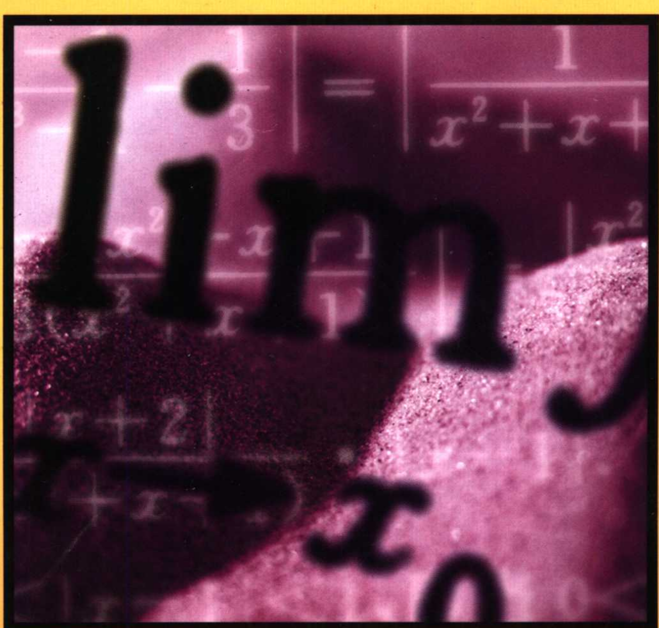
南开大学公共数学系列教材

高等数学辅导

生化类

（上册）

赖学坚／编著



南開大學出版社

南开大学公共数学系列教材

高等数学辅导

生化类

（上册）

赖学坚　编著

南开大学出版社
天津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导：生化类．上册 / 赖学坚编著．—天津：南开大学出版社，2007.6

（南开大学公共数学系列教材）

ISBN 978-7-310-02712-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.赖…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 066317 号

版权所有　侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339　23500755

营销部传真：(022)23508542　邮购部电话：(022)23502200

*

河北省迁安万隆印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷

787×960 毫米　16 开本　14.25 印张　2 插页　246 千字

定价：26.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

总　序

高等数学是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课。由于各个学科门类的情况差异较大,该课程又形成了包含多个层次多个类别的体系结构。层次不同,类别不同,教学目标和教学要求也就有所不同,课程内容的深度与宽度也就有所不同,自然所使用的教材也应有所不同。

教材建设是课程建设的一个重要方面,属于基础性建设。时代在前进,教材也应适时更新而不能一劳永逸。因此,教材建设是一项持续的不可能有"句号"的工作。20 世纪 80 年代以来,南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材。其中,如《文科数学基础》一书作为"十五"国家级规划教材由高等教育出版社于 2003 年出版,经过几年的使用取得较好收效。这些教材为南开的数学教学作出了重要贡献,也为公共数学教材建设奠定了基础,积累了经验。

21 世纪是一个崭新的世纪。随着新世纪的到来,人们似乎对数学也有了一个崭新的认识:数学不仅是工具,更是一种素养,一种能力,一种文化。已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑。他尤其对大学生们寄予厚望。他不仅关心着数学专业的学生,也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子。2004 年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题字,并与获奖学生合影留念。这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策。另一方面,近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现。这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求。而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进。现在呈现在读者面前的便是南开大学公共数学系列教材。

本套教材的规划和出版得到了南开大学教务处、南开大学数学科学学院和南开大学出版社的高度重视、悉心指导和大力支持。此项工作是南开大学新世纪教学改革项目"公共数学课程建设改革与实践"的重要内容之

一。编委会的各位老师为组织、规划和编写本套教材付出了不少心血。此外,还有很多热心的老师和同学给我们提出了很多很好的建议。对来自方方面面的关心、支持和帮助,我们在这里一并表示衷心感谢。

