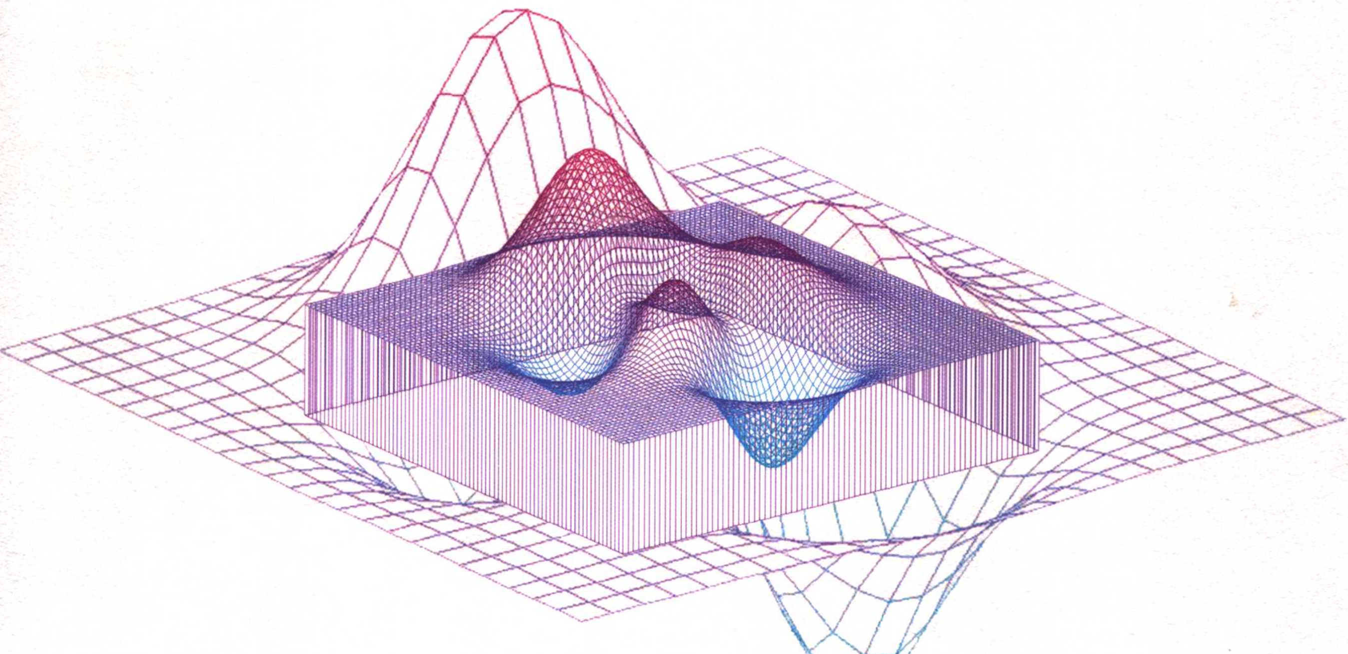
高职高专精品课程规划教材

简明高等数学

应用篇

JIANMING GAODENG SHUXUE

主编　潘　凯　副主编　黄建国　傅必友



中国科学技术大学出版社

● 高职高专精品课程规划教材

简明高等数学

◆ 应用篇 ◆

主　编　潘　凯

副主编　黄建国　傅必友

中国科学技术大学出版社

·合　肥·

内容简介

本规划教材依据教育部最新颁发的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育人才培养目标及规格》而编写，内容取材汲取了同类教材的优点和实际教学中的教改成果，融科学性、实用性、特色性和通俗性于一体，突出时代精神和知识创新，以应用为目的，以必需和够用为原则，注重学生数学素质和能力的培养.分为上、下两册，上册为基础篇，包含：极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，积分及其应用，多元函数的微积分等；下册为应用篇，包含：常微分方程，无穷级数、线性代数，概率与统计初步，数学建模简介等.每章后配有内容小结和自我测试题，方便读者自学和提高，书后附有参考答案、初等数学常用公式、常用平面曲线及其方程、Mathematica 简介、常用统计分布表等，供读者查阅.

