DAXUE SHUXUE XILIE FUDAO JIAOCAI

大学数学系列辅导教材

WEIJIFEN XUEXI SHIYI JIENAN

微积分学习释疑解难

苏德矿 程吉树 主编

6

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

大学数学系列辅导教材

微积分学习释疑解难

主　编　苏德矿　程吉树
副主编　杨辉煌　骆　桦
主　审　金蒙伟

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习释疑解难/苏德矿,程吉树主编.—杭州:浙江大学出版社,2007.10

(大学数学系列辅导教材)

ISBN 978-7-308-05442-3

Ⅰ.微… Ⅱ.①苏…②程… Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第130158号

内 容 提 要

根据教育部高等学校数学课程教学指导委员会拟定的经管类微积分课程教学基本要求,参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲,结合浙江大学苏德矿、金蒙伟等编写,由高教出版社出版的《微积分》(经管类)教材,我们编写了这本《微积分学习释疑解难》。在内容上,我们力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂,并注意数学思维与数学方法的论述,通过典型错误的分析,加深对数学概念、定理的理解,并对教材中部分习题进行了详细解答。虽然解数学问题没有什么万能的模式,但它们仍然有着某些规律、方法和技巧,通过我们所给解题方法的归纳,可以使读者抓住重点,较充分地理解教学内容,掌握解题的"钥匙",大大加快解题速度。本书可作为高等学校经济、管理类有关专业本科生学习微积分的参考书,同时适合考研学生在基础复习阶段使用。

微积分学习释疑解难

主　　编　苏德矿　程吉树

责任编辑　徐素君　夏庆民

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

(杭州天目山路148号　邮政编码310028)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: http://www.zjupress.com)

排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司

印　　刷　临安市曙光印务有限公司

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　17.5

字　　数　373千

版 印 次　2007年10月第1版　2007年10月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-05442-3

定　　价　26.00元

前　言

微积分是一门重要的大学公共基础课程，微积分的教学一般有教学内容的讲授和习题课的教学。微积分习题课是微积分学习的一个重要环节，它不仅在加深学生对数学概念的理解，逻辑推理能力的培养，以及计算技巧的训练等方面起着重要的作用，而且起到了教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。随着科学技术的日益发展，大学期间开设的新课程越来越多，每门课程所给的课时却越来越少，但教学内容几乎没有减少。微积分课程也是如此，用作习题课的课时变得很少，甚至没有时间上习题课。另外教师与学生接触的时间又较少，因而，学生在学习微积分的过程中，会遇到许多困难，而且无人指导，影响了学生学习微积分的兴趣和积极性，从而也直接影响了教学质量。

根据教育部高等学校数学课程教学指导委员会拟定的经管类微积分课程教学基本要求，参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，结合浙江大学苏德矿、金蒙伟等编写，由高教出版社出版的《微积分》(经管类)教材，我们编写了这本《微积分学习释疑解难》。在内容上，我们力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂，并注意数学思维与数学方法的论述，通过典型错误的分析，加深对数学概念、定理的理解，并对教材中部分习题进行详细解答。虽然解数学问题没有什么万能的模式，但它们仍然有着某些规律、方法和技巧，通过我们所给解题方法的归纳，可以使读者抓住重点，较充分地理解教学内容，掌握解题的“钥匙”，大大加快解题速度。它对学好微积分，在有关考试中取得好成绩都有直接的帮助。本书可作为高等学校经济、管理类有关专业本科生学习微积分的参考书，同时适合考研学生在基础复习阶段使用。

本书由苏德矿、程吉树主编、杨辉煌、骆桦副主编，苏德矿、章迪平、骆桦、杨辉煌、徐光辉、李秀玲、何敏勇、程吉树(按编写内容排序)共同编写。第一、三章由浙江大学苏德矿编写，第二章由浙江科技学院章迪平编写，第四章由浙江理工大学骆桦编写，第五章由浙江财经学院杨辉煌编写，第六章由浙江林学院徐光辉编写，第七章由新疆喀什师范学

院李秀玲编写，第八章由浙江工业大学何敏勇编写，第九章由杭州电子科技大学程吉树编写。全书由浙江大学金蒙伟主审。

由于编者水平有限，本书难免会有欠妥和错误之处，衷心希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在实践中得以逐步完善。