由于我们的水平有限,缺点和不足在所难免,诚望读者批评指正。

南开大学公共数学系列教材编委会

2006 年 6 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前 言

在南开大学数学学院领导的组织和指导下，大力进行21世纪数学系列教材建设，使教学质量不断提高，取得了可喜的成绩，现在按《高等数学(生化类)教学大纲》，为配合教材《高等数学(生化类)》，编写出这本《高等数学辅导(生化类)》作为配套教学用书，以供学生学习之用。

每章含四部分：第一部分为“基本要求”；第二部分为“内容提要”，对该章的主要概念和理论作简单的叙述；第三部分是该章部分习题的解析；第四部分是典型例如解析，核心是第三、第四部分。第三部分是为了帮助学生搞清基本概念、基本理论和掌握基本运算法则及其技巧。第四部分是典型例题解析，在这里进一步围绕基本概念、基本理论和基本技巧，结合综合例题解析，把各种解题技巧、方法、思想尽量详细地介绍给读者。在例题解析中，强化解题前的分析和解题后的总结，以利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

本书具有如下特点：

1.注重基本概念、基本理论、基本思想及基本计算的讲解，通过大量的例题解析、讨论，加强启发学生对基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握；强调解题的思想和方法，注重引导读者灵活运用所学知识去分析问题和解决问题；通过提供一题多解，启发读者学会从不同角度去分析问题和解决问题。

2.本书所选的例题具有一定的广度和深度，具有一定的覆盖面和综合性，针对教材中的重点、难点及读者易犯的错误作了详细的解析。

3.注重材料中前后知识综合运用的例题解析，以利于读者的复习和对知识点的融会贯通，提高读者的综合能力。

本书可作为生物、化学，医学、农学各专业大学生学习高等数学的辅导用书，也可以作考研复习和教师教学参考之用。

本书是高等数学教学部任课老师教改实践和教学研究的共同成果之一，姜作廉、张效成教授精心组织、指导及策划此书的编写，参加研讨、编写

及审阅工作的有姜作廉、胡龙桥、陈怀鹏、陈学民、由同顺等教授。

本书的编写得到了南开大学"新世纪教学改革"项目"公共数学课程建设改革与实践"的资助,得到了南开大学教务处和南开大学数学学院的大力支持和帮助;薛锋老师为周密细致的组织协调工作花费了极大的精力,为此书成书起了重要作用;韩志欣、杜瑞杰等同志为本书初稿进行校正并用CTex进行录入与编辑工作,在此向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免有错误、疏漏和不妥之处,诚恳地希望得到同行及读者的批评指正。

编　者

2006年11月于南开大学

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函　数

1.1　基本要求

1. 理解函数、反函数、复合函数、初等函数的概念.
2. 了解函数的四种特性,掌握基本初等函数及其图形.
3. 会建立简单的实际问题中的函数关系式.

1.2　内容提要

1. 函数

设 X,Y 是两个非空集合,如果存在一个对应规则 f,使得对 X 中每一个 x,按规则 f 在 Y 中存在唯一 y 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的一个函数,记作 $y=f(x)$;X 称为定义域,x 为自变量,Y 称为值域,y 称为因变量.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$在 X 上是一一对应的,即对 $y=f(x)$的 y,有唯一确定的 $x\in X$ 与之对应,由这样的关系所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$,$y\in Y$,就称为 $y=f(x)$的反函数.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 U 包含 $u=\varphi(x)$ $(x\in X)$的值域,则在 $\varphi(x)$的定义域为 X 上所确定的函数 $y=f[\varphi(x)]$称为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,称 u 为中间变量.

4. 基本初等函数

基本初等函数由常数函数 $y=C$,幂函数 $y=x^u$,指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$,对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$,三角函数及反三角函数组成.

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算后所得到的,并且能用一个解析式子表示的函数,叫做初等函数.

6.奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X,如果 $x\in X$,则 $-x\in X$,且 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

7.单调性

设函数 $f(x)$ 定义在 X 上,如果对 $\forall x_1,x_2\in X$,且 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)[f(x_1)\geqslant f(x_2)]$,则称 $f(x)$ 在 X 上是单调递增(减)的函数或单增(单减)的函数,或单调上升(下降)的函数.

