研究生用教材

随机过程基础及其应用

SUIJIGUOCHENG JICHU JIQI YINGYONG

赵希人 彭秀艳 编著

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

研究生用

随机过程基础及其应用

赵希人　彭秀艳　编著

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书共分9章:随机过程的基本概念、平稳随机过程、马尔可夫过程、时间序列分析、时间序列建模、维纳最优滤波和预测、离散线性系统的最优估计、广义维纳(Winer)滤波、线性系统在随机输入作用下的分析。每章后都配有适量习题。

本书可作为工科院校的研究生教材,也可供从事有关专业的科学研究、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程基础及其应用/赵希人,彭秀艳编著.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.9

ISBN 978-7-81133-037-3

Ⅰ.随… Ⅱ.①赵…②彭… Ⅲ.随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第137971号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 23.5
字　　数 498千字
版　　次 2007年9月第1版
印　　次 2007年9月第1次印刷
定　　价 28.00元

http://press.hrbeu.edu.cn

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

自从 1986 年以来，我们就一直为哈尔滨工程大学硕士研究生讲授随机过程这门课程，在长期的教学过程中，不断地总结经验，对讲课内容不断修改和完善，在此基础上编写出这本书。

随机过程的理论与方法，已广泛地应用于科学技术各个领域，并越来越显示出十分重要的作用。例如，平稳过程的滤波和预测应用于通信、雷达及导航；时间序列分析应用于系统建模及气象预报；卡尔曼滤波应用于空间技术及信息处理；线性系统在随机作用下的分析计算应用于电力系统运行及船舶自动航行等等。不仅如此，随机过程理论与方法已广泛地渗透到很多专业和技术领域中，特别是，作为控制科学与工程的基础课，为许多后续专业课，如系统辨识与参数估计，自适应控制，随机控制，最优估计，智能控制与专家系统等学习，打下坚实的理论基础。因此，对于工科院校的研究生以及从事科学研究、工程技术的工作者，随机过程无疑是一门很重要的基础课。

编写这本书是基于以下两点考虑：第一，考虑到工科院校本科大学生的数学基础，我们的目的是使他们能在现有的数学基础上，较顺利地学习随机过程的基础理论及方法。例如，在推导平稳过程及其相关函数的谱分解定理时，我们采用了学生熟知的傅立叶变换的方法，虽然篇幅冗长了些，但学生对于谱分解的内在含义，却有了深刻的理解。第二，考虑到如何应用随机过程理论及方法解决工程中出现的实际问题，在这方面，我们力图将多年来科研工作的应用体会，编写到书中，以使学生在学习这门课的过程中，给出一些启发并产生一定的兴趣。例如，我们把广义维纳滤波理论及应用，特别是二阶数字锁相环构造及分析，编写到这本书中来，就是出于这个目的。

我们感到，这本书既不同于从数学角度讲授随机过程，也不同于完全介绍随机过程理论的工程应用，我们力图编写一本介于两者之间的一本书。

从总体上，这本书分为两大部分，第一部分是介绍随机过程的基础理论（基础编），包括随机过程的基本概念，平稳随机过程，马尔可夫过程，时间序列分析，时间序列建模等。第二部分是介绍随机过程理论在工程应用中的几个经典的成果（应用编），包括维纳（Wiener）最优滤波和预测方法；离散时间线性系统的最优估计方法，该方法通常称之为卡尔曼（Kalman）滤波方法；广义维纳（Wiener）滤波方法，特别是在无线电电子锁相技术中应用；线性系统在随机输入作用下的分析，其中介绍了高阶线性系统的奥斯特姆（K. J. Aström）计算方法。

本书共分九章，每章后面都配有适量的习题。为了更好地学习本书中的内容，我们在附录中编写了概率论知识要点并配有习题。

本书的主要结论均以定理和推论的形式给出，这不仅是强调重点的一种有效形式，而且查

询起来也极为方便。

尽管我们在这门课程中从事了多年的教学，从主观上作了很大的努力，希望编写出一本有些特色的书。但由于水平有限，我们感到，这个希望并未能很好地实现，而且书中也难免存在不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

目　录

基础编

应 用 编

基 础 编

1 随机过程的基本概念

1.1 随机过程的定义及有限维分布函数族

在概率论中，我们学习过有关一个或几个随机变量的知识。由于实际的需要，我们将研究依赖于时间 t 的一族无穷多个相互有关的随机变量，记作 $\{X(t), t \in T\}$。其中 T 是时间 t 的集合，通常有以下几种：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ T_1 = \{t_n, n = 0,1,2,\cdots\} \\ (2)\ T_2 = \{t_n, n = \cdots, -1,0,1,\cdots\}\end{array}\right\} \tag{1.1.1}$$

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ T_3 = \{t, t \in [a,b]\}, a < b \text{ 为任意实数} \\ (4)\ T_4 = \{t, t \in (-\infty, +\infty)\}\end{array}\right\} \tag{1.1.2}$$

其中(1.1.1)式所表示的时间集合称为离散时间集合，(1.1.2)式所表示的时间集合称连续时间集合。当 T 为(1)(2)两种情形时，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为随机序列；当 T 为(3)(4)两种情形时，称 $\{X(t), t \in T\}$ 为随机过程。为进一步了解上述概念，先看几个简单的例子。

例 1.1.1 考察电网电压波动问题。由于发电机组在发电过程中的随机波动以及各用户在使用过程中的不同，使得电网电压出现随机波动。用 $X(t)$ 表示 t 时刻的电网电压值，当 t 固定时，$X(t)$ 就是一个随机变量，随着时间 t 的不断变化，就得到一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$。

例 1.1.2 考察电话站收到的用户呼叫次数。由于各用户向电话总机的呼叫是随机的，因此，电话站收到的用户呼叫次数也是随机的。用 $X(t)$ 表示在时刻 t 以前电话站接到的电话呼叫次数，当时间 t 固定时，$X(t)$ 就是一个随机变量，随着时间 t 的变化就得到一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$。

从以上直观的例子可引出随机过程的含义：

设 E 为一个随机实验，其全部实验结果 ω 构成了样本空间 Ω，即 $\{\omega\} = \Omega$，进一步由 Ω 中的某些被称之为事件的子集 A 构成了波雷尔体 F，即 $\{A\} = F$，并对每个事件 A 赋以概率 P，通

常称三元总体(Ω,F,P)为概率空间。又假设T是由(1.1.1)式或(1.1.2)式所表示的时间的集合。对每一$t\in T$,有定义在概率空间(Ω,F,P)上的随机变量$X(t,\omega),\omega\in\Omega$,于是称$X(t,\omega)$为随机过程,用符号$\{X(t,\omega),t\in T\}$表示,如不产生混乱,可简写为$\{X(t),t\in T\}$。

对于随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$,随t和ω的不同取值,具有以下五种含义:

1.当t和ω都是变量时,$\{X(t,\omega),t\in T\}$表示一族无穷多个依赖于时间$t\in T$的随机变量。

2.当t和ω都是变量时,$\{X(t,\omega),t\in T\}$也可表示一族无穷多个依赖于基于事件ω的时间函数族。

3.当ω固定而t是变量时,$\{X(t,\omega),t\in T\}$表示一个时间函数,通常称为样本函数。

4.当t固定而ω是变量时,$\{X(t,\omega),t\in T\}$表示一个随机变量。

5.当t和ω都固定时,$\{X(t,\omega),t\in T\}$代表随机变量取某一个数字。

根据第1种含义,可给出关于随机过程的比较简单的定义:

定义1.1.1 称一族无穷多个依赖于时间$t\in T$且在概率空间(Ω,F,P)上定义的随机变量$\{X(t),t\in T\}$为随机函数,其中T为时间t的集合,如果T为(1.1.1)式所表示的离散时间t的集合,则称$\{X(t),t\in T\}$为**随机序列**,如果T为(1.1.2)式所表示的连续时间的集合,则称$\{X(t),t\in T\}$为**随机过程**。

由上面的定义可以看出,随机序列实际上只是随机过程当时间参数t取离散值时的情形,所以也可以把随机序列看作是随机过程的特殊情形。

还可以从第二种含义来定义随机过程。现在对某随机过程做一次测试,假定在测试过程中没有误差,对于某$t=t_1\in T$时刻,其测量值就取某一确定值$x_1(t_1)$,随着时间t的推移,就可得到一个定义于T上的函数$x_1(t)$,如图1.1.1所示,称$x_1(t)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一个实现或称样本函数。

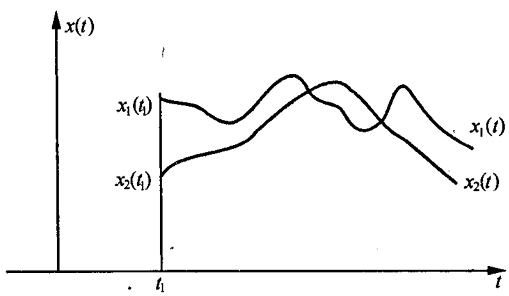

图1.1.1 随机过程的样本函数表示

如果在相同条件下,再重复一次测试,就得到随机过程$\{X(t),t\in T\}$的另一个实现$x_2(t)$,如果在相同条件下进行无穷多次测试,就会得到随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一族实现或称样本函数族。由此可知,随机过程$\{X(t),t\in T\}$既可看成是一族无穷多个随机变量的集合,也可看成是所有实现或所有样本函数的集合。于是得到随机过程的另一个定义:

定义1.1.2 称所有可能的实现(样本函数)$x(t),t\in T$的集合$\{X(t),t\in T\}$为随机函数,其中当t固定时,集合$\{X(t),t\in T\}$表示定义在概率空间(Ω,F,P)上的随机变量$X(t)$,$t\in T$的所有可能取值,T为时间t集合,如果T为(1.1.1)式所表示的离散时间t的集合,则称

$\{X(t),t\in T\}$ 为随机序列,如果 T 为(1.1.2)式所表示的连续时间 t 的集合,则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为随机过程。

现在考察随机过程 $\{X(t),t\in T\}$,为了描述它的统计特性,当然要知道每个时刻 $t\in T$ 的随机变量 $X(t)$ 的分布函数,即

$$F(t;x)\triangleq P(X(t)<x),t\in T \tag{1.1.3}$$

称 $F(t;x)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**一维分布函数**。如果

$$f(t;x)\triangleq\frac{\partial F(t;x)}{\partial x},t\in T \tag{1.1.4}$$

存在,则称 $f(t;x)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**一维密度函数**。

至此,我们仅仅描述了随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在每个时刻 $t\in T$ 上的统计特性。为了描述随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在任意两个时刻 $t_1,t_2\in T$ 上的相互关系,显然用上面的描述方法是不能解决问题的,为此应引入二维分布函数。

称

$$F(t_1,t_2;x_1,x_2)\triangleq P\{X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2\},t_1,t_2\in T \tag{1.1.5}$$

为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**二维分布函数**。如果

$$f(t_1,t_2;x_1,x_2)\triangleq\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F(t_1,t_2;x_1,x_2) \tag{1.1.6}$$

存在,则称 $f(t_1,t_2;x_1,x_2)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**二维密度函数**。

一般地,对任意有限个 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,称

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq P\{X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2,\cdots,X(t_n)<x_n\} \tag{1.1.7}$$

为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 n **维分布函数**。如果

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.1.8}$$

存在,则称 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 n **维密度函数**。

把随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的一维分布,二维分布,…,以及 n 维分布的全体

$$\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n),t_i\in T,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 1\} \tag{1.1.9}$$

称为该随机过程的**有限维分布函数族**。

由上述可知,对于随机过程 $\{X(t),t\in T\}$,如果能知道它的有限维分布函数族,那么,对任意 n 个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,这 n 个随机变量 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$ 的统计特性就完全被确定了。也就是说,只有知道有限维分布函数族(1.1.9)式,随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 才能统计地完全被确定。

由概率论中多维分布的性质,可知有限维分布函数族(1.1.9)式有以下两个性质:

(1) 对称性:对$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in};x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in}) \tag{1.1.10}$$

