品位 品质 品牌

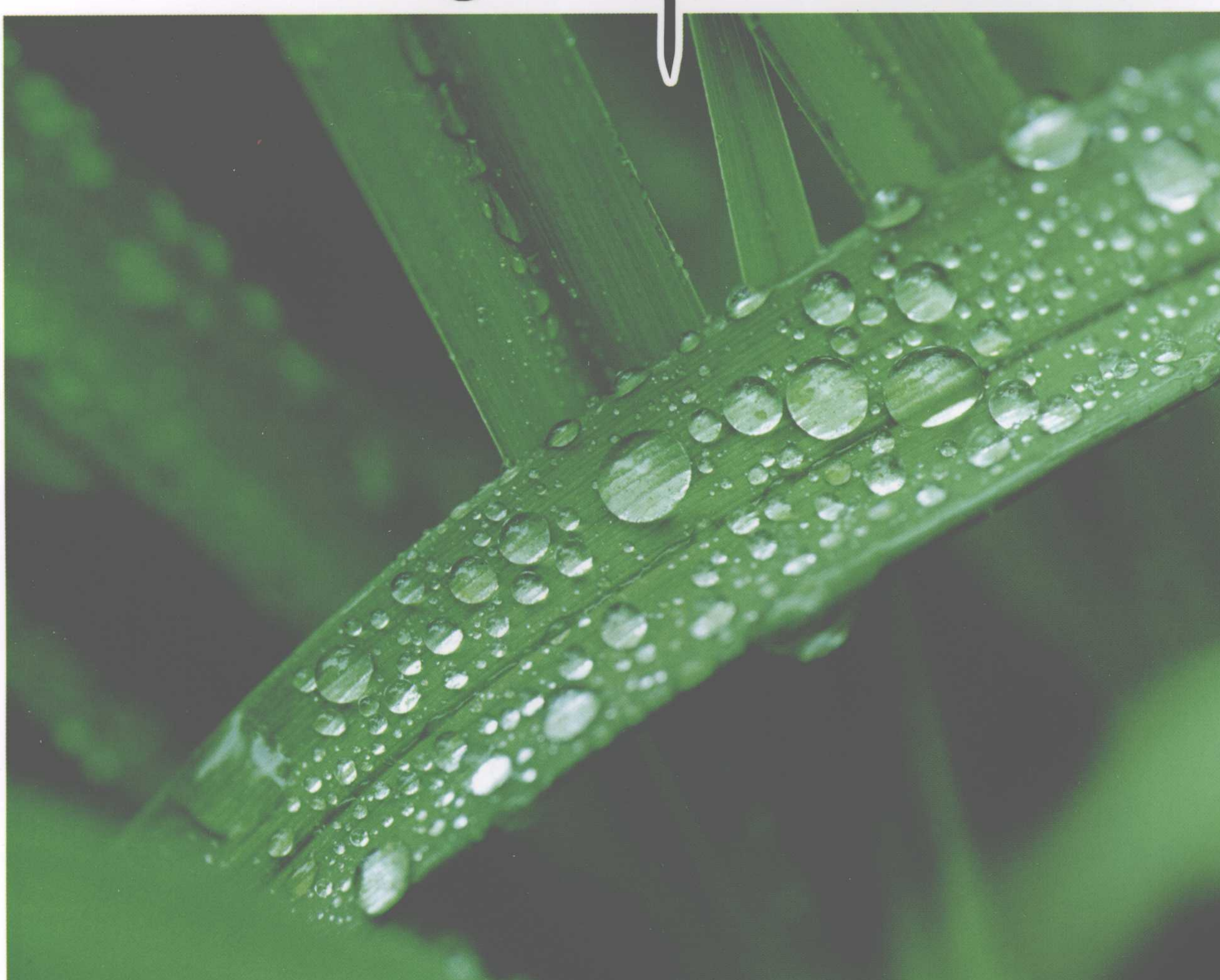
丛书主编 王朝银

创新设计

创新课堂

数学

高一(上) ● 学生用书



陕西人民出版社

创新设计

创新课堂

数学

创新设计

创新课堂

高一·数学

在这里，你找寻着进步的捷径；在这里，你释放着青春的激情；在这里，你用汗水浇灌幸福的花园；在这里，你以快乐铭记逐日的岁月……

陕西人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

创新设计·高一数学/杨玉田主编. –西安：陕西人民出版社，2007.3

ISBN 978-7-224-07934-0

Ⅰ.创… Ⅱ.杨… Ⅲ.数学课–高中–教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第024311号

丛书主编 王朝银

本册主编 杨玉田

副 主 编 王 朴 刘绪田 胡丽丽 张 芳

创新设计·高一数学(上)

出版发行 陕西人民出版社（西安市北大街147号 邮编：710003）

印　　刷 莱芜市圣龙印务有限责任公司（0634－6119378）

开　　本 880mm×1230mm 16开

版　　次 2007年3月第1版第1次印刷

书　　号 ISBN 978-7-224-07934-0

定　　价 21.00元

创新设计系列丛书

栏目设计指导

Mathematics 数学

NO.1


Mathematics 数学 创新设计 高一·上册

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集 合(一)

自主导学

教学流程

复习情境导入

由数集、点集等实例导入一般集合的概念，集合的概念是描述性的，与点、直线等一样是数学中最基本最原始的概念，是不加定义的.