8.周期性

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,若存在 $T>0$,对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,其中最小的 $T>0$,称为 $f(x)$ 的最小周期,简称为周期.

9.有界性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义,如果存在 $M>0$,对于 $\forall x\in X$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数;否则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

1.3 基本例题解析

例 1 求 $y=\sqrt{1-2x}+\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$ 的定义域.

分析 求复杂函数的定义域,就是求解若干个简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

解 要使 $f(x)$ 有意义,x 应满足

$$\begin{cases}1-2x\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{3x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -2\leqslant 3x-1\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

故所求的定义域为 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

例 2 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x(1+\sqrt{x^2+1})\ (x>0)$,求 $f(x)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2\left[\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\right]\ (x>0)$.令 $u=\dfrac{1}{x}$,则

$$f(u)=\frac{1}{u^2}(u+\sqrt{1+u^2})\ (u>0).$$

于是，

$$f(x)=\frac{1}{x^2}(x+\sqrt{1+x^2})\ (x>0).$$

例 3　设 $y=\begin{cases}1+x^2, & \text{当 } x>0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -1-x^2, & \text{当 } x<0,\end{cases}$ 求 y 的反函数.

分析　求反函数的步骤是：从 $y=f(x)$ 中解出 x，然后将所得表达式中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数．对分段函数，应分段来求反函数.

解　当 $x>0$ 时，$y=1+x^2$，故 $x=\sqrt{y-1}$，$y\in(1,+\infty)$；当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x<0$ 时，$y=-1-x^2$，故 $x=-\sqrt{-1-y}$，$y\in(-\infty,-1)$．故所求的反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & \text{当 } x>1,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ -\sqrt{-1-x}, & \text{当 } x<-1.\end{cases}$$

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<-1,\\ 1+2x, & x\geqslant -1.\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$，$f[f(x)]$.

解　当 $x<-1$ 时，$y=-x^2$，$x=-\sqrt{-y}$，$y\in(-\infty,-1)$；当 $x\geqslant -1$ 时，$y=1+2x$，$x=\frac{1}{2}(y-1)$，$y\in[-1,+\infty)$．于是

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<-1,\\ \frac{1}{2}(x-1), & x\geqslant -1.\end{cases}$$

$$f[f(x)]=\begin{cases}-(-x^2)^2, & x<-1,\\ 1+2(2x+1), & x\geqslant -1,\end{cases}\quad \text{即}$$

$$f[f(x)]=\begin{cases}-x^4, & x<-1,\\ 4x+3, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

例 5　证明函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 (a,b) 内既有上界，又有下界.

证明　必要性：如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界，则存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$ 在 (a,b) 内成立，即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$ 在 (a,b) 内成立．M 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的上界，$-M$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的下界.

充分性:如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内既有上界 A 又有下界 B,即 $B\leqslant f(x)\leqslant A$ 在 (a,b) 内成立,则取 $M=\max\{|A|,|B|\}$,则 $|f(x)|\leqslant M$ 在 (a,b) 内成立,即 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

例 6 设 $\varphi(x)=x^2,\psi(x)=2^x$,求 $\varphi[\psi(x)],\psi[\varphi(x)],\varphi[\varphi(x)],\psi[\psi(x)]$.

解

$$\varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x},\text{即 }\varphi[\psi(x)]=4^x;$$
$$\psi[\varphi(x)]=2^{x^2};$$
$$\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2=x^4;$$
$$\psi[\psi(x)]=2^{2^x}.$$

例 7 在半径为 R 的球内作内接圆柱体,求此圆柱体的体积 V 与它的高 h 之间的函数关系.