(2) 相容性:对任意 $m<n$,有

$$F(t_1,t_2,\cdots t_m,t_{m+1},\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)= F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{1.1.11}$$

下面举例说明有限维分布函数族的求法。

例 1.1.3 设 $X(t)=U+Vt$, $|t|<\infty$,其中(U,V)为二维随机变量,且密度函数$f(u,\nu)$为已知。

利用以上已知条件可以求出有限维分布函数族。例如一维分布函数为

$$F(t_1,x)=P\{X(t_1)<x_1\}=P\{U+Vt_1<x_1\}=\iint_{D1}f(u,\nu)\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu \tag{1.1.12}$$

其中积分域 D_1 由图 1.1.2 所表示。

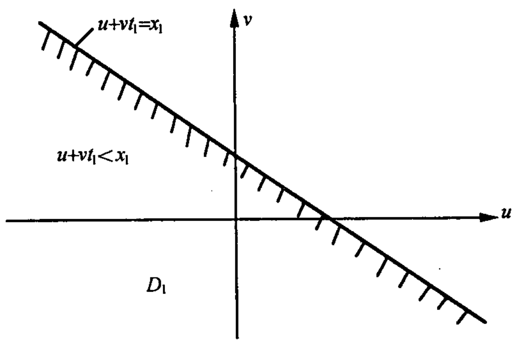

图 1.1.2 例 1.1.3 的一维分布函数的积分域

二维分布函数为

$$F(t_1,t_2;x_1,x_2)=P\{X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2\}=P\{U+Vt_1<x_1,U+Vt_2<x_2\}= \iint_{D2}f(u,\nu)\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu$$

其中积分域 D_2 由图 1.1.3 表示。

一般地,n 维分布函数$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$为

$$\begin{aligned}F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)&=P\{X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2,\cdots,X(t_n)<x_n\}=\\&P\{U+Vt_1<x_1,\cdots,U+Vt_n<x_n\}=\\&\iint_{D_n}f(u,\nu)\mathrm{d}u\mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

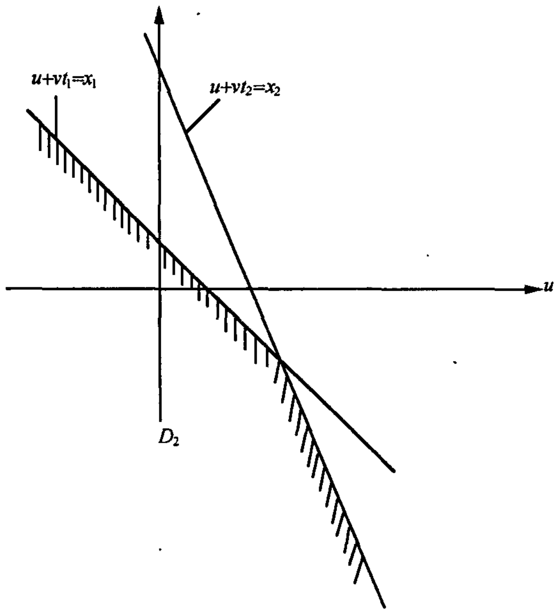

图 1.1.3　例 1.1.3 的二维分布函数的积分域

其中积分域 D_n 为由 $U + Vt_i < x_i, i = 1,2,\cdots,n$ 所界的区域。于是可求出随机过程 $X(t)$ 有限维分布函数族

$$\{F(t_1,\cdots,t_n;x_1,\cdots,x_n), \mid t_i \mid < \infty, i = 1,2,\cdots,n, n \geqslant 1\}$$

例 1.1.4　设样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 为实数轴上的线段[0,1]，其概率分布是均匀的，时间指标 t 的集合 T 也是区间[0,1]，现考察随机过程$\{X(t), t \in T\}$ 和$\{Y(t), t \in T\}$，其定义为

$$X(t,\omega) = 0, \text{对所有 } t \text{ 及 } \omega \tag{1.1.13}$$

$$Y(t,\omega) = \begin{cases} 1, \text{当 } t = \omega \text{ 时} \\ 0, \text{当 } t \neq \omega \text{ 时} \end{cases} \tag{1.1.14}$$