本书为高等学校高职高专精品课程规划教材，亦可作为成人高等学历教育数学教材和相关教师的教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

简明高等数学. 应用篇. / 潘凯主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2007.9
（高职高专精品课程规划教材）

ISBN 978-7-312-02146-0

Ⅰ. 简…　Ⅱ. ①潘…　②黄…　③傅…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 108769 号

责任编辑：张善金
出　版　者：中国科学技术大学出版社
　　地　址：合肥市金寨路 96 号　邮编：230026
　　网　址：http://www.press.ustc.edu.cn
　　电　话：发行 0551-3602905　邮购 3602906　编辑 3602910
　　E-mail：发行部 press@ustc.edu.cn
印　刷　者：合肥学苑印务有限公司
发　行　者：中国科学技术大学出版社
经　销　者：全国新华书店
开　　　本：787mm×960mm　1/16　印张：16.5　字数：370 千
版　　　次：2007 年 9 月第 1 版
印　　　次：2007 年 9 月第 1 次印刷
印　　　数：1—5000 册
定　　　价：22.00 元

前 言

高等数学是高等职业技术教育一门必修的公共基础课程，是提高学生文化素质和学习有关专业知识、专门技术及获取新知识和能力的重要基础，同时也是学生将来生活、学习、工作，面向社会、服务社会的一个重要工具，在高等职业技术教育中起着非常特殊的作用，学好这门课程对学生的专业学习和今后的发展至关重要.

为适应新的职业教育人才培养要求，在加强专业教学的同时，强化了对学生技能的培养，数学基础课的教学面临新的调整，突出了必需、够用的教学原则. 在教学与研究中，我们深刻地认识到：高职高专数学教育必须培养学生三个方面的能力：一是用数学思想、概念、方法，消化吸收工程概念和工程原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力.

本书是在高等职业技术教育新一轮教育教学改革的背景下，根据教育部最新颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育人才培养目标及规格》精神，并在前期教材建设的基础上，结合对同类教材的发展趋势分析及专业教学的实际需要，精心再编而成.

本书具有以下特点：

（1）更加突出以应用、实用、够用为度的教学原则.

（2）注重对学生应用意识、兴趣和能力的培养，每章后配有数学实验，并

选编了数学建模一章，以期提高学生把实际问题转化为数学模型的能力.

（3）结合高职高专的特点，力求内容充实，简明自然，注重数学概念通俗，表述精练，淡化了深奥的数学理论，强化了几何说明和直观解释.

（4）根据专业教学的实际需要，优选了部分应用实例.

（5）考虑到职业教育的发展趋势，本教材体系模块小，更灵活，便于实际操作，较易解决内容多，学时少的矛盾.

（6）每节后配有相应的习题，供学生练习，各章配有小结和自我测试题，便于学生对该章知识的复习、巩固和提高.

本书按三个模块：基础模块，应用模块，探索模块，分上、下两册编写. 上册为基础篇，内容包括：极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，积分及其应用，多元函数的微积分等. 下册为应用篇，内容包括：常微分方程，无穷级数，线性代数，概率与数理统计，数学建模简介等.

本书推荐为高职高专精品课程教材，可供开设高等数学课程的高等职业技术学院、高等专科学校工科类各专业使用，也可供同类高校经济管理类专业选用，对各类成人高等学历教育及相关专业的教学也较适用.

本书是集体智慧和力量的结晶，参加本书编写工作的作者均是工作在高等数学教学第一线的教师和研究人员. 基础篇：第 1 章由傅必友执笔，第 2 章、第 3 章由黄建国执笔，第 4 章由肖国山执笔，第 5 章由潘凯执笔. 应用篇：第 1 章由吕同斌执笔，第 2 章由潘凯执笔，第 3 章由王少环执笔，第 4 章由于华锋执笔，第 5 章由张志红执笔. 实验内容及全书框架结构安排由潘凯承担，统稿、定稿由潘凯、黄建国、傅必友完成.

在本书的编写过程中，我们参阅了一些高等数学方面的优秀教材和学术专著，并得到教育主管部门的大力支持，中国科学技术大学数学系博士生导师、原系主任李尚志教授、徐俊明教授分别审阅了本书第一版的部分原稿，并对本书的编写提出了许多宝贵意见和建议，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中不足和疏漏之处在所难免，恳请读者和同行专家、学者不吝赐教、斧正.

编　者

2007 年 6 月

目 次

第 1 章　常微分方程

不是无知，而是对无知的无知，才是知的死亡.

——怀特海

本章导读

在科学研究和生产实践中，为了深入了解自然规律，常常需要寻求与问题有关的表示客观事物的变量间的函数关系. 在大量实际问题中，往往不能直接得到所求的函数关系，但我们可以利用已有的数学知识和基本科学原理，构建出含有未知函数及其变化率之间的关系式，即所谓的微分方程，然后再从中解出所求函数. 因此，微分方程是描述客观事物的数量关系的一种重要数学模型.

本章我们首先介绍微分方程的一些基本概念，然后讨论常见的微分方程的类型与解法，最后结合实例来说明其应用.

不同类型的微分方程有不同的求解方法. 学习本章时要注意不同类型的微分方程之间的区别与联系. 首先应弄清方程所属的类型，然后再选择正确的求解方法. 本章重点是一阶微分方程和二阶常系数的齐次线性微分方程的求解，难点是二阶常系数的非齐次线性微分方程的求解.

1.1　微分方程的基本概念

1.1.1　两个具体实例

为了给出微分方程概念，我们先看下面的例子：

一、求曲线方程问题

【例 1.1.1】 已知一条曲线过点（1，2），且在该曲线上任意点 $P(x, y)$处的切线斜率为 $2x$，求该曲线方程.

解 设所求曲线方程为 $y=y(x)$，据导数的几何意义，知 $y=y(x)$应满足下式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \qquad 或 \qquad \mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$$

这是一个含有所求未知函数 y 的导数或微分的方程．要求出 $y(x)$，只须对上式两端积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x$$

即

$$y=x^2+C \qquad (C\ 为任意常数)$$

由于曲线过点（1，2），因此，还应满足条件：

$$当\ x=1\ 时，y=2 \quad 或 \quad 记为\ y\big|_{x=1}=2$$

将该条件代入 $y=x^2+C$ 即得所求曲线的方程为：

$$y=x^2+1$$

二、确定运动规律问题

【例 1.1.2】 列车在平直轨道上以 20m/s 的速度行驶，当制动时，列车加速度为$-0.4\mathrm{m/s^2}$，求制动后列车的运动规律.

解 设列车制动后 t 秒内行驶了 S 米．按题意，求制动后列车的运动规律，即 $S=S(t)$

根据二阶导数的物理意义，得

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$$

这是一个含有所求未知函数 S 的二阶导数或微分的方程．要求出 $S(t)$，只须对上式两端进行两次积分，分别得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1, \qquad S=-0.2t^2+C_1t+C_2$$

由于制动开始时的速度为 20m/s，即满足条件：

$$当\ t=0\ 时，v=20 \quad 或 \quad 记为\ S'\big|_{t=0}=20$$

假定路程 S 是从开始制动算起，即满足条件：

$$当\ t=0\ 时，S=0 \quad 或 \quad 记为\ S\big|_{t=0}=0$$

将要满足的两个条件代入 $S=-0.2t^2+C_1t+C_2$

得 $C_1=20,\ C_2=0$

于是制动后列车的运动规律为：

$$S=-0.2t^2+20t$$

1.1.2　微分方程的基本概念

由以上两例可以看出：像 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$ 方程中都含有未知函数的导数或微分，这样的方程就称为**微分方程**. 于是我们定义如下：

定义　含有未知函数的导数或微分的方程，称为微分方程.

未知函数是一元函数的微分方程，称为常微分方程. 未知函数是多元函数的微分方程，称为偏微分方程. 微分方程中未知函数的导数的最高阶数，称为微分方程的阶.

例如，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 是一阶常微分方程或简称一阶微分方程，$\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=f(x)$ 是二阶常微分方程或称二阶微分方程；而 $\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2T}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2T}{\partial z^2}=0$，$\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2}=4\dfrac{\partial^2T}{\partial t^2}$ 是**二阶偏微分方程**.

本章只讨论常微分方程，我们以后把常微分方程简称为“微分方程”，甚至更简便地称为“方程”.

n 阶常微分方程的一般形式可表示为：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

这里 x 为自变量，y 是 x 的未知函数，而 $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 依次是未知函数的一阶、二阶……n 阶导数.

满足一个微分方程的函数称为该微分方程的解.

也就是说，将一个函数式代入微分方程中，使之化为一恒等式，该函数式便是微分方程的解.

注意：微分方程的解既可以是显函数 $y=f(x)$ 形式，也可以为 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数形式.

【例 1.1.3】　验证 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 为方程 $xy'+y=\cos x$ 的解.

解 由于 $y=\dfrac{\sin x}{x}$， $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，代入方程 $xy'+y=\cos x$ 的左端，即有

$$左端=x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}=\cos x=右端$$

函数式 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 满足微分方程 $xy'+y=\cos x$，故 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 为方程 $xy'+y=\cos x$ 的解.

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与方程的阶数相同时，这样的解称为微分方程的通解.

如例 1.1.1 中，$y=x^2+C$ 就是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 的通解，例 1.1.2 中，$S=-0.2t^2+C_1t+C_2$ 就是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$ 的通解.

注意：通解中的任意常数必须实质上是任意的. 例如，在 $y=(C_1+C_2)x$ 中，C_1,C_2 实质上不是任意的两个常数，因为 C_1+C_2 可合并成一个常数 C.