新课内容设计

(1)集合与元素

①某些指定的对象集在一起就成为一个集合，通常用

思维轨迹

试判断下面的语法是否正确

（1）方程（x−1）2(x+2)=0的解集可表示为{1,1,−2}；

（2）方程组x+y=3

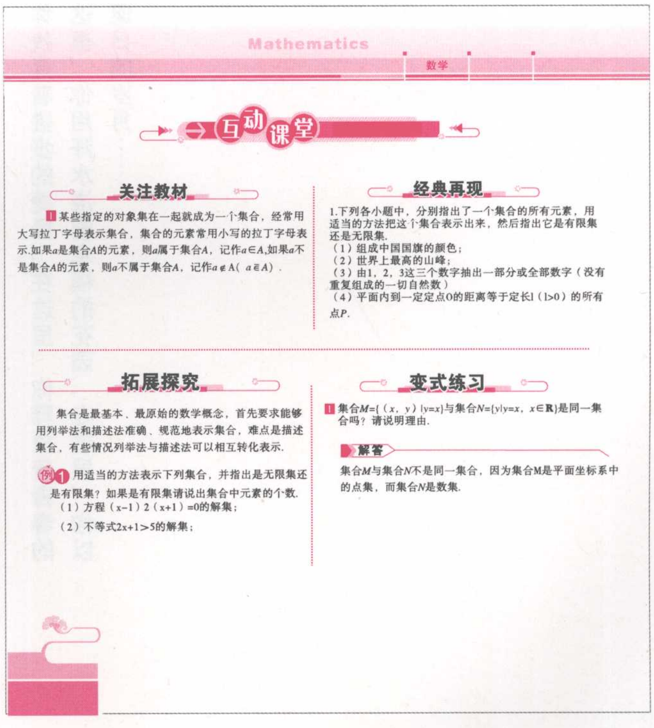
x−y=1的解集中有两个元素.

答案（1）错（2）错

温馨提示:

本栏目两栏设计,左栏让学生初步了解学习本节知识的流程,右栏要求学生课下自主完成。

NO.2


Mathematics 数学

互动课堂

关注教材

某些指定的对象集在一起就成为一个集合，经常用大写拉丁字母表示集合，集合的元素常用小写的拉丁字母表示.如果a是集合A的元素，则a属于集合A，记作$a\in A$,如果a不是集合A的元素，则a不属于集合A，记作$a\notin A$（ $a\overline{\in}A$）.

经典再现

1.下列各小题中，分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这个集合表示出来，然后指出它是有限集还是无限集.

（1）组成中国国旗的颜色；

（2）世界上最高的山峰；

（3）由1，2，3这三个数字抽出一部分或全部数字（没有重复组成的一切自然数）

（4）平面内到一定定点O的距离等于定长l（l>0）的所有点P.

拓展探究

集合是最基本、最原始的数学概念，首先要求能够用列举法和描述法准确、规范地表示集合，难点是描述集合，有些情况列举法与描述法可以相互转化表示.

例1 用适当的方法表示下列集合，并指出是无限集还是有限集？如果是有限集请说出集合中元素的个数.

（1）方程（x−1）2（x+1）=0的解集；

（2）不等式2x+1>5的解集；

变式练习

集合M={（x，y）|y=x}与集合N={y|y=x，$x\in\mathbf{R}$}是同一集合吗？请说明理由.

解答

集合M与集合N不是同一集合，因为集合M是平面坐标系中的点集，而集合N是数集.

温馨提示:

本栏目是本节的核心，双栏互动，师生互动，教为主导，学为主体。

NO.3

Mathematics

数学

创新演练

一、选择题

1 下列各条件中不能确定一个集合的是 （ ）

A.充分接近2的所有实数的全体

B.某校身高不超过1.7 m的全体学生

C. 数轴上到原点的距离不超过一个单位的点的全体

D.小于100的所有质数

2 下列四个关系中正确的是 （ ）

A.$\varnothing \in \{a\}$　　B.$\{a\} \in \{a\}$

C.$\{a\} \in \{a,b\}$　　D.$a \in \{a, b\}$

二、填空题

7 用“∈”或“∉”填空：

（1）若$A=\{x \mid x2+2x=0\}$，则2____A，-2____A.

（2）A={直角三角形}，则边长为8cm，15cm，17cm的三角形______A.

三、解答题

10 求数集{a-2，2a2+5a，12}中实数a的取值范围.

解答

根据元素的互异性可知

$$\begin{cases} A-2\neq 2a^2+5a \\ a-2\neq 12 \\ 2a^2+5a\neq 12 \end{cases}，解得 \begin{cases} a\neq -1 \\ a\neq 14 \\ a\neq 32 \\ a\neq -4. \end{cases}$$

温馨提示：

“创新演练”供学生课后练习，对本节知识、方法技巧进行强化巩固。

NO.4

Mathematics

数学

第二课堂

集合论与它的创始人

康托，1845年3月3日出生在俄国彼得堡一个丹麦——犹太血统的家庭.后来与父母一起移居德国，当时他只有11岁，康托自幼好学，善于独立思考问题，对数学有特殊兴趣.他的优良品德和数学素养，对他以后在数学领域所取得的巨大成就和对人类的伟大贡献有一定的促进作用.

康托1863年考入著名的柏林大学.当时世界著名数学家魏尔斯特拉斯是该校的数学教授，他对康托的影响很大.1869年康托成为哈佛大学的讲师，1872年任副教授，1879年升为教授.

1874年，他发表了一篇在集合论方面极有价值的《证明代数集可以和整数集一一对应》引起了世界许多数学家的注目.从此，集合论的创始人康托名声越来越大.

康托的数学思想和方法具有创造性.他在考虑许多数学问题时采用了配对的原则.比如确定整数多还是偶数多，这个问题看起来很容易，实际上正确回答是很困难的，甚至当时许多数学家也解释不清这一问题.康托处理这一个问题的方法很有启发性，他把每一个整数和每一个偶数进行配对后无剩余.这就是说，使两个集合的所有元素恰好一一对应，如果这样的对应能够找到，就说这两个集合的“势”相同.

康托还引进了“可列”一词，他把凡能与正整数构成一一对应的任何集合都叫可列集合.他还证明了有理数集合是可列的，所有代数全体构成的集合也是可列的，而实数集合则是不可列的.

康托不仅有惊人的毅力和丰富的想像力，而且他思考问题的方法既深刻又有独创精神.他把集合论的一些基本内容引出之后，继续研究集合的势的概念，他还引进了基数与序数的理论，其中他发表的有关“超限基数”与“超限序数”理论更是人类的一个创举.

康托的集合论对整个现代数学的结构产生了重大影响，它在数学的不少分支得到了应用.特别是进入20世纪以来，集合论吸引了许多数学家进一步深入地研究，并取得了巨大成绩.康托的思想和功绩极大地影响了有志攀登数学高峰的青年，他们沿着康托开创的事业攻克了许多难关，从胜利走向胜利.康托作为数学巨人是当之无愧的.

温馨提示：

“第二课堂”是对本节知识的拓展，从不同角度对本节知识进行探究和挖掘。

前言 PREFACE

黄河冲天走东海，万里写入胸怀间

——代《创新设计》丛书前言

上篇 品味境界

还记得去年的那“一声春雷”，曾经“叫醒了365天”，还记得我们心爱的《创新设计》的问世给全国教辅界带来的惊喜与震撼。

一石激起千层浪！于是，大江南北，学《创新设计》风生水起……

庄子向往逍遥。逍遥之境，是每一个成功人士的最终理想，是站在事业巅峰又希望青云直上九霄，无所束缚，无为而无不为的热切追索。逍遥的人，是心境开阔的人。他已经不只是沉寂在一笔生意的得失，一个市场一方领域的占有上，而是放眼寰球、气吞千古、指点江山的气魄，是“鲲鹏展翅九万里，翻动扶摇羊角”的宏大。因此，逍遥，必须以良好的道德文化修养作为基础，更重要的是，要能够像诸葛孔明一样“运筹帷幄之中，决胜千里之外”。

我们不是诸葛孔明，但我们向往逍遥！

中篇 理论促超越

正如一个人，没有了思想，就如同行尸走肉，做书也是如此！一套没有理论指导的丛书，充其量是一种拼凑，一种低层次的试题堆积，经不起有眼光的师生的认真推敲。

为了使《创新设计》丛书占据教辅制高点，“金榜苑图书有限公司”特聘全国著名教育专家对本丛书进行了专门的理论设计。所以，新版《创新设计》系列丛书，体现出以下鲜明、浓郁的理论特色：强化“积累与整合”，注重“感受与鉴赏”，引导“思考和领悟”，关注“应用与拓展”，着眼“发现与创新”。

这种充满人文气息的教育理念，注重过程的教学方法，审美探究的学习方式，使学生真正能够从最核心的能力结构搭建中，掌握学习的要诀，从而学海遨游，轻松自如！

后记 坐看云起时

《创新设计》系列丛书在教辅界的崛起，引起了全国著名学科教学专业核心期刊的关注。他们纷纷伸出合作之手，或表达合作的愿望！有了全国专业核心期刊的大力支持，我们气定神闲！

佛教里有一个公案，说是释迦牟尼佛偶得一朵金莲花，他拈着莲花微笑，大弟子迦叶见了，也微笑回应。这就是传说中的禅的最早由来。

从容与禅是息息相关的。但禅的从容同样要经过痛苦的修炼方能获得。

我们经历了耕耘的痛苦，也经历了追索的磨难。当全国各地纷纷预订《创新设计》丛书的好消息一个连一个地传来，公司上下都被这种大好局面感染了。我们有理由欢呼，有理由自豪，也有理由在激烈的竞争中睥睨群雄。因为我们的《创新设计》，“字字看来皆是汗，一载辛苦不寻常”。

所以，当我们的激动渐渐平静，当昔日的追索有了回报，当居于教辅之巅傲视天下时，我们也获得了一种从容。

于是，痛苦之后的闲适，耕耘之后的自信，巅峰之处的从容，蕴蓄在心头，化作小诗一首：

尽日寻春不见春，
芒鞋踏遍陇头云。
归来笑拈梅花嗅，
春在枝头已十分。

楊耀楠

2007年春

PREFACE

前言

黄河冲天走东海，万里写入胸怀间

——代《创新设计》丛书前言

上篇 品味境界

还记得去年的那“一声春雷”，曾经“叫醒了365天”，还记得我们心爱的《创新设计》的问世给全国教辅界带来的惊喜与震撼。

一石激起千层浪！于是，大江南北，学《创新设计》风生水起……

庄子向往逍遥。逍遥之境，是每一个成功人士的最终理想，是站在事业巅峰又希望青云直上九霄，无所束缚，无为而无不为的热切追索。逍遥的人，是心境开阔的人。他已经不只是沉寂在一笔生意的得失，一个市场一方领域的占有上，而是放眼寰球，气吞千古，指点江山的气魄，是“鲲鹏展翅九万里，翻动扶摇羊角”的宏大。因此，逍遥，必须以良好的道德文化修养作为基础，更重要的是，要能够像诸葛孔明一样“运筹帷幄之中，决胜千里之外”。

