非线性算子的理论及其在方程上的应用

Theorys of some nonlinear operators and applications to equations

武跃祥　著

中国科学技术出版社

非线性算子的理论及其在方程上的应用

武跃祥　著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

非线性算子的理论及其在方程上的应用/武跃祥著.
—北京:中国科学技术出版社,2007.6

ISBN 978-7-5046-4713-9

Ⅰ.非... Ⅱ.武... Ⅲ.非线性算子理论 Ⅳ.0177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 085487 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081
科学普及出版社发行部发行
北京长宁印刷有限公司印制

*

开本:850 毫米×1168 毫米 印张:7.5 字数:190 千字
2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷
定价:20.00 元
ISBN 978-7-5046-4713-9/O·132

摘　要

本书所做的工作主要有两个方面：一方面讨论了几类非线性算子方程，包括Banach空间中的非线性单调算子和非线性混合单调算子方程及有序的局部凸拓扑线性空间或有序Banach空间中集值（或多值）映象方程．所使用的方法主要为半序方法及单调迭代技巧等．另一方面是利用非线性算子理论讨论了微分方程解的存在性问题．

全书共分为四章．

在第1章中，对单调算子进行了初步的讨论，简明地介绍了作者关于单调算子满射性及单调算子方程的可解性所做的一些工作．

第2章给出了几类混合单调算子的不动点定理．

在§2.1和§2.2中，给出了$t-\varphi(t)$型凹凸及$t-\phi(t,u,v)$型凹凸的混合单调算子具有唯一不动点的新的存在性定理，本质性地改进了最近许多相关文献原有的条件和结论．在u_0－凹增算子的情形，与这些存在性定理相类似的结论实际上也是成立的．作为所得理论结果的一个应用，讨论了一类非线性积分方程解的存在性．

在§2.3中，引入了一类ω－凹凸型混合单调算子，给出了它存在唯一不动点的充分必要条件．在§2.4中，讨论了混合单调算子和的不动点的存在性．

在§2.5中，我们利用§2.1和§2.2所得的理论结果并结合算子半群的性质，讨论了Banach空间非线性发展方程解的存在性．所得结果改进了相关文献中的工作．

在§2.6中，讨论了一类凹凸混合单调算子具有唯一不动点的新的存在性定理，并给出了一些应用.

在第3章中，讨论了集值算子的几个不动点定理.

在§3.1中，我们首先在局部凸拓扑线性空间中引入序，给出了集值(多值)凝聚映射的几个不动点定理，推广了相关文献在Banach空间中所做的一些工作. 然后利用所得结果，讨论了优化理论中的一个带约束条件的极小化问题：

$$x\in G(x),w(x,x)=\min_{y\in G(x)}w(x,y),$$

其中：w 为二元连续实函数；G 为集值映象. 给出了它存在正解的充分条件.

在§3.2中，讨论了Banach空间中的一类集值算子，给出了它存在解(或不动点)的一种充分条件.

在§3.3中，运用集值映象不动点定理和Schauder不动点定理，讨论了微分方程

$$x'(t)+g(t,x(t))=0$$

解的存在性及解的性质. 这种利用集值算子来研究微分方程的方法在可查文献中尚不多见.

在第4章中，利用Krasnoseliskii锥映象不动点定理，不动点指数的性质及锥上的不动点定理等讨论了泛函微分方程周期正解的存在性、非存在性与多解性及两类边值问题解的存在性与多解性.

在§4.1中，利用不动点指数理论等讨论了如下含参数的一阶泛函微分方程周期解问题：

$$y'(t)=-a(t)f(y(t))y(t)+\lambda g(t,y(t-\tau(t)))$$

其中：$\lambda>0$ 为参数.

在§4.2中，利用锥拉伸锥压缩定理等讨论了如下带参数多变量的二阶泛函微分方程

$$u''(t)+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t-\tau_0(t)),u(t-\tau_1(t)),\cdots,u(t-\tau_n(t)))$$

周期正解的存在性非存在性与多解，其中 $\lambda>0$ 为参数.

§4.1、§4.2 所得结果在可查文献中均不多见.