对于微分方程的求解，有时我们会给出某些具体条件，然后再求解. **当自变量取某值时，要求未知函数及其导数取给定值，这种条件称为初始条件.**

如例 1.1.1 中，当 $x=1$ 时，$y=2$ 或 $y\big|_{x=1}=2$ 为初始条件；例 1.1.2 中，当 $t=0$ 时，$v=20$ 或 $S'\big|_{t=0}=20$，当 $t=0$ 时，$S=0$ 或 $S\big|_{t=0}=0$ 均为初始条件.

满足给定的初始条件的解，称为微分方程满足该初始条件的特解.

例如，$y=x^2+1$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=1}=2$ 的特解，而 $S=-0.2t^2+20t$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$ 满足初始条件 $S\big|_{t=0}=0$， $S'\big|_{t=0}=20$ 的特解.

微分方程的特解 $y=f(x)$ 的几何图形，称为该方程的一条**积分曲线**. 而通解的图形在几何上则表示**积分曲线族**.

习　题　1.1

1．下列方程中哪些是微分方程？

（1） $y''-3y'+2y=x$　　　（2） $y^2-3y+2=0$

（3） $y'=2x+6$　　　（4） $y=2x+6$

（5） $\mathrm{d}y=(2x+6)\mathrm{d}x$　　　（6） $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sin x$

2．指出下列微分方程的阶数？

（1）$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$　　（2）$y''+3y'+2y=x^2$

（3）$\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2-y^4=e^x$　　（4）$y-x^4y'=y^2+y'''$

3．在下列各题中，验证所给函数或二元方程所确定的函数是相应微分方程的解．

（1）$yy'=x-2x^3, y=x\sqrt{1-x^2}$

（2）$(x-y)dx+xdy=0, y=x(C-\ln x)$

（3）$y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}, y=\dfrac{1+x}{1-x}$

4．给定一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x$．

（1）求出其通解．

（2）求过点（1，4）的特解．

（3）求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解．

（4）求出满足条件 $\int_0^1 ydx=2$ 的解．

（5）给出（2），（3），（4）中的解的图形．

1.2　一阶微分方程

1.2.1　可分离变量微分方程

定义 1　形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{1.1}$$

这种形式的方程称为**可分离变量微分方程**．

这种方程的解法是：**先分离变量，然后再两边积分**．即：

先分离变量
$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

两边积分
$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

【例 1.2.1】 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$$

的通解.

解 这是可分离变量微分方程，首先分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

两边积分
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x$$

有
$$\ln|y| = x^2+\ln C_1$$

记任意常数为 $\ln C_1$ （其中，$C_1>0$ ），这是为了便于化简．从而得

$$|y|=C_1\mathrm{e}^{x^2}$$

或写成
$$y=\pm C_1\mathrm{e}^{x^2}\ ,\quad (C_1>0)$$

由于 $y=0$ 显然也为方程的解，所以方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}$$

由此可看出，在解题过程中可将 $\ln|y|$写成 $\ln y$，对于 $\ln C_1$，当化简掉“ln”后，对常数 C_1 也不再有“$C_1>0$”的限制．因此，今后遇到类似情形，就不再写绝对值符号，最后结果中的 C 是任意常数.

【例 1.2.2】 求微分方程

$$\sqrt{1-y^2}=3x^2yy'$$

的通解.

解 当 $y\neq\pm1$ 时，分离变量得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{3x^2}$$

两边积分

$$\int\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{3x^2}$$

得
$$-\sqrt{1-y^2}=-\frac{1}{3x}+C$$

或写成

$$\sqrt{1-y^2}-\frac{1}{3x}+C=0$$

这就是原方程的通解.

由本例易看出，$y=\pm1$ 也是方程的解，但却不能并入通解之中. 所以"求微分方程的通解"与"求微分方程的解"含义不甚相同.

1.2.2　齐次微分方程

在一阶微分方程中，可直接分离变量的方程为数不多，但有些方程通过适当变量代换可转化为可分离变量方程，齐次方程便是其中一种.

定义 2　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.2}$$

形式的方程称为**齐次微分方程**.

这种方程的解法是：**先作变量代换，再分离变量，然后两边积分，并代回原变量得解**. 即

先变量代换，令

$$u=\frac{y}{x}$$

得

$$y=ux\text{，}\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u$$

代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u=f(u)$$

再分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

然后两边积分，代回原变量即可得解.

【例 1.2.3】　求微分方程

$$y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$$

的通解.

解　令 $u=\frac{y}{x}$，则

$$y=ux\text{，}\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u$$