利用上述条件，可以求出随机过程$\{X(t), t \in T\}$ 及$\{Y(t), t \in T\}$ 的有限维分布函数族。

事实上，对任意正整数 n，由(1.1.13)式可知有

$$F_X(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \cdots, X(t_n) < x_n) = \begin{cases} 0, \text{当 } x_i \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,n \\ 1, \text{其他} \end{cases} \tag{1.1.15}$$

由(1.1.14)式还有

$$F_Y(t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_n) = P(Y(t_1) < y_1, Y(t_2) < y_2, \cdots, Y(t_n) < y_n) =$$

$$\begin{cases}0, 当\ y_i \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,n \\ 1 - \sum\limits_{i \in \{k, y_k \leqslant 1, k=1,2,\cdots,n\}} P(\omega = t_i), \end{cases} \quad 其他 \tag{1.1.16}$$

然而,由概率的基本性质又知

$$\sum_{i \in \{k, y_k \leqslant 1, k=1,2,\cdots,n\}} P(\omega = t_i) = 0$$

所以(1.1.16)式可为

$$F_Y(t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{cases}0, 当\ y_i \leqslant 0, i = 1,2,\cdots,n \\ 1, 其他\end{cases} \tag{1.1.17}$$

比较(1.1.17)式和(1.1.15)式可知随机过程$\{X(t), t \in T\}$和$\{Y(t), t \in T\}$的有限维分布函数族是相同的。

本书主要讨论实值随机过程。但在某些章节需要讨论复值随机过程时,我们会给以特别的申明并作适当的提示,目的是使读者更容易接受和理解。

1.2 随机过程的示性函数

在1.1节已经指出,为了描述一个随机过程$\{X(t), t \in T\}$,必须知道它的有限维分布函数族。然而在计算较高维数的分布函数时,往往在计算上带来很大的困难。因此,在实际应用中,通常是利用随机过程的几个主要特征来描述。我们知道,在概率论中为了描述随机变量,通常是用均值、方差和相关系数等示性数来描述。对于随机过程,均值、方差及相关系数只不过是时间 t 的函数而已。因此,我们通常称之为均值函数、方差函数及相关函数,有时把这些函数叫做随机过程的示性函数。

定义 1.2.1 设$\{X(t), t \in T\}$为随机过程,如果积分

$$m_X(t) \triangleq E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(t,x) \mathrm{d}x \tag{1.2.1}$$

存在,则称 $m_X(t)$ 为该随机过程的**均值函数**,有时简记为 $m(t)$。其中 $F(t,x)$ 和 $f(t,x)$ 分别为该随机过程的一维分布函数和一维密度函数。

定义 1.2.2 设$\{X(t), t \in T\}$为随机过程,如果积分

$$D_X(t) \triangleq E\{[X(t) - m(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m(t)]^2 \mathrm{d}F(t,x) \tag{1.2.2}$$

存在,则称 $D_X(t)$ 为该随机过程的**方差函数**,有时简记为 $D(t)$。特别地,称

$$\sigma_X(t) \triangleq \sqrt{D_x(t)} \tag{1.2.3}$$

为随机过程$\{X(t), t \in T\}$的**标准偏差函数**。

定义 1.2.3 设$\{X(t), t \in T\}$为随机过程,如果积分

$$\Gamma_X(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \mathrm{d}^2 F(t_1,t_2;x_1,x_2) \tag{1.2.4}$$

存在,则称 $\Gamma_X(t_1,t_2)$ 为该随机过程的**原点自相关函数**。特别地,称 $\Gamma_X(t,t) = E[X(t)^2]$ 为**二阶原点矩函数**。完全类似,称

$$\Gamma_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \tag{1.2.5}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$ 和$\{Y(t),t\in T\}$ 的**原点互相关函数**。

称积分

$$\begin{aligned} B_X(t_1,t_2) &\triangleq E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\} = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x_1-m_X(t_1)][x_2-m_X(t_2)]\mathrm{d}^2F(t_1,t_2;x_1,x_2) = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x_1-m_X(t_1)][x_2-m_X(t_2)]f(t_1,t_2;x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$ 的**中心自相关函数**。完全类似,称

$$B_{XY}(t_1,t_2) = E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\} \tag{1.2.7}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$ 和$\{Y(t),t\in T\}$ 的**中心互相关函数**。