在§4.3 中，我们利用 Krasnoselskii 锥映象不动点定理，不动点指数的性质等讨论了如下一类混合边值问题解的存在性与多解性，

$$\begin{cases}(\varphi(u'))'+f(t,u)=0, & 0<t<1,\\ \alpha\varphi(u(0))-\beta\varphi(u'(0))=0, & \gamma\varphi(u(1))+\delta\varphi(u'(1))=0.\end{cases}$$

其中：$\alpha>0,\beta\geqslant0,\gamma>0,\delta\geqslant0$. $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$.

$\varphi:R\to R$ 是具有逆的同态映射. 在§4.4 中，用上下解方法及度理论，研究了一类非线性二阶微分方程带有三点边值条件问题的解的存在性和多解性.

所得结果改进并推广了相关文献中的一些工作.

在§4.5 中，讨论了线性增长条件下三点边值问题正解的存在性. §4.6 给出了如下一类带参数的二阶中立型泛函微分方程

$$u''(t)-cu''(t-\delta)+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t-\tau(t)))$$

周期正解的存在性非存在性与多解. 其中：$\lambda>0$ 为参数；c 和 δ 为常数，所得结果在可查文献中尚不多见. §4.7 利用重合度理论讨论了多变时滞 n 阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性条件，推广了相关文献中的一些工作.

Abstract

There are mainly two works in this book. On the one hand, we discuss several classes of nonlinear operator equations, including nonlinear monotone operator and nonlinear mixed monotone operator equations in Bnanch space and the set-valued mapping equation in an ordered locally convex topological linear space. The methods employed are mainly partial ordering method and iterative techniques and so on. On the other hand, we will use more precise theory of nonlinear operator to discuss the existence problems of solutions for differential equations.

This paper includes four chapters.

In Chapter 1, we provide a research summary of nonlinear monotone operators. At the some time, we introduce briefly the main works in our papers.

In Chapter 2, we present some fixed point theorems for several classes of nonlinear mixed monotone operators.

In § 2.1 and § 2.2, we obtain new fixed points theorems of the existence and uniqueness for $t-\varphi(t)$ model concace convex or $t-\phi(t, u, v)$ model concave convex mixed monotone operators. The resulting conclusion essentially improves many related conditions and results to date. In fact, similar results that associted to these theorems are also valid to u_0 concace increasing operators. Moreover, as an application of our results, we prove the existence and uniqueness of positive solution of a class of nonlinear

integral equation.

In § 2. 3, we introduced a class of ω-concace convex mixed monotone operator, and give both necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of fixed point of this kind of mixed monotone operator; In § 2. 4, we discuss the existence of fixed point about the sum of mixed monotone operator.

In § 2. 5, by using the obtained results in § 2. 1 and § 2. 2, we discuss the existence of solutions of nonlinear evolution equations in Banach space, improve and generalize some related results in references.

In § 2. 6, we discuss new fixed points theorems of the existence and uniqueness for a class of concace convex mixed monotone operators, and give some applications.

In Chapter 3, we present some fixed point theorems for set-valued operators.

In § 3. 1, firstly, we discuss several fixed point theorems about set-valued mapping in an ordered locally convex topological linear space, generalize some related results in reference. Secondly, By using the obtained results, we discuss the minimum problem with constraint condition in superior theorey

$$x\in G(x),w(x,x)=\min_{y\in G(x)} w(x,y),$$

where w is continuous function, and G is set-valued mapping. We give its sufficient conditione for existence of solution.

In § 3. 2, we discuss a kind of set-valued operators in Banach space and give its sufficient conditione for existence of solution.

In § 3. 3, by using fixed point theorems of set-valued mappings and Schauder, we discuss the differential equations $x'(t)+g(t,x(t))=0$. The existence and properties of solutions of this equation is obtained. To the knowledge of the author, this discussion method are very few in reference.

In Chapter 4, we study the existence, nonexistence, multiplicity of periodic positive solutions for functional differential equation and the existence multiplicity of positive solutions for two kind of boundary value problem by employing the fixed-point theorem of Krasnoselskii's cone, the fixed point index in cones and cone expansion or compression type fixed point theorem, etc.

In § 4.1, we will use more precise theory of the fixed point index in cones to discuss the existence of positive periodic solutions for the functional differential equations with parameter

$$y'(t) = -a(t)f(y(t))y(t) + \lambda g(t, y(t-\tau(t))),$$

where $\lambda > 0$ is a parameter.

