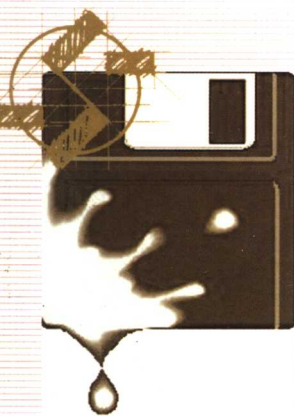


ZHONGXUE SHUXUE
CHUANGXIN SHIYAN



唐越桥

马岷兴

编著

中学数学

创新实验

广西教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE
CHUANGXIN SHIYAN

唐越桥 马岷兴 编著

中学数学

创新实验

广西教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

中学数学创新实验/唐越桥, 马岷兴编著. —南宁:
广西教育出版社, 2006. 10

(中学创新实验丛书)

ISBN 7-5435-4712-0

I. 中... II. ①唐...②马... III. 数学课—教学研究—中学 IV. G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字 (2006) 第114965号

中学创新实验丛书

中学数学创新实验

唐越桥 马岷兴 编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路8号 邮政编码: 530022

电话: 0771-5865797 5852408 (邮购)

本社网址 <http://www.gxeph.com>

读者电子信箱 book@gxeph.com

全国新华书店经销 广西地质印刷厂印刷

*

开本 890×1240 1/32 9.375 印张 260 千字

2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1—5 000 册

ISBN 7-5435-4712-0/G·3768 定价: 16.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与承印厂联系调换

作者简介

唐越桥，生于1966年，男，四川省绵阳市人。四川师范大学绵阳初等教育学院副教授，数学教育学硕士。主要从事数学教育与信息技术整合的教学与研究工作，先后有10余篇论文获奖。现为四川省师范院校小教（学前）教育专业学科省级联合教研组（数学组）副组长，四川师范大学全国教育科学规划2004年教育部规划课题《新课程观下数学文化教育的建设及其评价》总课题组核心成员，主要负责《数字化时代数学文化教育的特征研究》《小学教育师资数学文化教育观的培养研究》等项目的研究工作。

马岷兴，生于1963年，女，四川省乐山市人。四川师范大学数学与软件科学教授，硕士生导师。1995、2000学年分别在北京师范大学、华东师范大学访学，从师于曹才翰与张奠宙先生。主要从事数学教育的教学与研究工作。近年来发表论文20余篇，第一作者撰写著作8本，第二作者撰写著作1本，主持教育科研课题4个。其中主持的在研课题《新课程观下数学文化教育的建设及其评价》为全国教育科学规划2004年教育部规划课题，主持的项目获得过“全国师范院校基础教育改革实验研究项目优秀成果”三等奖，两次被四川省人民政府授予二等奖。

感谢参加本书部分章节编写的下列老师：

宁 洪 赵龙山 杨孝斌 黄堂红 李昌勇 邵 莉
杜乐坤 吴 敏 柏丽霞 李 芳 盛 登 何 霞



序

同所有数学教师和数学教育工作者一样，我们也一直在反思着这样的问题：

数学是什么？数学是从哪里来的？数学要到哪里去？

为什么很多学生不喜欢数学，害怕数学？

为什么学生应对考试的主要手段是背题型，而对于没有见过的题型做起来总感到吃力？

为什么那些考上大学的莘莘学子会将象征他们获取胜利果实的高考称为“黑色的六月”，而不是“金色的六月”？为什么他们给其他同学传授的学习经验第一招是做题，第二招是做题，第三招还是做题？

对于数学教育，我们应教什么，怎样教？学生要学什么，怎样学？

这诸多的问题最终汇集在一个问题上：中国基础数学教育改革路在何方？

看了《中学数学创新实验》一书的原稿后，引起了我的共鸣：学生对数学缺乏真正的理解是导致学生产生以上问题的主要原因。

对于“数学究竟是什么”这样一个问题，要想从哲学层面给予解决，那是哲学家的工作。那么，在数学家看来，数学是什么呢？

美国数学家 L. Steen 说：“数学是模式的科学。”

G. 波利亚说：“创造过程中的数学，看起来却像是一门实验性的归纳科学。”

“数学是科学，数学更是一门创造性的艺术。”

.....