我们不是诸葛孔明，但我们向往逍遥！

中篇 理论促超越

正如一个人，没有了思想，就如同行尸走肉，做书也是如此！一套没有理论指导的丛书，充其量是一种拼凑，一种低层次的试题堆积，经不起有眼光的师生的认真推敲。

为了使《创新设计》丛书占据教辅制高点，“金榜苑图书有限公司”特聘全国著名教育专家对本丛书进行了专门的理论设计。所以，新版《创新设计》系列丛书，体现出以下鲜明、浓郁的理论特色：强化“积累与整合”，注重“感受与鉴赏”，引导“思考和领悟”，关注“应用与拓展”，着眼“发现与创新”。

这种充满人文气息的教育理念，注重过程的教学方法，审美探究的学习方式，使学生真正能够从最核心的能力结构搭建中，掌握学习的要诀，从而学海遨游，轻松自如！

后记 坐看云起时

《创新设计》系列丛书在教辅界的崛起，引起了全国著名学科教学专业核心期刊的关注。他们纷纷伸出合作之手，或表达合作的愿望！有了全国专业核心期刊的大力支持，我们气定神闲！

佛教里有一个公案，说是释迦牟尼佛偶得一朵金莲花，他拈着莲花微笑，大弟子迦叶见了，也微笑回应。这就是传说中的禅的最早由来。

从容与禅是息息相关的。但禅的从容同样要经过痛苦的修炼方能获得。

我们经历了耕耘的痛苦，也经历了追索的磨难。当全国各地纷纷预订《创新设计》丛书的好消息一个连一个地传来，公司上下都被这种大好局面感染了。我们有理由欢呼，有理由自豪，也有理由在激烈的竞争中睥睨群雄。因为我们的《创新设计》，“字字看来皆是汗，一载辛苦不寻常”。

所以，当我们的激动渐渐平静，当昔日的追索有了回报，当居于教辅之巅傲视天下时，我们也获得了一种从容。

于是，痛苦之后的恬适，耕耘之后的自信，巅峰之处的从容，蕴蓄在心头，化作小诗一首：

尽日寻春不见春，
芒鞋踏遍陇头云。
归来笑拈梅花嗅，
春在枝头已十分。

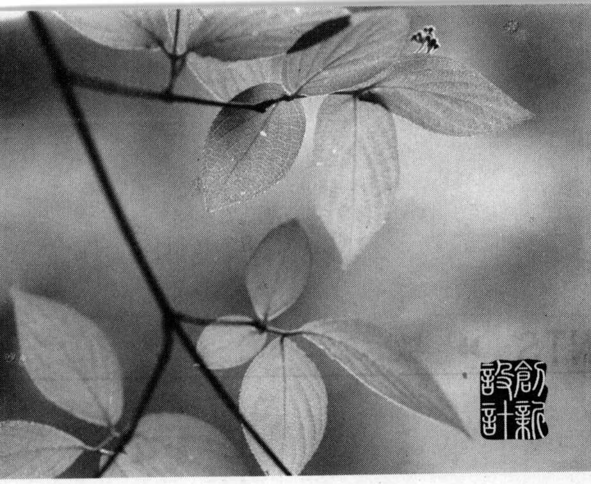
杨耀杨

2007年春

目录 CONTENTS

数学

高一·(上)



目录 CONTENTS 数学

高一·(上)

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合(一)

自主导学

教学流程

1 复习情境导入

由数集、点集等实例导入一般集合的概念,集合的概念是描述性的,与点、直线等一样是数学中最基本最原始的概念,是不加定义的.

2 新课内容设计

(1)集合与元素

①某些指定的对象集在一起就成为一个集合,通常用大写的拉丁字母 A、B、C 等表示集合,集合中的每个对象叫做这个集合的元素,集合中的元素常用小写的拉丁字母 a、b、c 等表示.

②常用数集的记法:自然数集记作 **N**,正整数集记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$,整数集记作 **Z**,有理数集记作 **Q**,实数集记作 **R**.

③元素与集合的关系

若 a 是集合 A 的元素,则 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;

若 a 不是集合 A 的元素,则 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in}A$)

④举例说明集合中元素的确定性、互异性和无序性

(2)①举例说明具体集合的表示方法:ⓐ列举法ⓑ描述法

②集合的分类:有限集、无限集、空集记作 $\varnothing$.

3 思想方法探究

集合是重要的数学语言之一,是学习数学的基础和工具,它主要是起到表达和交流作用.本节的难点是学生对集合概念的理解和集合表示法中的描述法,其重点是集合的表示法.集合是最原始的数学概念,是不加定义的数学概念,建议通过一定数量的实例对集合进行详细和理性的描述以求突破难点;对于集合的表示法,要掌握一些简单集合的描述法与列举法的互化,具体就是能用描述法规范准确地按要求表示集合,并能够弄清描述法表示集合中究竟有多少元素,这些元素分别是什么,建议要通过适量的实例和练习突出重点和突破难点.同时也初步体现了数形结合的数学思想.