In § 4.2, we study the existence, multiplicity and nonexistence of positive ω-periodic solutions for a kind of second order functional differential equation with parameter

$$u''(t) + a(t)u(t) = \lambda f(t, u(t-\tau_0(t)), u(t-\tau_1(t)), \cdots, u(t-\tau_n(t)))$$

by employing the fixed point theorem of cone expansion or compression, where $\lambda > 0$ is a parameter.

As far as I know, in § 4.1, § 4.2, our conclusions are new and original.

In § 4.3, by using the fixed point theorem of cone expansion and compression and fixed point index theory, we establish the existence and multiplicity of positive solutions for a class of mixed boundary value problems as follows:

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' + f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ \alpha\varphi(u(0)) - \beta\varphi(u'(0)) = 0, \quad \gamma\varphi(u(1)) + \delta\varphi(u'(1)) = 0. \end{cases}$$

In § 4. 4, by using the upper and lower solutions methods and degree theory, we establish the existence and multiplicity of positive solutions for a class of second-order differential equation with three points boundary value problems.

The results extend and improve the corresponding conclusions.

In § 4. 5, we study the existence of solutions of three-point boundary value problem at linear raise condition; In § 4. 6, we establish the existence nonexistence and multiplicity of positive ω periodic solutions for a kind of second order neutral functional differential equations with paramenter

$$u''(t)-cu''(t-\delta)+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t-\tau(t))),$$

where $\lambda>0$ is a parameter, c and δ are constants, it is reported that our conclusions are original; In § 4. 7, we give sufficient conditions for the existence of periodic solutions of high order neutral functional differential equation with multiple variable lags, the results extend and improve the corresponding conclusions.

目　录

Contents

第 1 章

单调算子

非线性泛函分析，作为非线性科学的重要基础理论和基本工具，已经越来越受到各国学者的广泛关注.非线性算子是非线性泛函分析的主要研究对象之一.从 20 世纪六七十年代起至今，对非线性算子理论的研究几乎一直是国内外科学研究的一个热点.其基本方法（拓扑度方法、半序方法、变分方法等）及成果已经广泛渗透到数理、生化、医药、军事、经济管理及核工业技术等诸多学科领域并影响着它们的发展.

在非线性算子的研究中，由于应用背景的广泛性，人们对于 u_0 —凹算子、u_0 —凸算子、α 凹算子、α 凸算子、序凹算子、序凸算子、单调算子、混合单调算子、多值算子等的研究给予了极大的关注.用各种方法（如半序方法、单调迭代方法、Hilbert 投影距离方法、拓扑度理论、上下解方法、变分方法等）进行了广泛深入的研究，得到了极为丰富的成果.但是由于这些算子自身具有的复杂性，使得对它们的研究各有不同程度的困难，因此研究成果并不都

很令人满意.

事实表明,有一些重要的非线性算子理论问题,如 α 凸算子、$\alpha(>1)$的齐次算子的不动点存在唯一性问题还没有得到解决;u_0—凹凸算子及混合单调算子不动点存在性条件还需要作进一步深入细致的讨论;多值映射的研究结果也不很丰富等.

因此,本书的工作主要是:研究非线性单调算子的满射性条件及非线性混合单调算子的不动点存在唯一性条件;给出它们的有关定理及应用;研究集值(或多值)算子的不动点定理;讨论非线性算子理论在微分方程上的应用,等等.

第 1 章,对单调算子进行了初步的讨论,简明地介绍了几个重要的满射性定理.

§1.0 预备知识

设 X 是实 Banach 空间,X^* 表示其共轭空间.X 上的正规对偶映射 $J:X\to 2^{X^*}$ 定义为

$$J(x)=\{f\in X^*:(f,x)=\|x\|^2,\|f\|\leqslant\|x\|\},x\in X.$$

集合 $M\subset X\times X^*$ 称为单调子集,是指对任意$[x,f]$,$[y,g]\in M$,都有$(f-g,x-y)\geqslant 0$. 若 M 单调,且不为 $X\times X^*$ 中任何单调集合的真子集,则称 M 是 $X\times X^*$ 中的极大单调集合.

算子 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为单调(或极大单调)的,如果其图像$\{[x,f]:x\in D(T),f\in Tx\}$为 $X\times X^*$ 中的单调(或极大单调)集合;T 称为强单调的,如果存在正常数 m,使得当 $x,y\in D(T)$时,有$(Tx-Ty,x-y)\geqslant m\|x-y\|^2$.

算子 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 极大单调等价于下列两条的任一条: