新课程

人民教育出版社授权
配人教版教材使用

新精编

高中数学

第一册下

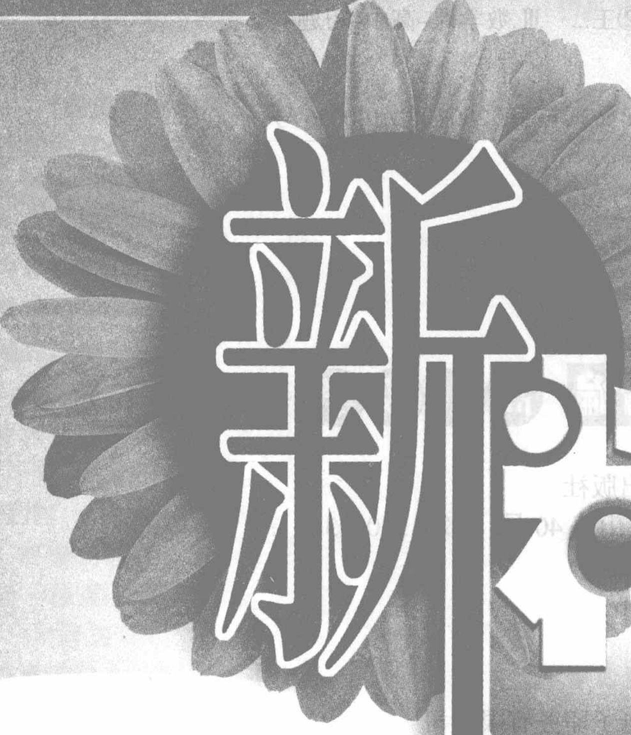
（高一下用）

XINKECHENG
XINJINGBIAN
GAOZHONGSHUXUE

浙江教育出版社

新课程

人民教育出版社数学室审阅



新精编

主　编　岑　申　王而冶
副主编　金才华　许芬英
编写者　李学军　钱桐生　娄彦飞
陈永毅　丁　平　杨建忠　郑日锋

高中数学

第一册下

（高一下用）

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课程 新精编. 高中数学. 第1册.下 / 岑申,王而冶主编. —杭州:浙江教育出版社,2004.12(2005.12重印)

ISBN 7-5338-5548-5

Ⅰ.新… Ⅱ.①岑…②王… Ⅲ.数学课-高中-习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第100036号

新课程 新精编 高中数学 第一册(下)

出版发行:浙江教育出版社

(杭州天目山路40号 邮编310013)

责任编辑:金馥菊

装帧设计:韩 波

责任校对:戴正泉

责任出版:程居洪

图文制作:杭州富春电子印务有限公司

印刷装订:金华南方彩印厂

开 本:787×960 1/16

印 张:12.25

字 数:245 000

版 次:2004年12月第1版

印 次:2005年12月第2次印刷

印 数:50001—80000

书 号:ISBN 7-5338-5548-5/G·5518

定 价:12.00元

联系电话:0571-85170300-80928

E-mail:zjjy@zjcb.com

网 址:www.zjeph.com

版权所有 翻印必究

说　明

《新课程·新精编》丛书是在原“高中各学科精编”的基础上，根据当前新一轮课程改革的理念，结合教学的实际情况，吸收全国各地对原“高中各学科精编”的意见和建议，改版而成。新的丛书从内容到形式，从开本到版式都有了改进与创新，其主要特点有：

◆针对性。依照课程标准所倡导的理念，确定编写的指导思想；针对新教材的教学内容，在讲述学习方法时示例典型，在选编习题时突出学科重点知识和内容，注重理论联系实际、知识迁移、思维拓展等能力的训练，充分考虑习题的难易程度，并渗透高考命题的方向及要求。

◆权威性。这套丛书由来自教学一线的名师编写，人民教育出版社相关科室专家审阅，与新课程的教学理念及新教学大纲的要求一致。

◆实用性。这套丛书旨在便于教师教学和学生学习，例题和对应的练习均按课时编排。

◆创新性。每册按章编写，每章分别设有“学习导引”“基础例说·基本训练”“应用·拓展·综合训练”“自我评估”等栏目。

“学习导引”概括本章的主要内容、目的要求、重点、难点、特点、知识的前后联系，以及在学习方法上值得注意的问题，同时列出了本章的重要定理和公式。

“基础例说·基本训练”分范例和练习两部分。围绕本节教学重点和难点，帮助学生理解概念，掌握定理、性质、方法和技巧，纠正易犯的错误，以达到夯实基础知识、熟练基本技能的目的，并在此基础上逐步培养学生综合运用知识的能力，拓宽学生的视野。

“应用·拓展·综合训练”分范例和习题两部分。该栏目内容纵揽全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用。同时加强了数学思想、数学方法的渗透，对提高数学的应用和综合能力有较大帮助。

“自我评估”为全章知识的综合评估，分A，B两份试卷，其中A卷为基本要求，B卷为较高要求。

本次印刷时，对个别差错作了订正。

浙江教育出版社

2005年12月

目录

MULU

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第四章　三角函数

学习导引

本章内容主要有:任意角的三角函数,两角和与差的三角函数,三角函数的图象和性质.

