



优等生数学

余红兵 编著

如果说“奥数”是提供给4%的优等生
那么本书是提供给20%的优等生
如果你已经是优等生,不妨一读
如果你想成为优等生,不能不读

 华东师范大学出版社

九年级

优



专家荐书

数学成绩不够理想而又喜欢数学的孩子，希望找到提高的途径；数学成绩优良的孩子，又会感到一般的课程内容吃不饱，希望学得更深入一些。《优等生数学》这套书，可以帮助这部分孩子实现他们的心愿。（张景中）

专家介绍

张景中

著名数学家 中国科学院院士
中国教育数学学会理事长 中国科普作家协会理事长

作者介绍

余红兵

理学博士，苏州大学数学科学学院教授；国家队教练组成员，指导多名学生获得数学竞赛金牌；多次参与竞赛命题工作；解题方面的代表作有《构造法解题》。



九年级

ISBN 978-7-5617-5388-0



9 787561 753880 >

定价：18.00元

www.ecnupress.com.cn

余红兵 编著

优等生数学

王元 

九年级

- ★ 经典例题
- ★ 解题策略
- ★ 画龙点睛
- ★ 举一反三
- ★ 融会贯通

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

优等生数学. 九年级/余红兵编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2007. 6

ISBN 978-7-5617-5388-0

I. 优… II. 余… III. 数学课—初中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 068940 号



优等生数学 (九年级)

编 著 余红兵
封面题辞 王 元
策划编辑 倪 明
组稿编辑 倪 明 徐 金
文字编辑 石 岩
封面设计 卢晓红
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电 话 021-62450163 转各部 行政传真 021-62572105
网 址 www.ecnupress.com.cn www.hdsdbook.com.cn
市 场 部 传真 021-62860410 021-62602316
邮购零售 电话 021-62869887 021-54340188

印 刷 者 常熟市文化印刷有限公司
开 本 787×1092 16 开
插 页 2
印 张 14.75
字 数 236 千字
版 次 2007 年 6 月第一版
印 次 2007 年 6 月第一次
印 数 16 000
书 号 ISBN 978-7-5617-5388-0/G·3164
定 价 18.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

使用指南

如果说“奥数”是提供给 4% 的优等生

那么本书是提供给 20% 的优等生

如果你已经是优等生，不妨读一读

如果你想成为优等生，不能不读

如果你是一名教师，你可以根据学生的学习情况、教学的进度以及课时安排等来安排本书相关内容的使用。

如果你是一名学生，或是一名学生家长，我们有如下建议：

学到哪，看到那 虽然现在教材的版本很多，但除了知识点安排的先后顺序之外，其内含的知识是相同的，所以你可以根据所学到的知识内容，挑选相关章节进行学习。

看一看，练一练 对于每一讲中的五个版块，你可以根据自己的时间合理安排。如果时间充裕，你可以看完“经典例题”，再完成“举一反三”和“融会贯通”；你也可以先做习题，遇到困难时再看例题，理解解题的思路与方法。一切都由你自己决定。

先看易，后看难 由于知识点之间肯定会有难易的差别，所以书中难免出现前面的内容比后面的内容难的情况，你可以根据自己的学习程度，按先易后难的顺序有选择地进行阅读。

有兴趣，最重要 兴趣是促进学习的最佳动力，兴趣可以使得学习变得

事半功倍。只要你有兴趣，只要你学有余力，你可以挑有兴趣的先看，那收获一定更大。

寒暑假，好时机 也许你平时的学习很忙，除了完成学校的功课以外无暇顾及其他参考书，这本书在寒暑假时使用是一个极好的选择。因为在平时学过的内容再学是一个提高的过程，这本书是同步基础上的提高，恰好满足你的要求。

本书的作者均是数学解题高手，只要你能够有效、合理地使用本套《优生数学》，那么你一定能够学到很多解题的高招，可以又好又快地提高你的数学成绩。

祝贺你成为数学优生！

序

如今，家长对子女的教育非常关注，希望他们在学习上成为优胜者，成为优等生。

所谓的优等生，既有绝对性，又有相对性。儿童们在共同学习过程中，自然有差异，学习成绩有高低之分。但就中小学数学而言，只要有浓厚的兴趣、认真的学习态度和科学的学习方法，多数孩子能取得优良的数学成绩。