思维轨迹

1 试判断下面的语法是否正确

(1)方程 $(x-1)^2(x+2)=0$ 的解集可表示为 $\{1,1,-2\}$;

(2)方程组 $\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$ 的解集中有两个元素.

2 能否用列举法表示不等式 $x-2<3$ 的解集?

3 分别用列举法和描述法表示由小于 10 的质数构成的集合.

4 下列命题中,正确的命题是________.

①$\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 表示同一集合

②$\{(1,2)\}$ 与 $\{(2,1)\}$ 表示同一集合

③$\varnothing$,$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2<0\}$,$\{0\}$ 与 $\{\varnothing\}$ 都表示同一集合

④集合 $\{x\in\mathbf{R}\mid(x-1)^2(x-2)=0\}$ 中元素的个数为 3

⑤2007 年崇兴中学考上名牌大学的学生构成集合

互动课堂

关注教材

1 某些指定的对象集在一起就成为一个集合，经常用大写拉丁字母表示集合，集合的元素常用小写的拉丁字母表示. 如果 a 是集合 A 的元素，则 a 属于集合 A，记作 $a\in A$，如果 a 不是集合 A 的元素，则 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A(a\overline{\in}A)$.

2 集合的表示方法，常用的有列举法和描述法，常用的数集：自然数集记作 $\mathbf{N}$，正整数集记作 $\mathbf{N}^*$，整数集记作 $\mathbf{Z}$，有理数集记作 $\mathbf{Q}$，实数集记作 $\mathbf{R}$.

3 含有有限个元素的集合叫做有限集；含有无限个元素的集合叫做无限集；不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

经典再现

下列各小题中，分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这个集合表示出来，然后指出它是有限集还是无限集.

(1)组成中国国旗的颜色；

(2)世界上最高的山峰；

(3)由 1,2,3 这三个数字抽出一部分或全部数字(没有重复组成的一切自然数)

(4)平面内到一点 O 的距离等于定长 $l(l>0)$ 的所有点 P.

解答

(1){红色，黄色}　有限集

(2){珠穆朗玛峰}　有限集

(3){1,2,3,12,13,21,23,31,32,123,132,213,231,312,321}　有限集

(4)$\{P|PO=l,l>0,O$ 为平面内定点$\}$　无限集

拓展探究

集合是最基本、最原始的数学概念，首先要求能够用列举法和描述法准确、规范地表示集合，难点是描述集合，有些情况列举法与描述法可以相互转化表示.

例1 用适当的方法表示下列集合，并指出是无限集还是有限集？如果是有限集请说出集合中元素的个数.

(1)方程 $(x-1)^2(x+1)=0$ 的解集；

(2)不等式 $2x+1>5$ 的解集；　(3)方程组 $\begin{cases}x-y=1\\x+y=3\end{cases}$ 的解集；

(4)直线 $y=x$ 上的点构成的集合；　(5)方程组 $\begin{cases}x+y=3\\y+z=4\\z+x=5\end{cases}$ 的解集；

(6)线段 AB 垂直平分线上的点构成的集合.

解答

(1)方程 $(x-1)^2(x+1)=0$ 的解集是 $\{x\in\mathbf{R}|(x-1)^2(x+1)=0\}$ 或 $\{1,-1\}$，集合为有限集，集合中元素的个数为 2；

(2)不等式 $2x+1>5$ 的解集是 $\{x|2x+1>5\}$，为无限集；

(3)方程组 $\begin{cases}x-y=1\\x+y=3\end{cases}$ 的解集是 $\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-y=1\\x+y=3\end{cases}\right.\right\}$ 或 $\{(2,1)\}$，为有限集，集合中元素的个数为 1；

(4)直线 $y=x$ 上的点构成的集合为 $\{(x,y)|y=x\}$，为无限集；

(5)方程组 $\begin{cases}x+y=3\\y+z=4\\z+x=5\end{cases}$ 的解集是 $\left\{(x,y,z)\left|\begin{cases}x=2\\y=1\\z=3\end{cases}\right.\right\}$ 或 $\{(2,1,3)\}$，为有限集，集合中元素的个数为 1；

(6)线段 AB 垂直平分线上的点构成的集合是 $\{P|PA=PB\}$，为无限集.

集合概念是不加定义的，然而我们还是要通过对集合概念的描述，通过对集合中元素性质的使用和体会，进一步准确和深刻地理解集合的概念，集合中的元素应具有确定性、互异性和无序性.

例2 已知 $A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$，且 $-3\in A$，求实数 a 的值.

变式练习

1 集合 $M=\{(x,y)|y=x\}$ 与集合 $N=\{y|y=x,x\in\mathbf{R}\}$ 是同一集合吗？请说明理由.

2 求数集 $A=\{a-2,2a^2+5a,12\}$ 中字母 a 的取值范围构成的集合 M.

学法小结

1. 用描述法表示集合是本节的难点，在表示数集、方程组的解集和平面内的点集时要注意元素的一般形式.

2. 解决有关集合问题要注意集合中元素的特征即确定性、互异性和无序性.