学生永远是我们数学课堂的主体，这就决定了在数学知识的传授过程中，不是让学生简单被动地接受知识要点，而是让他们主动去领悟和发现。因此，数学实验在教学中的开展，是完全有必要的。《全日制九年义务教育数学课程标准》（实验稿）中特别提出：学生的数学学习过程充满了观察、实验、猜想、验证、推理与交流等丰富多彩的数学活动。经历、观察、感知、操作、模仿、收集、参与、尝试、发现、探究构成了课程标准中实验教学的主要行为动词，是实现“过程与方法目标”的主要途径。这就是数学实验的主要思想，一种用实验学数学、用实验做数学的思想。

学习数学最好的方法是“做数学”。传统的做法是老师在课堂上讲解数学要点，因此做数学的含义仅仅是演练教科书上一个又一个的习题。但数学的教学目的更在乎的是探索数学现象，发现数学理论。学生做数学的过程是研究、发现、质疑、（最后希望是）理解的过程。其作用在于：通过实验培养动手能力，培养分析问题和解决问题的能力，以达到和加深对数学的理解，进而通过实验发现问题、培养创新能力。当我们克服了重重困难（山重水复疑无路），“发现”和“再创造”出了自己的数学王国，在获得愉悦（柳暗花明又一村）的同时，对“数学是什么”的认识又上了一个新的台阶。

围绕中学数学创新实验的具体做法，本书介绍的几类典型案例和分析过程让人耳目一新。所精选的大量数学实验案例，有的代表了一种数学思想，有的代表了一种数学方法，有的揭示了一个数学本质……这些数学实验案例不仅对学生学习数学有帮助，对教师也有很大的作用：它能促进教师集思广益以设计更多更好的实验，充分运用教学资源，调动更广、更深层面的因素参与到教学中去，帮助教师成长。

数学可以这样去教，数学还可以这样去学，甚至数学还可以这样去做，这是真正意义上的我们的课堂主体——学生主动参与，积极领悟，探索发现。我们不少教师在教学过程中积累了许多培养学生数学兴趣的经验，但这存在着时间、地域与对象的局限性，



因而我们的经验只是个人的经验. 数学实验的开展, 有利于使我们的经验变得更为丰富.

唐越桥老师和马岷兴老师对数学创新实验的理论与实践作了长时间的研究与探索. 他们适时地提出了数学实验是数学学习的一种方式, 是进行数学研究的一种方式, 是数学应用及问题解决的一种方式, 准确地把握住了数学是从实践中来最后还要回到实践中去这一理念, 为我们的数学工作者及对数学有浓厚兴趣的读者, 作了先导. 在本书中, 我们不仅能够感受到他们丰富的教学实践经验与扎实的数学功底, 还能感受到他们对中学生的深切爱意.

四川师范大学博士生导师 王方贵



目录

第一章 数学创新实验概要	(1)
第一节 轻松走进数学实验	(1)
一、“玩”中的数学	(1)
二、钟面数学问题	(6)
三、开锁问题	(10)
四、数学需要实验	(13)
第二节 实验，数学的路与桥	(15)
一、数学实验发展概况	(15)
二、数学实验方法	(17)
三、游戏概说	(26)
四、实验，数学的路与桥	(33)
第三节 实验，数学创新的源泉	(49)
一、哥尼斯堡七桥问题	(50)
二、“幸运 52”，猜中没商量	(53)
三、实验，数学创新的源泉	(58)
第二章 数学创新实验问题探究	(64)
第一节 发现数学	(64)
一、包装盒的设计	(65)
二、切蛋糕问题	(66)
三、吃糖吃出的数学问题	(68)
四、椭圆与正弦曲线	(71)
五、小题大做探 $\sum_{i=1}^n i^2$	(74)
第二节 理解数学	(77)
一、充要条件	(78)
二、芝诺悖论	(81)



三、“公平赌博”游戏	(83)
第三节 验证数学	(86)
一、大圆小圆问题——对一道有趣几何题的探讨	(86)
二、绝对胜利的打赌法	(92)
三、“借马分马”问题	(95)
四、猜拳游戏	(99)
五、魔术树上的金苹果	(100)
第四节 应用数学	(102)
一、称球问题	(104)
二、血型代数	(105)
三、展开图的作用	(108)
四、赌徒分金币问题	(112)
五、公说公有理，婆说婆有理	(114)
六、老虎捕食问题	(116)
七、难铺的瓷砖	(119)
第三章 计算机辅助实验	(124)
第一节 概述	(124)
第二节 确定性问题	(129)
一、再探开锁问题	(129)
二、染色问题	(131)
三、日历问题	(134)
四、素数问题	(138)
五、辗转相除法	(141)
六、二分法求一元二次方程的近似根	(143)
七、递推数列与递归算法	(145)
第三节 随机性问题	(151)
一、认识随机函数	(151)
二、模拟称重	(155)
三、模拟摸球实验	(157)
四、生日问题	(158)