由(1.2.4) 式及(1.2.6) 式,可知

$$B_X(t_1,t_2) = \Gamma_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \tag{1.2.8}$$

比较(1.2.2) 式和(1.2.6) 式,还有

$$D_x(t) = B_X(t,t) = \Gamma_X(t,t) - m_X^2(t) \tag{1.2.9}$$

下面举几个例子来说明如何求随机过程的示性函数。

例 1.2.1 设 $X(t) = X_0 + Vt, a\leqslant t\leqslant b$,其中 X_0 和 V 是相互独立的服从正态 $N(0,1)$ 分布的随机变量。

因为 X_0 和 V 是正态分布,所以对任意 $t, a\leqslant t\leqslant b$, $X(t)$ 也为正态分布,而且由概率论可知, $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$ 为 n 维正态分布。由(1.2.1) 式,(1.2.4) 式及(1.2.9) 式可分别求出均值函数为

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = E[X_0+Vt] = E[X_0]+E[V]t = 0$$

原点自相关函数为

$$\begin{aligned} \Gamma_X(t_1,t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[(X_0+Vt_1)(X_0+Vt_2)] = \\ &E[X_0^2]+E[X_0V]t_1+E[X_0V]t_2+E[V^2]t_1t_2 = 1+t_1t_2 \end{aligned}$$

方差函数 $D_X(t)$ 为

$$D_X(t) = \Gamma_X(t,t) - m_X^2(t) = 1+t^2$$

例 1.2.2 设 $X(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t, -\infty < t < +\infty, \omega > 0$ 为实常数,而 A,B 为相互独立的服从正态 $N(0,\sigma^2)$ 分布的随机变量。

由于 A,B 为正态分布且 $X(t)$ 为 A,B 的线性组合，所以 $X(t)$ 为正态分布且 $X(t_1)$，$X(t_2),\cdots,X(t_n)$ 为 n 维正态分布。由(1.2.1)式，(1.2.4)式及(1.2.9)式可以求出该随机过程的示性函数。

均值函数为

$$m_X(t)=E\{X(t)\}=E\{A\sin\omega t+B\cos\omega t\}=E\{A\}\sin\omega t+E\{B\}\cos\omega t=0$$

原点自相关函数为

$$\begin{aligned}\Gamma_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}&=E\{[A\sin\omega t_1+B\cos\omega t_1][A\sin\omega t_2+B\cos\omega t_2]\}=\\&E\{A^2\}\sin\omega t_1\sin\omega t_2+E\{BA\}\cos\omega t_1\sin\omega t_2+\\&E\{AB\}\sin\omega t_1\cos\omega t_2+E\{B^2\}\cos\omega t_1\cos\omega t_2=\\&\sigma^2[\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\sin\omega t_1\sin\omega t_2]=\sigma^2\cos\omega(t_1-t_2)\end{aligned}$$

方差函数为

$$D_X(t)=\Gamma_X(t,t)=\sigma^2$$

例 1.2.3 设 $X(t)=\sum_{k=1}^{N}(A_k\sin\omega_k t+B_k\cos\omega_k t)$，$-\infty<t<\infty$，$\omega_k>0(k=1,2,\cdots,N)$ 为实常数，而 $A_k,B_k(k=1,2,\cdots,N)$ 为相互独立的服从正态 $N(0,\sigma_k^2)$ 分布的随机变量。

在本例的条件下，$X(t)$ 仍为正态分布，且 $X(t_1),\cdots,X(t_n)$ 为 n 维正态分布，利用和前面两例相同的方法，可以求出均值函数为

$$\begin{aligned}m_X(t)=E\{X(t)\}&=E\Big\{\sum_{k=1}^{N}(A_k\sin\omega_k t+B_k\cos\omega_k t)\Big\}=\\&\sum_{k=1}^{N}(E\{A_k\}\sin\omega_k t+E\{B_k\}\cos\omega_k t)=0\end{aligned}$$