创新演练

一、选择题

1 下列各条件中不能确定一个集合的是 ( )

A. 充分接近$\sqrt{2}$的所有实数的全体

B. 某校身高不超过 1.7m 的全体学生

C. 数轴上到原点的距离不超过一个单位的点的全体

D. 小于 100 的所有质数

2 下列四个关系中正确的是 ( )

A. $\varnothing\in\{a\}$　　B. $\{a\}\in\{a\}$

C. $\{a\}\in\{a,b\}$　　D. $a\in\{a,b\}$

3 下列各项中，M 与 P 表示同一集合的是 ( )

A. $M=\{(1,-3)\}$，$P=\{(-3,1)\}$

B. $M=\varnothing$，$P=\{0\}$

C. $M=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，
$P=\{(x,y)\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$

D. $M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，
$P=\{y\mid y=(t-1)^2+1,t\in\mathbf{R}\}$

4 方程组$\begin{cases}x+y=3\\2x-3y=1\end{cases}$解的集合是 ( )

A. $\{x=2,y=1\}$　　B. $\{2,1\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{(2,1)\}$

5 集合 $A=\{x\mid ax^2+x+1=0\}$ 中有且只有一个元素，则实数 a ( )

A. $a=0$　　B. $a=\frac{1}{4}$

C. $a=0$ 或 $a=\frac{1}{4}$　　D. $a\geqslant\frac{1}{4}$

6 集合 $A=\{x\mid \frac{6}{3-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\}$，用列举法表示为 ( )

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{-3,-1,0,1,2\}$

C. $\{3,0,1,2\}$　　D. $\{2,1,1,2\}$

二、填空题

7 用"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1)若 $A=\{x\mid x^2+2x=0\}$，则 2 ______ A，-2 ______ A.

(2)$A=\{$直角三角形$\}$，则边长为 8cm，15cm，17cm 的三角形 ______ A.

(3)$\sin60°$ ______ $\mathbf{Q}$，$\cos45°$ ______ $\mathbf{R}$，$\tan45°$ ______ $\mathbf{Q}$.

(4)$A=\{y\mid y=(x-\frac{1}{2})^2,x\in\mathbf{N}\}$，则 1 ______ A.

8 用另一种方法表示下列各集合

(1)$\{x\mid x\leqslant5,x\in\mathbf{N}\}$写成______；

(2)$\{x\mid x^2+2x+1=0\}$写成______；

(3)$\{2,4,6,8,\cdots\}$写成______；

(4)$\{1,3\}$写成______.

9 已知集合 $A=\{x\mid x^2+ax+b=0\}$ 中仅有一个元素 1，则 $a=$______，$b=$______.

三、解答题

10 已知集合 $A=\{m^2-m,m,-1\}$，求实数 m 的集合 M.

11 集合 $A=\{x\mid x^2+ax+b=x\}$ 中有且只有一个元素 a，求实数 a、b 的值.

12 设 $y=x^2+mx+n(m,n\in\mathbf{R})$，当 $y=0$ 时，对应 x 值的集合为$\{-2,-1\}$.

(1)求 m,n 的值；

(2)当 x 为何值时，y 取最小值，并求此最小值.

第二课堂

集合论与它的创始人

康托，1845 年 3 月 3 日出生在俄国彼得堡一个丹麦——犹太血统的家庭.后来与父母一起移居德国，当时他只有 11 岁，康托自幼好学，善于独立思考问题，对数学有特殊兴趣.他的优良品德和数学素养，对他以后在数学领域所取得的巨大成就和对人类的伟大贡献有一定的促进作用.

康托 1863 年考入著名的柏林大学.当时世界著名数学家魏尔斯特拉斯是该校的数学教授，他对康托的影响很大.1869 年，康托成为哈佛大学的讲师，1872 年任副教授，1879 年升为教授.

1874 年，他发表了一篇在集合论方面极有价值的《证明

代数集可以和整数集一一对应》引起了世界许多数学家的注目.从此,集合论的创始人康托名声越来越大.

康托的数学思想和方法具有创造性.他在考虑许多数学问题时采用了配对的原则.比如确定整数多还是偶数多,这个问题看起来很容易,实际上正确回答是很困难的,甚至当时许多数学家也解释不清这一问题.康托处理这一个问题的方法很有启发性,他把每一个整数和每一个偶数进行配对后无剩余.这就是说,使两个集合的所有元素恰好一一对应,如果这样的对应能够找到,就说这两个集合的"势"相同.

康托还引进了"可列"一词,他把凡能与正整数构成一一对应的任何集合都叫可列集合.他还证明了有理数集合是可列的,所有代数全体构成的集合也是可列的,而实数集合则是不可列的.

康托不仅有惊人的毅力和丰富的想像力,而且他思考问题的方法既深刻又有独创精神.他把集合论的一些基本内容引出之后,继续研究集合的势的概念,他还引进了基数与序数的理论,其中他发表的有关"超限基数"与"超限序数"理论更是人类的一个创举.

康托的集合论对整个现代数学的结构产生了重大影响,它在数学的不少分支得到了应用.特别是进入 20 世纪以来,集合论吸引了许多数学家进一步深入地研究,并取得了巨大成绩.康托的思想和功绩极大地影响了有志攀登数学高峰的青年,他们沿着康托开创的事业攻克了许多难关,从胜利走向胜利.康托作为数学巨人是当之无愧的.

1.2 集　合(二)

自主导学

教学流程

1 复习情境导入

简要复习集合中元素的性质(确定性、互异性和无序性),常用数集的表示,集合的分类等.

2 新课内容设计

集合的表示方法:列举法、描述法.

例 1 把下列集合用另一种方法表示出来.

(1)$\{1,5\}$;(2)$\{x|x^2+x-1=0\}$

(3)$\{2,4,6,8\}$;(4)$\{x\in\mathbf{N}|3<x<7\}$.

解答

(1)$\{x|x^2-6x+5=0\}$;(2)$\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$;

(3)$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*,n<5\}$;(4)$\{4,5,6\}$.

例 2 用列举法或描述法表示下列集合

(1)方程 $x^2+6x+5=0$ 的解集;

(2)不等式 $3x+2<4x-1$ 的解集;

(3)方程组$\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases}$的解集;

(4)方程组$\begin{cases}x+y=3\\y+z=4\\z+x=5\end{cases}$的解集;

(5)平面内线段 AB 的垂直平分线上所有点构成的集合.

解答

(1)$\{-1,-5\}$;(2)$\{x|x>3\}$;(3)$\{(3,1)\}$;(4)$\{(2,1,3)\}$

(5)$\{P|\ PA=PB\}$(A、B 是平面内定点).

3 思想方法探究

对于重要的数学语言——集合不仅要正确、规范地掌握其表示方法,如图示法、列举法和描述法,而且要准确理解用集合表示的数学问题的意义,因此无论有限集还是无限集,弄清集合中元素的个数和集合中的元素分别是什么是解决问题的关键.

思维轨迹

1 试判断下列命题的正误

(1)集合 $A=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2=0\}$是有限集;

(2)集合 $B=\{(x,y)|(x-1)(y-2)=0\}$是有限集.

2 方程的解集:$M=\{x|ax=b,a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}\}$是有限集,对吗?

3 已知两个数集分别为 $A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x=2k+3,k\in\mathbf{Z}\}$,则 A、B 表示不同集合,对吗?

互动课堂

拓展探究

要求通过练习，能够准确规范地使用描述法表示数集、点集、方程和方程组的解集等；而对使用描述法表示的集合，无论是有限集还是无限集都应弄清集合中的每个元素是什么.

例1 已知 $P=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}$，$Q=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\}$，试判断 P、Q 两集合是否是同一集合.

解答

$P=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$

$Q=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\}=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$

因此 P、Q 为同一集合.

可通过以下例题的讲解和相应的练习，强化集合语言的应用，注意集合语言和通俗数学语言的联系和区别，要做到相互转化、准确理解.

例2 已知 $M=\{x|x^2+ax+\frac{a^2-1}{3}=0\}$

(1)若 $1\in M$，求 a；

(2)若 $M=\{1\}$，求 a.

变式练习

1 若 $P=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，且 $a\in P$，$b\in P$，试证 $a+b\in Q$，$ab\in P$.

2 集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$ 中有且只有一个元素，求实数 a.

学法小结

1. 对于用描述法表示的集合，首先要弄清是什么集合，然后要判断出集合中的每个元素具体是什么.

2. 在解决集合相关问题时，也要注意常见数学思想方法的应用，如转化思想、分类讨论和数形结合等等.

创新演练

一、选择题

1 已知 $M=\{x|(x^2-5x+6)(x^2-x-2)=0\}$，则集合 M 中元素的个数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2 下列集合中 M、N 表示同一个集合的是 ( )

A. $M=\{(3,2)\}$，$N=\{(2,3)\}$

B. $M=\{3,2\}$，$N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y)|x+y=1\}$，$N=\{y|y+x=1\}$

D. $M=\{1,2\}$，$N=\{(1,2)\}$

3 若 $M=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$，且 $x_0\in M$，$y_0\in N$，则 ( )

A. $x_0+y_0\in M$　　B. $x_0-y_0\in M$

C. $x_0y_0\in M$　　D. $x_0y_0\in N$

4 下列各组集合中，M、N 不是同一集合的是 ( )

A. $M=\{y|y=x,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\mathbf{R}$

B. $M=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y\geq 0\}$

C. $M=\{y|y=\frac{1}{x}\}$，$N=\{y|y\neq 0\}$

D. $M=\{y|y=2x,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=2x,x\in\mathbf{Z}\}$

5 下列命题中，正确命题的个数是 ( )

①集合 $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x-y=5\\x+y=8\end{cases}\right\}$ 中有且只有一个元素

②集合 $\{P||PA|=3,A$ 为平面内定点$\}$ 为有限集

③集合 $\{x|x^2+x+1=0\}$ 为空集

④集合 $\{(x,y)||x-1|+(y-2)^2=0\}$ 为无限集

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6 集合 $A=\left\{x\middle|x=\frac{a^2-2a+1}{a-1},a\in\mathbf{Z},a\neq 1\right\}$，则

A. $0\in A$　　B. A 为有限集

C. A 为空集　　D. $1\in A$

二、填空题

7 12 的质因数构成的集合是________.

8 平面直角坐标系中，坐标轴上点的集合是________.

9 数集$\{5,x,x^2-4x\}$中实数x的取值范围是________.

三、解答题

10 用列举法表示下列集合

(1)$\{y|y=2x+1,x\in\mathbf{N}\}$；

(2)$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=x^2\\y=x\end{cases}\right.\right\}$；

(3)$\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$；

(4)$\left\{x\left|x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}\right.\right\}$.