五、炮阵问题	(160)
六、蒙特卡罗法 (Monte—Carlo Method)	(163)
第四节 逻辑判断与推理实验	(168)
第五节 自编程数学游戏	(171)
第六节 Excel 与统计实验	(174)
一、牛刀小试	(175)
二、数列计算实验	(177)
三、矩阵实验	(179)
四、学生体育锻炼达标情况统计	(183)
五、比赛评分系统	(189)
第四章 中学数学实验教与学	(192)
第一节 数学实验教学的基本模式	(192)
第二节 中学数学典型实验课例	(196)
第三节 高、中考数学实验问题	(243)
一、函数与解析几何类	(245)
二、操作探究类	(253)
三、概率统计类	(268)
四、生活情境类	(278)
后记	(287)



第一章 数学创新实验概要

数学中的许多定理（结论）都是用实验和归纳发现的，证明只是补充手续而已。

——高斯

数学这门科学，需要观察，还需要实验。

——欧拉

第一节 轻松走进数学实验

说到实验，人们最容易联想到的是物理实验、化学实验和生物实验。说到数学实验，数学教师容易想到数学课堂教学方法中的“演示实验教学法”，学生能够想到数学老师用演示实验的办法让大家去认识概念、揭示现象、发现规律并帮助理解。也有老师在第一次听到数学实验的时候，将其与计算机联系在一起，以为就是用计算机来解决数学问题的一种活动。那么，究竟什么是数学实验？数学需要实验吗？怎样做数学实验？做数学实验的意义在哪里？别着急，我们先以一些案例为铺垫让大家轻松进入本书的讨论和学习，然后再来回答这些问题。

一、“玩”中的数学

如果说数学是用来玩的，那肯定是很不严肃的。但在我们



“玩”的过程中,有很多数学问题,其作用正如理查德·费曼^①所言:“我一生中最得意的是什么?是孩童时代的那些小实验和充满孩子气的智力游戏。”那么,就让我们一起来玩玩游戏吧!

1. 过河游戏一^②

三个传教士准备将三个食人兽带回修道院进行教化。途中需要通过一条小河,河上有一小船,每次最多能承载两人。传教士们估计在过河过

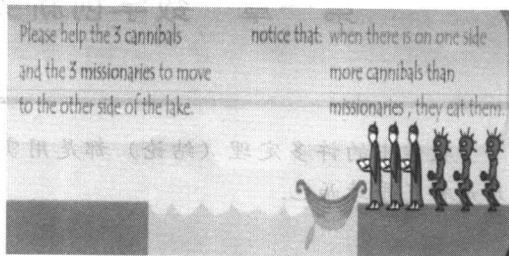


图 1-1

程中,如果他们在河岸的任何一边的人数比食人兽少时,自己会受到食人兽的攻击。为避免这种危险的发生,传教士们应怎样安排过河方案?(假设没有船工,传教士和食人兽都会划船)

如果你已见过这个游戏,那你的解决办法是什么?也许你觉得这不一定是需要高深的数学知识的问题,所需要的只是解决问题的方式方法和策略。

如果你从没见过这个游戏,那你准备给传教士们一个什么样的解决方案?如果你苦思冥想而无结果,你又会产生什么想法?是放弃?是希望别人告诉你答案?还是自己另想办法解决?

“永不言败”是我们中学生最优秀的意志品格,所以是不可能放弃的。接下来怎么办?肯定是亲自动手实验啦!对,应该找几个同学一起来玩一玩这个游戏,或者找几个实物对象进行一番实战演习,你会发现很容易就解决了这个问题,同时问题的解决过程会在你的头脑里留下深刻的印象,而且你能够一边操作实物一边给同学们清楚地讲解你的解决方案。但是,最重要的一点是,

① 理查德·费曼,1965年诺贝尔物理学奖获得者,理论物理学家。他的引人注目之处在于他的创造性及对科学的一丝不苟

② 一个Flash游戏,可上网站 <http://www.9ky.com/flash/7834.htm> 下载



你知道这个问题只需要动手实验就可以解决，不需要记住你已经得到的解决方案，而且就算是一个对于数学一窍不通的人，通过实验也能解决这个问题。相比之下，如果我立即把答案告诉你，你一口气读完后会有什么印象：