作者于杭州

2007 年 9 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函　数

知识网络图

- 函数
  - 定义
    - 定义域
      - 区间
      - 不等式
      - 集合
    - 对应法则
  - 表达方法
    - 表格法
    - 图像法
    - 解析法
      - 初等函数
      - 非初等函数
  - 函数的特性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
    - 有界性
  - 反函数
    - 定义
    - 存在性定理
  - 复合函数
  - 几个具体重要的函数
    - 符号函数：$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$
    - 取整函数：$f(x)=[x]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.
    - 狄里克雷函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

内容与要求

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法和函数关系的建立.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

重点 函数的概念、复合函数及分段函数的概念、反函数的概念 、基本初等函数的性质及其图形、初等函数的概念.

难点 函数的概念、复合函数、分段函数、反函数.

概念、定理的理解与典型错误分析

一、函数的概念

定义 1.1 设 A、B 是两个非空实数集,如果存在一个对应法则 f,使得对 A 中任何一个实数 x,在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应,则称对应法则 f 是 A 上的函数,记为

$$f: x \to y \text{ 或 } f: A \to B.$$

y 称为 x 对应的函数值,记为 $y=f(x)$, $x \in A$.
其中 x 叫做自变量,y 又叫因变量,A 称为函数 f 的定义域,记为 $D(f)$ 或 D,$f(A) \overset{\Delta}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$,称为函数的值域,记为 $R(f)$,在平面坐标系 xOy 下,集合 $\{(x,y) \quad y=f(x),\ x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形或图像.函数是微积分中最重要最基本的一个概念,因为微积分是以函数为研究对象,运用无穷小及无穷大过程分析处理问题的一门数学学科.

(1) 由于确定函数的因素是定义域、对应法则及值域,而值域被定义域和对应法则完全确定,故确定函数的两要素为定义域和对应法则.从而在判断两个函数是否为同一函数时,只要看这两个函数的定义域和对应法则是否相同,至于自变量、因变量用什么字母,函数用什么记号都是无关紧要的.

(2) 函数与函数表达式的区别:函数表达式指的是解析式子,是表示函数的主要形式,而函数除了用表达式来表示外,还可以用表格法、图像法等形式来表示,不要把函数与函数表达式等同起来.

二、反函数

定义 1.2 设 $y=f(x)$, $x \in D$,若对 $R(f)$ 中每一个 y,都有唯一确定且满足 $y=f(x)$ 的 $x \in D$ 与之对应,则按此对应法则就能得到一个定义在 $R(f)$ 上的函数,称这个函

数为 f 的反函数，记作

$$f^{-1}: R(f) \to D \text{ 或 } x = f^{-1}(y),\ y \in R(f).$$

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以常把上述函数改写成 $y = f^{-1}(x)$，$x \in R(f)$.

(1) 由函数、反函数的定义可知，反函数的定义域是原来函数的值域，值域是原来函数的定义域.

(2) 函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像相同，这因为满足 $y=f(x)$ 点 (x,y) 的集合与满足 $x=f^{-1}(y)$ 点 (x,y) 的集合完全相同，而函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 若 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，则 $y = f[f^{-1}(y)]$, $x = f^{-1}[f(x)]$.

(4) **定理 1.1**（反函数存在定理）严格增（减）的函数必有严格增（减）的反函数.

三、复合函数

定义 1.3 设 $y = f(u)$, $u \in E$, $u = \varphi(x)$, $x \in D$，若 $D(f) \cap R(\varphi) \neq \varnothing$，则 y 通过 u 构成 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为复合函数，记作 $y = f(\varphi(x))$.

复合函数的定义域为 $\{x \mid x \in D \text{ 且 } \varphi(x) \in E\}$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量，$\varphi(x)$ 称为内函数，$f(u)$ 称为外函数.

(1) 在实际判断两个函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 能否构成复合函数，只要看 $y = f(\varphi(x))$ 的定义域是否为非空集，若不为空集，则能构成复合函数，否则不能成复合函数.