11 已知$A=\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，若$x\in A$，$y\in B$，$z\in C$.

求证：(1)$x+y\in B$；

(2)$y+z\in A$；

(3)$yz\in C$.

12 已知$M=\{y|y=a+b\sqrt{2},a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{Q}\}$

(1)试问5是否是M中的元素；

(2)若$y_1\in M,y_2\in M$，试证：$y_1+y_2\in M$，$y_1y_2\in M$.

第二课堂

开阔视野

集合是数学中最原始的概念，是不加定义的．集合是数学中重要的符号语言，对初学者来说，难点是用描述法表示集合，既要规范准确，又能通过对集合的表示弄清集合是有限集、还是无限集，无论是有限集，还是无限集，要弄清集合中的元素分别是什么．比如$\{y|y=x,x\in\mathbf{R}\}$表示的是数集，即$\mathbf{R}$；$\{(x,y)|y=x\}$表示的是直线$y=x$上的点构成的集合(或称为二元方程$y=x$的解集)；$\left\{(x,y,z)\left|\begin{cases}x+y=3\\y+z=4\\z+x=5\end{cases}\right.\right\}$表示三元方程的解集，其中只有一个元素即$\{(2,1,3)\}$；而$\{P|PA=5,A\text{为定点}\}$则表示以$A$为圆心半径为5的圆上的点构成的集合等等.

例 若$a\in M$，则$\frac{1}{1-a}\in M$，当$a=3$时，试问集合M中共有几个元素？

解答

由已知$3\in M$，则$\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}\in M$，

$-\frac{1}{2}\in M$，则$\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}\in M$，

$\frac{2}{3}\in M$，则$\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3\in M$，

因此可看出集合M中只有三个元素$3,-\frac{1}{2},\frac{2}{3}$，即$M=\{3,-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\}$.

当然可以类似的考虑：若$a\neq1$，且$a\neq0$，则满足"若$a\in M$一定有$\frac{1}{1-a}\in M$"的集合M中就只有三个元素，这三个元素分别是$a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a}$，即$M=\{a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a}\}$.

1.3 子集

自主导学

教学流程

1 复习情境导入

复习元素与集合之间的关系，常用数集的表示等，导入子集的概念.

2 新课内容设计

(1)子集的定义和记法；

(2)子集的性质；

(3)集合相等的定义.

应从正反两方面理解子集和真子集的概念，$A\subseteq B$，包含两种情

思维轨迹

1 说明数集$\mathbf{N}^*$，$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$之间的关系，并用图示表示.

2 已知A、B为两个集合，是否存在$A\in B$这种关系？试结合实例分析.

况 $A\subsetneqq B$,或 $A=B$.

3 教材例题研讲

例 1 写出集合$\{a,b\}$的所有的子集,并指出其中哪些是它们的真子集.

例 2 解不等式 $x-3>2$,并把结果用集合表示出来.

4 思想方法探究

子集是集合中非常重要的概念之一,可以用子集来定义集合相等,而学习集合相等的概念对于解方程、解不等式、简易逻辑、求曲线的方程等问题都有非常重要的意义.

3 若 $A\subsetneqq B$,$B\subseteq C$,则 A ______ C.

4 已知集合 $A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,根据集合 A 的子集有 4 个,集合 B 的子集有 8 个,可推测集合 $C=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$的子集应该有______个.

互动课堂

关注教材

1 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$.

2 (1)规定:空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

(2)任何一个集合是它本身的子集.即 $A\subseteq A$.

(3)如果 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$.

3 (1)如果 $A\subseteq B$,并且 $A\neq B$,则集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$;

(2)如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,那么 $A=B$.

经典再现

写出集合$\{a,b,c\}$所有子集,并指出哪些是它的真子集.

解答

$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\{c,a\}\{a,b,c\}$,其中除去$\{a,b,c\}$都是真子集.

拓展探究

对子集的概念可从正反两个方面加以理解,要注意文字语言、符号语言以及图形语言的转换和交替使用;对于有限集其子集的个数也是有限的,我们可以按一定的规律写出有限集的所有子集.

例1 写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集.

解答

集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集为

$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\}\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}$.

当引入子集概念后我们通常会遇到对元素与集合及集合与集合关系的判断问题,而集合与集合之间的关系是由元素与集合之间的关系来确定的.

例2 设 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$,$B=\{x|ax-1=0\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 a.

变式练习

1 求满足条件$\{e\}\subseteq M\subseteq\{a,b,c,d,e\}$的集合 M 的个数.

2 (2006 年上海)已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$,集合 $B=\{3,m^2\}$,若 $B\subseteq A$,则实数 $m=$________.

学法小结

1.根据例 1 和练习可看出:(1)对于任何非空集合 A,都有两个当然的子集,$\varnothing$与 A;(2)有限集合我们可以写出其所有的子集,若有限集合中元素的个数为 n,则其子集的个数为 2^n.

2.例 2 中 A 是二元素集,而 B 的元素最多一个,所以由 $B\subseteq A$ 可知,B 是 A 的真子集,所以 B 有三种可能.在做题过程中很容易丢掉 $B=\varnothing$的情况.

3.对"集合 A 是集合 B 的子集"这一概念建议从正反两方面加以理解;而集合相等是由子集概念加以定义的,集合 A 是集合 B 的子集包括两种情况:$A=B$,或 $A\subsetneqq B$;可以通过集合相等进行集合的化简.