数学成绩不够理想而又喜欢数学的孩子，希望找到提高的途径；数学成绩优良的孩子，又会感到一般的课程内容吃不饱，希望学得更深入一些。《优等生数学》这套书，可以帮助这部分孩子实现他们的心愿。

由朱华伟、熊斌、余红兵等编写的这套书，以中小学数学教学内容为依托，立足于学生基础知识进行拓展；以数学新课标为准绳，着眼于培养学生灵活运用知识的能力；以思维训练为核心，着重于培养学生的自主探究能力。

该书设计有很好的栏目：

“经典例题” 新颖独特，覆盖面广，趣味性强，具有代表性，有启迪作用；

“解题策略” 深入浅出，通俗易懂，情景生动，引人入胜，如循循善诱的老师上课；

“画龙点睛” 清晰的思路与诗情画意的标题融为一体，言简意赅地揭示解题的奥秘；

“举一反三” 提供了有层次性、发展性的题目，让学生在探索中有一

种"出乎预料之外,在乎情理之中"的感觉;

“融会贯通” 摘选了近几年国内外有关考试(包括数学竞赛)中的一些优秀试题和作者自编的一些题目,这些题目有一定的综合性和难度,可以帮助学生开阔视野,拓展思维。

这套书的例题和习题,难度不算大,题量不算多,如能认真对待每一道题,把每一道题目弄懂弄通,数学素质会有明显的提高.如果课余时间不多,在家长指导下品尝一些,也能开眼界,扩思路,提高对数学的兴趣。

愿更多的学生喜欢数学,取得优良的成绩。

张景中

2007年5月29日

张景中:著名数学家,中国科学院院士,中国科普作家协会理事长,中国教育数学学会理事长。



录

第二十一章 二次根式 /1

- 1 平方根的概念 /1
- 2 二次根式的概念 /3
- 3 分母有理化 /5
- 4 二次根式的化简与求值 /8

第二十二章 一元二次方程 /10

- 5 一元二次方程的概念 /10
- 6 一元二次方程的解 /12
- 7 一元二次方程的解法 /14
- 8 可化为一元二次方程的方程 /17
- 9 一元二次方程的判别式 /19
- 10 根与系数的关系(一) /21
- 11 根与系数的关系(二) /24
- 12 一元二次方程的应用 /27

第二十三章 旋转 /29

- 13 旋转 /29
- 14 旋转帮助解题 /32
- 15 中心对称 /34
- 16 中心对称帮助解题 /37
- 17 关于原点对称的点的坐标 /39

第二十四章 圆 /41

- 18 圆心角、圆弧和弦 /41
- 19 垂径定理 /44
- 20 圆周角 /46

- 21 直径所对的圆周角 /48
- 22 圆内接四边形 /50
- 23 点与圆的位置关系 /52
- 24 直线与圆的位置关系 /54
- 25 切线的判定 /56
- 26 切线的性质 /59
- 27 三角形的内切圆 /62
- 28 弦切角 /65
- 29 两圆的位置关系 /68
- 30 圆中的计算问题 /71
- 31 圆锥、圆柱的侧面积和全面积 /74
- 第二十五章 概率初步 /77**
- 32 概率的计算 /77
- 33 概率的简单应用 /79
- 第二十六章 二次函数 /82**
- 34 二次函数的概念 /82
- 35 二次函数的图像(一) /85
- 36 二次函数的图像(二) /88
- 37 二次函数图像的平移 /91
- 38 二次函数的最大值与最小值 /94
- 39 二次函数与一元二次方程 /97
- 40 二次函数解析式的确定(一) /100
- 41 二次函数解析式的确定(二) /103
- 42 二次函数与应用问题(一) /105
- 43 二次函数与应用问题(二) /108
- 第二十七章 相似 /111**
- 44 比例及其性质 /111
- 45 平行线分线段成比例 /114
- 46 三角形的相似与平行线 /117
- 47 三角形相似的判定(一) /120
- 48 三角形相似的判定(二) /123

- 49 直角三角形的相似 /126
- 50 相似三角形的性质 /129
- 51 位似 /132
- 52 与圆有关的比例线段 /134

第二十八章 锐角三角函数 /137

- 53 锐角三角函数 /137
- 54 求三角函数值 /139
- 55 三角函数之间的关系 /142
- 56 三角函数值的变化规律 /145
- 57 解直角三角形 /147
- 58 解斜三角形 /150
- 59 解直角三角形的应用 /153

第二十九章 视图和投影 /156

- 60 三视图 /156
- 61 展开图 /159

第三十章 综合题 /162

- 62 运动、面积和函数 /162
- 63 三角形、三角函数和二次方程 /165
- 64 直线、双曲线和三角形 /168
- 65 面积、相似和函数 /170
- 66 对称、抛物线和平行四边形 /173
- 67 二次函数、二次方程和三角形 /176
- 68 圆、切线和三角形 /179
- 69 直线、圆和抛物线 /181
- 70 运动、圆和直线 /184
- 71 抛物线、直线和比例线段 /187
- 72 三角形、动点和轨迹 /189

参考答案 /192

1

平方根的概念

如果一个数的平方等于数 a , 那么这个数就称为 a 的一个平方根. 很明显, 这里的 a 必须是非负数. 若 $a > 0$, 则 a 有两个平方根, 记作 $\pm\sqrt{a}$, 其中正的平方根 $\sqrt{a}$, 称为 a 的算术平方根. 数 0 只有一个平方根, 就是 0.



经典例题

若 $3a-1$ 与 $2a-4$ 是同一个数的平方根, 求这个数.



解题策略

记所求的数为 x . 有两种情况:

若 $3a-1 = 2a-4$, 则 $a = -3$, 从而 $3a-1 = -10$. 故由平方根的定义知,

$$x = (-10)^2 = 100.$$

若 $3a-1$ 与 $2a-4$ 不相等, 即这两个数是 x 的两个不同的平方根, 则 $3a-1$ 与 $2a-4$ 为互相反数, 故有

$$(3a-1) + (2a-4) = 0,$$

解得 $a = 1$, 所以 $3a-1 = 2$, 故 $x = 2^2 = 4$.

因此所求的数是 4 或 100.



画龙点睛

1. 若一个数有平方根, 则要么平方根是零, 要么有两个平方根, 且互为相反数.
2. 本题中不要忽略了 $3a-1$ 与 $2a-4$ 相等这一情况.



举一反三

1. 对于任何数 a , 下面的数中必定有平方根的是().

(A) $a+1$

(B) a^2+5a

(C) a^2+6a+1

(D) a^2+4a+6

2. 若 $\sqrt{2}-1$ 是 $a-2\sqrt{2}$ 的一个平方根, 则 $a=$ _____.

3. 已知 $2x-1$ 的平方根为 ± 3 , $3x+y-1$ 的平方根为 ± 4 , 求 $x+2y$ 的算术平方根.



融会贯通

4. 已知 $\sqrt{a-2} + \sqrt{b^2-9} = 0$, 求 $a+b$ 的值.



解决涉及二次根式的问题,必须紧紧抓住二次根式的概念和基本性质.



经典例题

若 a 满足 $(\sqrt{a-1})^2 + \sqrt{(a-1)^2} = 4$, 求 a .



解题策略

$\sqrt{a-1}$ 是 $a-1$ 的算术平方根,故必有 $a-1 \geq 0$, 即 $a \geq 1$. 由定义知

$$(\sqrt{a-1})^2 = a-1 \quad (a \geq 1).$$

注意 $(a-1)^2 \geq 0$, $\sqrt{(a-1)^2}$ 是 $(a-1)^2$ 的算术平方根,它是非负的,故 $\sqrt{(a-1)^2} = |a-1| = a-1$ (因上面已得到了 $a \geq 1$).

因此问题中的等式即为

$$(a-1) + (a-1) = 4 \quad (a \geq 1),$$

解得 $a = 3$. 因 $3 > 1$, 故 $a = 3$ 是所求的解.



画龙点睛

所涉及的二次根式必须有意义,是很多此类问题中的“隐含条件”,切莫忽视.



举一反三

1. 要使得 $\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}$ 有意义,则 x 的取值范围是_____.

2. 设 x, y 满足 $y = \frac{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-4} + 1}{x+2}$, 求 $\sqrt{x+y}$.

3. 设 a 和 x 满足

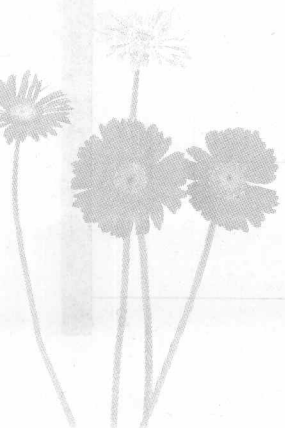
$$\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 3(\sqrt{1-x})^2 - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = a,$$

试确定 a 的取值范围.



融会贯通

4. 设 a, b, c 满足 $a + b + c + 3 = 2(\sqrt{a} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c+1})$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值.



3

分母有理化

分母有理化,是化简根式及根式运算中最为基本的一步.



经典例题

将 $\frac{a+1}{1-a\sqrt{-\frac{1}{a}}}$ 分母有理化.



解题策略

问题中的二次根式隐含着 $-\frac{1}{a} > 0$, 即 $a < 0$.

首先将 $\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 分母有理化, 我们有

$$\sqrt{-\frac{1}{a}} = \sqrt{-\frac{a}{a^2}} = \frac{1}{|a|} \sqrt{-a} = -\frac{\sqrt{-a}}{a} \quad (\text{注意 } a < 0),$$

因此问题中的分式化为 $\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}}$. 为了将此分式分母有理化, 我们注意 $1+\sqrt{-a}$ 的有理化因子是 $1-\sqrt{-a}$. 当 $1-\sqrt{-a} \neq 0$ 时, 我们用 $1-\sqrt{-a}$ 同乘上述分式的分子、分母得

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{1+\sqrt{-a}} &= \frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{(1+\sqrt{-a})(1-\sqrt{-a})} \\ &= \frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{1-(\sqrt{-a})^2} \\ &= \frac{(a+1)(1-\sqrt{-a})}{1+a} \\ &= 1-\sqrt{-a}, \end{aligned}$$

当 $1 - \sqrt{-a} = 0$ 即 $a = -1$ 时, $\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}} = \frac{-1+1}{2} = 0$, 这也等于 $1 - \sqrt{-a}$.

合并上面两种情况的结果可知

$$\frac{a+1}{1-a\sqrt{-\frac{1}{a}}} = 1 - \sqrt{-a}.$$

也可采用下面的方法将 $\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}}$ 的分母有理化(避免了分两种情况处理):

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{1+\sqrt{-a}} &= \frac{1-(-a)}{1+\sqrt{-a}} = \frac{1^2 - (\sqrt{-a})^2}{1+\sqrt{-a}} \\ &= \frac{(1-\sqrt{-a})(1+\sqrt{-a})}{1+\sqrt{-a}} \\ &= 1 - \sqrt{-a}.\end{aligned}$$



画龙点睛

1. 将形如 $\sqrt{\frac{u}{v}}$ (这里 $uv \geq 0, v \neq 0$) 的根式分母有理化, 应注意算术平方根的意义: $\sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{\frac{uv}{v^2}} = \frac{1}{|v|} \sqrt{uv}$.

2. 将形如 $\frac{1}{u+\sqrt{v}}$ (这里 $u \neq 0, v \geq 0$) 的根式分母有理化, 应注意(分母的)有理化因子 $u-\sqrt{v}$ 是否可能为零, 必要时需分情况分别处理.

3. 有时, 利用 $u \geq 0$ 时有 $u = (\sqrt{u})^2$, 及平方差公式, 处理更为直接.



举一反三

1. 化简 $ab\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$.