解 剖面图如图 1.1 所示,

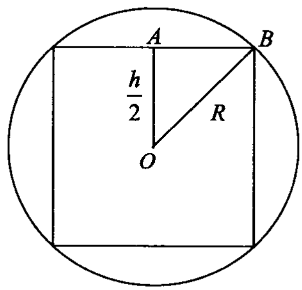


图 1.1

内接圆柱体的底面半径 $r=\sqrt{R^2-\dfrac{h^2}{4}}$,所以内接圆柱体体积为

$$V=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h,\ 0<h<2R.$$

1.4 典型例题解析

例 1 判断下列各题中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数.

(1) $f(x)=\lg[x^2],g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=|x|, g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

分析　当且仅当给定的两个函数,其定义域和对应的法则完全相同时,才表示同一个函数,否则就是两个不同的函数.

解　(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,故 $f(x)\neq g(x)$.

(2) $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,而且对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,均有 $f(x)=g(x)$,故 $f(x)=g(x)$.

例 2　证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界,而在 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 上有界.

证明　因为对于任意大的给定的正数 $M>1$ 可以找到正整数 k,使 $k\pi>M$,而

$$\left|f\left(\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right|=\left|\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|>k\pi>M,$$

这就是说 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 无界,而对于 $\forall x\in[a,b]$,都有 $|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{a}$,即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

例 3　下列函数中哪些是初等函数?哪些不是初等函数?

(1) $y=\sqrt{x}+\ln\left[\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)\right]$;

(2) $y=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0; \end{cases}$

(3) $y=|x|$.

解　由基本初等函数与常数经过有限次四则运算及有限次的复合所得到,并且能用一个解析式子表示的函数称为初等函数.根据这个定义,$y=\sqrt{x}+\ln\left[\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)\right]$ 及 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 均为初等函数,而(2)中所表示的函数不能用一个解析式表达出来,所以它不是初等函数.

例 4　设 $f(x)=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$, $\varphi(x)=a^x$,求 $\varphi[f(x)]$ 及 $f[\varphi(x)]$.

解
$$\varphi[f(x)]=a^{\log_a x}=x;$$

$$f[\varphi(x)] = \log_a a^x = x.$$

例5 设函数 $f(x) = 2^{-x}\cos x, 0 \leqslant x < +\infty$. 试问 $f(x)$ 是否为偶函数、单调函数、有界函数、奇函数?

解 因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的定义域上与原点不对称,所以它不可能是奇、偶函数. 由于 $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f(2\pi) = e^{-2\pi} > 0$, 可知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的某些子区间内单增,在某些子区间内单减,因此它不是单调函数,由于 $|f(x)| = |2^{-x}\cos x| \leqslant 2^{-x} \leqslant 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立,所以它是有界函数.

在微积分中经常要判断所涉及的函数是否具有奇偶性、周期性、单调性、有界性,这些问题虽然简单,但很有用,很重要,读者必须引起高度重视.

例6 将 $f(x) = \sin^3 x^2$ 分解成基本初等函数的复合.

解 $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = x^2$.

例7 将 $y = |x|$ 分解成基本初等函数的复合.

解 $y = |x| = \sqrt{x^2}$, 它由 $y = \sqrt{u}$, $u = x^2$ 复合而得(故 $y = |x|$ 是初等函数).

例8 试把 $y = \sin 2(x^2 - x)$ 表示成简单初等函数的复合.

解 $y = \sin u$, $u = 2v$, $v = x^2 - x$.

例9 一个由解析式给出的复合函数,当引入中间变量来分解为若干简单函数而把该函数当作这些函数复合而成的函数时,引入中间变量的方法不是唯一的,试举例说明.

解 例如函数 $y = (\sin x)^{\frac{5}{3}}$ 可看作由函数 $y = u^5, u = v^{\frac{1}{3}}, v = \sin x$ 复合而成;还可以看作由函数 $y = u^{\frac{1}{3}}, u = v^5, v = \sin x$ 复合而成;还可以看作由函数 $y = u^{\frac{5}{3}}, u = \sin x$ 复合而成.

例10 求双曲正弦函数 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数.

解 由 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 得

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

解得 $e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$, 故 $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$. 于是 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com