(2) 在求复合函数时，必须指出谁是内函数，谁是外函数，例如 $y=f(x)$，$y=g(x)$，若 $y=f(x)$ 作为外函数，$y=g(x)$ 作为内函数. 则复合函数 $y = f(g(x))$，若 $y = g(x)$ 作为外函数，$y = f(x)$ 作为内函数，则复合函数为 $y = g(f(x))$.

(3) 我们要学会分析复合函数的复合结构，既要会把几个函数复合成一个复合函数，又要会把一个复合函数分拆成几个函数的复合.

四、初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

大家一定要记住基本初等函数的定义域、值域，会画它们的图像，并且要知道这些函数在哪些区间递增，在哪些区间递减，其图像是否经过原点？与坐标轴的交点是什么？以后我们常常要用到.

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数统称为初等函数.

不是初等函数称为非初等函数.

一般来说,分段函数不是初等函数,但有些分段函数可能是初等函数,例如

$$f(x)=\begin{cases}-x, x\leqslant 0\\ x, \quad x>0\end{cases}=|x|=\sqrt{x^2},$$

是由 $y=\sqrt{u}$, $u=x^2$ 复合而成.

五、具有某些特性的函数

1. 奇(偶)函数

定义 1.4 设 D 是关于原点对称的数集,$y=f(x)$为定义在 D 上的函数,若对每一个 $x\in D$(这时也有 $-x\in D$),都有 $f(-x)=-f(x)$($f(-x)=f(x)$),则称 $y=f(x)$为 D 上的奇(偶)函数.

(1)定义域关于原点对称是函数为奇(偶)函数的必要条件.

(2)若 $f(x)$为奇函数,则 $f(0)=0$,事实上,由定义知 $f(-0)=-f(0)$,有 $f(0)=-f(0)$,得$f(0)=0$.

2. 周期函数

定义 1.5 设 $y=f(x)$为定义在 D 上的函数,若存在某个非零常数 T,使得对一切 $x\in D$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为周期函数,T 称为 $y=f(x)$的一个周期.

显然,若 T 是 $f(x)$的周期,则 kT $(k\in\mathbf{Z})$ 也是 $f(x)$的周期,若周期函数 $f(x)$的所有正周期中存在最小正周期,则称这个最小正周期为 $f(x)$的基本周期,一般地,函数的周期指的是基本周期.

必须指出,不是所有的周期函数都有最小正周期,例如 $f(x)=c$(c 为常数),因为对任意的实常数 T,都有 $f(x+T)=f(x)=c$. 所以 $f(x)=c$ 是周期函数,但在正实数里没有最小正常数,所以,周期函数 $f(x)=c$ 没有最小正周期.

如果 $f(x)$为周期函数,且周期为 T,任给 $x\in D$,有 $f(x)=f(x+kT)$,知 $x+kT\in D$($k\in\mathbf{Z}$). 所以 D 是无穷区间,即无穷区间是周期函数的必要条件.

3. 单调函数

定义 1.6 设 $y=f(x)$为定义在 D 上的函数,若对 D 中任意两个数 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$,总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$为 D 上的递增(递减)函数,特别地,若总成立严格不等式

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$为 D 上严格递增(递减)函数.

递增和递减函数统称为单调函数,严格递增和严格递减函数统称为严格单调函数.

4. 分段函数

如果一个函数在其定义域内,对应于不同的 x 范围有着不同的表达式,则称该函数为分段函数.

注意 分段函数不是由几个函数组成的,而是一个函数,我们经常构造分段函数来举反例,常见的分段函数有符号函数、狄里克雷函数、取整函数.

5. 有界函数与无界函数

定义 1.7 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数,若存在常数 $N\leqslant M$,使得对每一个 $x\in D$,都有

$$N\leqslant f(x)\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数,此时,称 N 为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界,称 M 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

由定义可知上、下界有无数个,我们也可写成如下的等价定义,更加方便使用.

定义 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数,若存在常数 $M>0$,使得对每一个 $x\in D$,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则 $f(x)$ 为 D 上的有界函数.

几何意义:若 $f(x)$ 为 D 上的有界函数,则 $f(x)$ 的图像完全落在直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

注意 直线 $y=-M,y=M$ 不一定与曲线相交.

定义 1.8 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数,若对每一个正常数 M(无论 M 多么大),都存在 $x_0\in D$,使 $|f(x_0)|>M$,则称 $f(x)$ 为 D 上的无界函数.

6. 函数的延拓与分解

有时我们需要由已知函数产生新的函数来解决实际问题,这是我们从函数的特性出发,开拓由已知产生新的函数的方法.

设 $y=f(x)$, $x\in[0,a]$,我们考虑区间 $[-a,a]$ 上的函数 $F(x)$,它是偶函数,且在 $[0,a]$ 上,使 $F(x)=f(x)$,则应有 $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,a],\\ f(-x), & x\in[-a,0).\end{cases}$ 称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的偶延拓.

同样,可给出 $f(x)$ 的奇延拓,即函数 $F(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的奇函数,且在 $(0,a)$ 上,$F(x)=f(x)$,则应有

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,a)\\ 0, & x=0\\ -f(-x), & x\in(-a,0)\end{cases}.$$

这样，研究 $f(x)$ 只要研究 $F(x)$ 就可以了.

此外，定义在区间 $(-a,a)$ 上的任何一个函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数与一个偶函数的和. 事实上 $f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，

设 $f_1(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，$f_2(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，由奇偶函数的定义知，$f_1(x)$ 是奇函数，$f_2(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

我们还可以证明 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是唯一存在，如果 $f(x)=g_1(x)+g_2(x)$，其中 $g_1(x)$ 是奇函数，$g_2(x)$ 是偶函数，于是

$$f(x)=g_1(x)+g_2(x),\quad f(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)+g_2(x),$$

解得 $g_1(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=f_1(x)$，$g_2(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=f_2(x)$.

例 1 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

典型错误 令 $\dfrac{1}{x}=t$，得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2},$$

故

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}.$$

点评 $\sqrt{t^2}=|t|$，$\sqrt{t^2}\neq t$.

解 令 $\dfrac{1}{x}=t$，得 $f(t)=\dfrac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{t}\right)^2}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{|t|}\sqrt{1+t^2}$，故

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}.$$

例 2 已知 $f(x)=2x+1$，求 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

典型错误 由 $f(x)=2x+1$，知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2\cdot\dfrac{1}{x}+1$.

设 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x}+1$，解得 $x=\dfrac{2}{y-1}$，所以 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2}{x-1}$.

点评 正确做法是：由 $f(x)$ 求出 $f^{-1}(x)$，再把 x 换成 $\dfrac{1}{x}$，而不是把 $f(x)$ 中的 x 换成 $\dfrac{1}{x}$，得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，再求反函数，这实际上是求 $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的反函数 $g^{-1}(x)$.

解　由 $y=f(x)=2x+1$，解得 $x=\frac{y-1}{2}$，故 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$．于是

$$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}-1}{2}=\frac{1-x}{2x}.$$

例 3　试指出函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 在什么条件下其反函数就是本身.

典型错误　由函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$，得

$ycx+yd=ax+b\Rightarrow(yc-a)x=b-yd\Rightarrow x=\frac{b-dy}{cy-a}$，

故反函数为 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$．由条件知 $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-dx+b}{cx-a}$，所以 $a=-d$．

点评　仅凭观察得出结论，缺乏严密性.

解　由 $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-dx+b}{cx-a}\Rightarrow-dcx^2+(cb-d^2)x+bd=acx^2+(bc-a^2)x-ab$，

得
$$\begin{cases}-dc=ac\\cb-d^2=bc-a^2\\bd=-ab\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+d)c=0\\(a+d)b=0\\a^2=d^2\end{cases}$$

当 b,c 中至少有一个不为零时，有 $a=-d$；当 $b=c=0$ 时，$a=\pm d\neq 0$．

解题方法与题例

一、求函数定义域的方法

(1) 若函数是一个具体的数学表达式子，则其定义域应是使该式有意义的一切实数组成的集合：

① 分式的分母不能为零；

② 偶次根号下应大于或等于零；

③ 对数式的真数应大于零且底数大于零不为 1；

④ $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$，其 $|\varphi(x)|\leqslant 1$；

⑤ $\tan\varphi(x)$，其中 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\varphi(x)<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；$\cot\varphi(x)$，其中 $k\pi<\varphi(x)<k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

⑥ 若函数的表达式由几项组成，则它的定义域是各项定义域的交集；

⑦ 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(2) 若函数涉及实际问题，定义域除了使数学式子有意义外，还应当确保对实际问题有意义的自变量取值全体组成的集合.