第一步 先过去两个食人兽，再回来一个；

第二步 再过去两个食人兽，再回来一个；

第三步 过去两个传教士，再回来一个传教士和一个食人兽；

第四步 再过去两个传教士，回来一个食人兽；

第五步 过去两个食人兽，再回来一个食人兽；

第六步 最后两个食人兽过去。

可以毫不夸张地说，如果你没有动手实验，在第一遍读完后，你头脑里一点印象都没有，即使再读一遍印象也不会太深。

也许有同学说，这不是一个数学问题。不对，这是一个数学问题，是一个训练问题解决策略的数学问题：过河方案中的每一步的状态，都将影响其后一步的结果，这在现代数学中被称为多步决策理论。当你进入大学后，在大学的《数学实验》^①课程中可用数学建模的方法和计算机程序来研究这类问题。

在下述另一个过河游戏中，相信你一定有很好的策略，也相信你一定不会忘记动手实验。

2. 过河游戏二^②

一家六口，包括爸爸、妈妈、两个儿子和两个女儿，他们在远足途中迷了路，还不幸遇到一个逃狱的犯人，幸好犯人被一个正在远足休假的警察逮住，这一家六口才保住了性命。

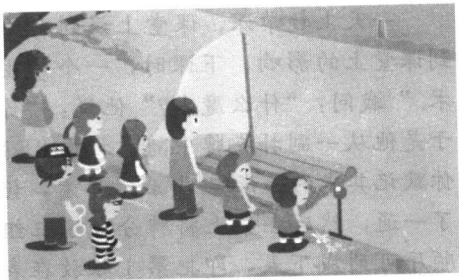


图 1-2

① 谢云荪，张志让主编. 数学实验. 北京：科学出版社，1999. 86，173

② 又一个 Flash 游戏，可上网站 <http://www.onlinedown.com/soft/27398.htm> 下载



可是在荒郊野外无线电接收不灵，警察也没法与外界联络。请你设法让他们八个人在天黑之前到达营地。他们现在只有渡河一条捷径可走，在河边有一小竹排可以帮助他们。可是只有爸爸、妈妈和警察会划竹排。不论大人与小孩，竹排每次最多能承载两个人。在渡河期间，你要防止如下三件事情发生：

- (1) 当警察与犯人分开时，犯人会伤害这一家人；
- (2) 当爸爸看见妈妈离开女儿时，爸爸便会教训女儿；
- (3) 当妈妈看见爸爸离开儿子时，妈妈便会教训儿子。

答案不算简单，但相信你一定有办法，这里就不再给出了。

现在，我们可以想象一下军事作战指挥部沙盘的作用：我们看过许多战争故事片，在作战双方的指挥部里都有一个模拟战场的沙盘，指挥官在沙盘上向他的下级军官布置作战任务。试想一想，如果指挥官不借助沙盘而只用口述的方式向他的下属下达作战任务，两者之间的区别在哪里？哪种方式可取得更好的效果？

其实，在一些表面上看起来跟数学无关的问题中隐含着深刻的数学思想。这两个游戏在网上被称为“IQ 过河游戏”。IQ，自然与测试智商有关。游戏是需要动手去玩的，游戏中有数学，生活中也处处有数学。

3. 魔术中的数学

一天上数学课，课堂上讲到有关问题解决的策略。也许是受到课堂上的影响，下课时，一个学生说：“老师，我给你变个魔术。”我问：“什么魔术？”他说：“你看了就知道。”我说：“行。”于是他从一副扑克牌中随意抽出 21 张，对我和其他同学说：“请你默记其中的一张牌。”我看了看，记住了其中的一张。他把牌洗了一通，然后在桌上将牌分成了三组，每组每次分一张，分牌的顺序可列成下表，即把第 1 张放在表中第一组，第 2 张放在第二组，第 3 张放在第三组，第 4 张又放在第一组……依次进行，最后一张即第 21 张放在第三组，牌背面均向上（后来我发现向上还是向下是无所谓的，而且第一次分牌可不管三七二十一随便分成三组就行）。这样摆成了三组，每组 7 张。此时，他问我：“默记的



