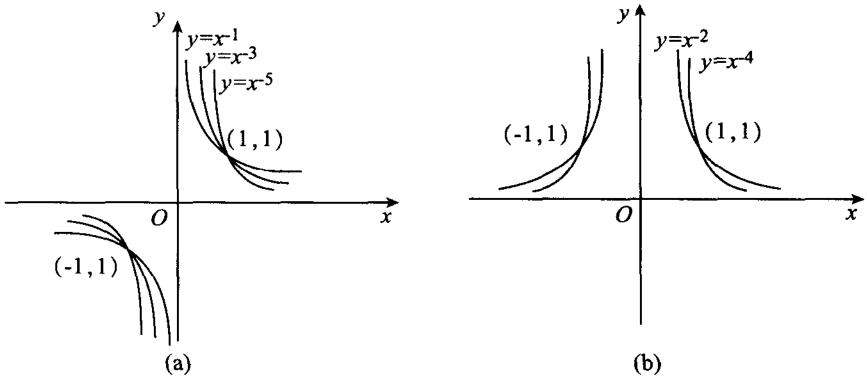


图 1-10

(3) 当 μ 为有理数时，情况较为复杂，仅举两例讨论.

例 1-8　讨论函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$，$x \in [0, +\infty)$ 的单调性，并画出图像.

解　它是函数 $y = x^2$，$x \in [0, +\infty)$ 的反函数. 函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在$[0, +\infty)$ 上单调增加，其图像如图 1-11 所示.

例 1-9　讨论函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$，$x \in (-\infty, +\infty)$ 的单调性，并画出图像.

解　它是函数 $y = x^3$ 的反函数，故在定义域上是单调增加的，其图像如图 1-12 所示.

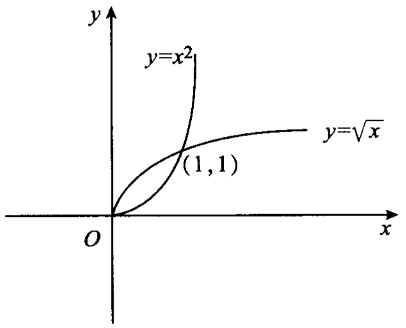


图 1-11

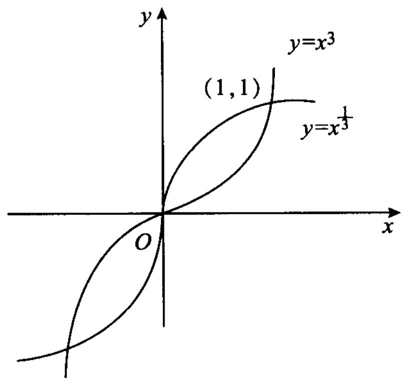


图 1-12

(4) 对于 μ 为无理数情况,规定 $y=x^\mu$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

1.4.3 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1,a$ 是常数)

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,指数函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,指数函数单调减少. 对于任何的 a,a^x 的值域都是$(0,+\infty)$,函数的图形都过$(0,1)$ 点(见图 1-13).

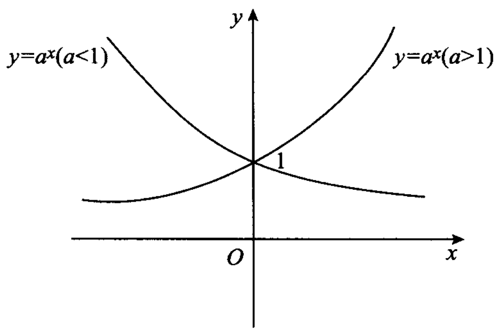


图 1-13

1.4.4 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1,a$ 是常数)

对数函数 $\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数,它的定义域为$(0,+\infty)$. $y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴右方,且通过点$(1,0)$(见图 1-14). 当 $a>1$ 时,函数单调增加,在区间$(0,1)$ 内函数值为负,而在区间$(1,+\infty)$ 内函数值为正;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少,在区间$(0,1)$ 内函数值为正,而在区间$(1,+\infty)$ 内函数值为负. 对于任意限定的 $a>0$ 且 $a\neq 1$,$y=\log_a x$ 的值域是$(-\infty,+\infty)$. 特殊地,$a=\mathrm{e}$($\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots$,是一个无理数)时 $y=\log_\mathrm{e} x$ 记为 $y=\ln x$(称自然对数)