原点自相关函数为

$$\begin{aligned}\Gamma_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}&=\\&E\Big\{\Big[\sum_{k=1}^{N}A_k\sin\omega_k t_1+B_k\cos\omega_k t_1\Big]\Big[\sum_{l=1}^{N}A_l\sin\omega_l t_2+B_l\cos\omega_l t_2\Big]\Big\}=\\&\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}E[A_kA_l]\sin\omega_k t_1\sin\omega_l t_2+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}E[B_kA_l]\cos\omega_k t_1\sin\omega_l t_2+\\&\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}E[A_kB_l]\sin\omega_k t_1\cos\omega_l t_2+\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}E[B_kB_l]\cos\omega_k t_1\cos\omega_l t_2\end{aligned}\quad(1.2.10)$$

由于 $k\neq l$ 时，A_k,A_l,B_k,B_l 相互独立，所以有

$$E[A_kA_l]=E[B_kA_l]=E[A_kB_l]=E[B_kB_l]=0$$

而当 $k=l$ 时，有 $E[A_k^2]=\sigma_k^2$，$E[B_k^2]=\sigma_k^2$，$E[B_kA_k]=E[A_kB_k]=0$，这样一来，(1.2.10)式可以写成

$$\Gamma_X(t_1,t_2)=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\sin\omega_k t_1\sin\omega_k t_2+\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos\omega_k t_1\cos\omega_k t_2=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos\omega_k(t_1-t_2)$$

方差函数 $D_X(t)$ 为

$$D_X(t)=\Gamma_X(t,t)=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2$$

例 1.2.4　考察一阶滑动合序列 $\{X(k),k=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$,其定义为

$$X(k)=\xi(k)+C\xi(k-1) \tag{1.2.11}$$

其中 $\{\xi(k),k=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 为相互独立的服从正态 $N(0,1)$ 分布的随机变量,C 为常数,因为 $X(k)$ 为 $\{\xi(k),k=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 的线性组合,所以 $X(k)$ 也为正态分布的随机变量,且有 $m_X(k)=E\xi(k)+CE\xi(k-1)=0$

$$\begin{aligned}\Gamma_X(k,s)&=E[X(k)X(s)]=E\{[\xi(k)+C\xi(k-1)][\xi(s)+C\xi(s-1)]\}=\\&E[\xi(k)\xi(s)]+CE[\xi(k-1)\xi(s)]+CE[\xi(k)\xi(s-1)]+\\&\quad C^2E[\xi(k-1)\xi(s-1)]=\\&\delta(k-s)+C\delta(k-1-s)+C\delta(k-s+1)+C^2\delta(k-s)=\\&\begin{cases}1+C^2, & \text{当 } k-s=0\\ C, & \text{当 } |k-s|=1\\ 0, & \text{当 } |k-s|>1\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为克罗尼克(kronecker) − δ 函数,定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1.2.13}$$

例 1.2.5　考察一阶自回归序列 $\{X(k),k=1,2,\cdots\}$,其定义为

$$X(k)+aX(k-1)=\xi(k) \tag{1.2.14}$$

其中 $|a|<1$ 且为常数,$\{\xi(k),k=1,2,\cdots\}$ 为相互独立的服从正态 $N(0,1)$ 分布的随机变量序列,初始值 $X(0)$ 为已知常数。试确定 $\{X(k),k=1,2,\cdots\}$ 的均值函数 $m_X(k)$ 及原点自相关函数 $\Gamma_X(k,s)$。

由定义(1.2.14)式,可以写出

$$\begin{aligned}X(1)&=-aX(0)+\xi(1)\\X(2)&=(-a)^2X(0)+(-a)\xi(1)+\xi(2)\\&\vdots\\X(k)&=(-a)^kX(0)+\sum_{i=1}^{k}(-a)^{k-i}\xi(i)\end{aligned}$$

于是,均值函数 $m_X(k)$ 为

$$m_X(k)=EX(k)=(-a)^kEX(0)=(-a)^kX(0)$$

自相关函数 $\Gamma_X(k,s)$ 为