牌在哪一组?”当我说出在某组后,他分别把三组牌收起来,收牌时保持牌在组内的先后顺序不变,再把收好的三组牌叠起来拿在手中(我发现一个细微动作:叠的时候他将我确认有默记牌的那组放在了中间)。他不再洗牌,随即开始第二次分牌。分法如前,把第一张放在表中1的位置上,第二张放在2的位置上……分好后他又问我:“默记的那张牌现在在哪一组?”当我说出所在组后他又如前再次收拢、叠起(我确认有默记牌的那组又被他放在了中间),然后进行第三次分牌。分好后他再次问我默记的牌在哪一组。当我指出所在的组后,他再把三组牌按前法收在一起,然后毫不犹豫地该组中抽出一张牌来,此牌恰是我默记的那一张,这一结果博得同学们的一片掌声。同学们都问我:“这个魔术的诀窍是什么?”我问表演的同学是否知道。他说:“不知道!请老师讲一讲。”我问同学们是否看到表演中的细节。他们说:“看到了,因为他已经为我们表演了很多次了。”我问:“这个细节是什么?”他们说:“是不是自己所记的牌所在的那一组每次都被放在了中间?”我问表演的同学:“可以不放在中间吗?”他说:“不能。”于是我对同学们说:“让老师也来玩一次这个魔术。”然后在第三次分牌、收牌后我也毫不犹豫地从中抽出一张牌来,照样博得了同学们的一片掌声。我问:“刚才我抽出来的是第几张牌?”他们说:“没发现。”我说:“是第十一张牌!即在21张牌中的正中间的那一张。”然后跟同学们一起分析了这个魔术的实质。

分牌顺序

第一组	第二组	第三组
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

请读者也玩玩这个魔术吧!为什么别人所记的牌最后一定会



在正中间呢？同时再找找其他魔术的谜底，然后整理出一本“数学魔术集”来，有兴趣吗？

4. 四国语言问题^①

在一次国际会议上，甲、乙、丙、丁四人在一个会议小组中讨论，交谈时发生了语言障碍。在中、英、法、日四种语言中，每人只会两种，可惜选不出一一种大家都会的语言。已知：

- (1) 只有一种语言有三个人会；
- (2) 甲会日语，丁不会日语，但能互相交谈；
- (3) 乙不会日语，但甲和丙交谈时，要请他当翻译；
- (4) 乙、丙、丁三人想互相交谈，却找不到三人都会的语言；
- (5) 没人既能用日语，又能用法语交谈。

问：甲、乙、丙、丁各会什么语言？

请同学们每四人一组分别扮演甲、乙、丙、丁，或多画几张表格进行试验，可以很快得到如下表所示四个人对语言的掌握情况。表格中用“√”表示某人会某种语言，用“×”表示不会。

	中	英	法	日
甲	√	×	×	√
乙	√	×	√	×
丙	×	√	√	×
丁	√	√	×	×

二、钟面数学问题

请问，一天 24 小时内钟面上的时针和分针一共重合多少次？

这是一个流传了很久的钟面问题。也许你在读小学时就看到了这个问题，那时你的第一个想法是什么？是马上动笔演算，还是在头脑中进行着什么思考，抑或是在做另外一种什么工作？据

① <http://www.syyzx.shy.bjedu.cn/xueke/jsj/data/asyd/xtp/xtp002.htm>
<http://www.cnzyzz.com:801/teacher/wind/list.asp?id=61>



图 1-3

说有人用这一问题同时向中国儿童和美国儿童提问,发现美国儿童用其所戴手表进行实验者居多,而中国儿童则用笔进行计算者居多(也许是那时中国儿童戴手表者不多),这反映出不同国度学生不同的学习方式和思维习惯。在把这个问题呈现给读者之前,我也分别在小学生、中学生

和大学生中进行了试验。结果发现,对于这个问题的解决,在这三个层次的学生中差不多各有近三分之一的学生在动笔演算,另有多于三分之一的学生在做思考状,其余近三分之一的学生准备拨弄他们的手表。可见,同一国度的不同学生之间的学习方式和思维习惯也存在较大差异。最后大家一致认为,“拨弄手表进行实验”这一方法无疑是最快获得答案的方法。

数学思维的深刻性,表现为洞察每一个研究对象的实质,以及揭示这些对象之间的相互关系。^①它具有从所研究的材料(已知条件、解法与结果)中暴露被掩盖住的个别特殊能力和组合各种具体模式的能力。在这个问题中,我们的思维不会也不应该只停留在通过“拨弄手表”而得到的“重合 22 次”这一结论中。通过“拨弄手表”,会发现钟面上还有许多可以探究的问题,比如:

- (1) 能否求出每一个具体重合的时刻?
- (2) 24 小时内时针和分针一共垂直多少次? 分别在哪些时刻垂直?
- (3) 24 小时内时针和分针一共有多少次成 180° 角? 分别在哪些时刻成 180° 角?
- (4) 24 小时内时针和分针有多少次成指定角 n° ? 分别在哪些时刻成指定角?

.....

但若没有进行“拨弄手表”这一实验,这些问题在头脑里缺乏直观印象,特别的一种可能是有些学生也许从未见过指针式钟表,

① 胡炯涛. 数学教学论. 南宁: 广西教育出版社, 1996