(3) 对于抽象函数的定义域问题，要依据函数定义及题设条件确定.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x-x^3}$；　　　　(2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

解 (1) 要使函数式子有意义，就必须满足 $3x-x^3\geqslant 0$.

化简有
$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\leqslant 0,$$
即
$$(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})\leqslant 0.$$
解之，得定义域为 $x\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[0,\sqrt{3}]$.

(2)要使函数式子有意义，就必须满足
$$\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1,\text{即}-1\leqslant\frac{2x}{1+x}\leqslant 1,$$
化简有
$$-1\leqslant 2-\frac{2}{1+x}\leqslant 1,-3\leqslant-\frac{2}{1+x}\leqslant-1,$$
不等式各边除以(-2)有
$$\frac{3}{2}\geqslant\frac{1}{1+x}\geqslant\frac{1}{2},$$
各边取倒数得 $\dfrac{2}{3}\leqslant 1+x\leqslant 2$. 解之，得函数的定义域为 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$，求 $f(x)$的定义域.

解 要使函数式子有意义，必须满足 $\begin{cases}1+\dfrac{1}{x-2}\neq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq 2\end{cases}$.

故所给函数的定义域为 $\{x: x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq 1,\ x\neq 2\}$.

注意 如果把 $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$ 化简为 $\dfrac{x(x-2)}{x-1}$，那么函数的定义域为 $x\neq 1$ 的一切实数，因此，求函数的定义变形式时需特别小心，避免出错.

例 3 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

例 4 设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域$(a>0)$.

解 要使 $f(x+a)+f(x-a)$ 有意义，必须满足

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}\quad 得 \quad \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由 $a\leqslant 1-a$，知函数的定义域为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，由 $a>1-a$ 知函数的定义域为空集.

二、求函数值域的方法

(1) 由定义域 x 的范围，利用不等式求出 $f(x)$ 的范围；

(2) 若 $y=f(x)$ 有反函数 $x=f^{-1}(y)$，求出反函数的定义域就是函数的值域；

(3) 利用一元二次方程的判别式求函数的值域.

例 5 求下列函数值域：

(1) $y=x+\sqrt{1-x}$；　(2) $y=\dfrac{x+1}{x+3}$；　(3) $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$.

解 (1)令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$，于是 $y=x+\sqrt{1-x}=1-t^2+t=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$. 当且仅当 $t=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{3}{4}$ 时，$y=\frac{5}{4}$. 故函数 $y=x+\sqrt{1-x}$ 的值域是 $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

(2)由 $y=\dfrac{x+1}{x+3}$，得 $(x+3)y=x+1$，解之，$x=\dfrac{1-3y}{y-1}$ 是 $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ 的反函数，而 $x=\dfrac{1-3y}{y-1}$ 的定义域是 $y\neq 1$，故函数值域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(3)由原函数式变形，得　$y(x^2-x+1)=x^2+2x+1$，即

$$(y-1)x^2-(y+2)x+y-1=0.$$

当 $y-1=0$，即 $y=1$ 时，$x=0$；当 $y-1\neq 0$，即 $y\neq 1$ 时，
$\Delta=(y+2)^2-4(y-1)^2\geqslant 0$，即 $0\leqslant y\leqslant 4(y\neq 1)$. 故函数的值域为 $[0,4]$.

三、判断两函数是否为同一函数的方法

例 6 判断下列各组函数是否为同一函数：

(1) (i) $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$；　(ii) $s=\sqrt{1-\cos^2 t}\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$.

(2) (i) $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$；　(ii) $y=\dfrac{1}{x+1}$.

解 (1) 由 $y=\sin x$ 的定义域是 $[0,\pi]$，$s=\sqrt{1-\cos^2 t}$ 的定义域是 $[0,\pi]$. 知两函数定义域相同，又 $s=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$，知两函数对