通过本章的学习,要理解任意角的概念,弧度的意义,能正确进行弧度和角度的换算;掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义,并会利用单位圆中的三角函数线表示正弦、余弦和正切;了解任意角的余切、正割和余割的意义;掌握同角三角函数的基本关系式:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$,$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$;掌握正弦、余弦的诱导公式;掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式;掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式,通过公式的推导,了解它们的内在联系,从而培养逻辑推理能力.能正确运用三角公式,进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明.会用单位圆中的三角函数线画出正弦函数、正切函数的图象,并在此基础上由诱导公式画出余弦函数的图象;理解周期函数与最小正周期的意义,并通过它们的图象理解正弦函数、余弦函数、正切函数的性质;会用"五点法"画正弦函数、余弦函数和函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图,理解 A,ω,φ 的物理意义;会由已知三角函数值求角,并会用符号 $\arcsin x$,$\arccos x$,$\arctan x$ 表示.

本章的重点是:

(1) 任意角的三角函数的概念;

(2) 同角三角函数基本关系式,诱导公式及其应用;

(3) 正弦、余弦的和角公式;

(4) 正弦曲线的画法和正弦函数的性质.

本章的难点是:

(1) 弧度制的概念;

(2) 综合运用公式进行三角函数式的化简、求值和证明;

(3) 周期函数的概念;

(4) 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与正弦曲线的关系.

本章的主要概念、定理和公式:

1. 主要概念:

(1) 正角、负角、零角、象限角;

(2) 1弧度的角、弧度制与角度制;

(3) 任意角的三角函数定义;

(4) 单位圆、正弦线、余弦线、正切线;

(5) 正弦曲线、余弦曲线、正切曲线;

(6) 周期函数、周期和最小正周期;

(7) 振幅、频率、相位、初相;

(8) 反正弦、反余弦、反正切.

2. 主要公式:

(1) 所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,构成集合

$S=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$ 或 $S=\{\beta|\beta=2k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$

(2) 角度与弧度的互化公式：

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.01745\ \text{rad}.$$

$$1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'$$

(3) 弧长公式：$l=|\alpha|\cdot r$(其中 l 是以角 α 为圆心角时所对弧的长，r 是圆的半径)

(4) 扇形的面积公式：$S=\frac{1}{2}lR$(其中 l 是扇形的弧长，R 是圆的半径)

(5) 同角三角函数的基本关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

(6) 诱导公式：

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\alpha+k\cdot 360°)=\sin\alpha\\&\cos(\alpha+k\cdot 360°)=\cos\alpha\\&\tan(\alpha+k\cdot 360°)=\tan\alpha\\&\quad\text{其中 } k\in\mathbf{Z}\end{aligned}\right\}\text{(公式一)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha\\&\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha\end{aligned}\right\}\text{(公式二)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\&\cos(-\alpha)=\cos\alpha\end{aligned}\right\}\text{(公式三)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha\\&\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha\end{aligned}\right\}\text{(公式四)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha\\&\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha\end{aligned}\right\}\text{(公式五)}$$

以及 $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$，

$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$.

注意

①当 α 角以弧度给出时，以上公式中的 $360°$，$180°$ 和 $90°$ 相应换为 2π，π 和 $\frac{\pi}{2}$.

②(公式一)～(公式五)可以概括为：$\alpha+k\cdot 360°\ (k\in\mathbf{Z})$，$180°+\alpha$，$-\alpha$，$180°-\alpha$，$360°-\alpha$ 的三角函数值，等于 α 的同名函数值.前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.

(7) 平面内 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点间的距离公式：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(8) 两角和与差的正弦、余弦、正切：

$$\left.\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ (C_{(\alpha+\beta)})\\&\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ (S_{(\alpha+\beta)})\\&\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad(T_{(\alpha+\beta)})\end{aligned}\right\}\text{和角公式}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ (C_{(\alpha-\beta)})\\&\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ (S_{(\alpha-\beta)})\\&\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad(T_{(\alpha-\beta)})\end{aligned}\right\}\text{差角公式}$$

(9) 二倍角的正弦、余弦、正切：

$$\left.\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\\&\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}\right\}\text{倍角公式}$$

(10) 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$ 及函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$(其中 A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0,\omega>0$)的周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，$\omega x+\varphi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$(其中 A,ω,φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$)的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$.

基础例说·基本训练

JICHULISHUO JIBENXUNLIAN

4.1 角的概念的推广

课时 1

例说

例 1 写出下列角的集合：

(1) 锐角；

(2) 0°到 90°的角；

(3) 小于 90°的角；

(4) 第一象限的角.

解 (1) $\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$；

(2) $\{\alpha|0°\leqslant\alpha\leqslant 90°\}$；

(3) $\{\alpha|\alpha<90°\}$；

(4) $\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°, k\in\mathbf{Z}\}$.

注意

这四种角既有联系又有区别，如锐角是小于 90°的角，但小于 90°的角不一定是锐角，还包含零角和负角.

例 2 终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的所有角的集合是________；此集合中在 −180°到 180°间的角是________.

解 终边在 $y=\sqrt{3}x$ 上的角的集合是

$\{\alpha|\alpha=60°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

$\cup\{\alpha|\alpha=60°+180°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=60°+2k\cdot 180°, k\in\mathbf{Z}\}$

$\cup\{\alpha|\alpha=60°+(2k+1)\cdot 180°, k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha|\alpha=60°+n\cdot 180°, n\in\mathbf{Z}\}$,

此集合中在 −180°到 180°间的角是 60°，−120°.

注意

$y=\sqrt{3}x$ 是通过原点的一条直线，以它为终边的所有角由两部分组成，一部分以直线在第一象限内的部分为终边，另一部分则以它的反向延长线为终边.

例 3 求在 −720°到 720°间与 −1 050°角终边相同的角.

解 与 −1 050°角终边相同的角可表示为 $\{\alpha|\alpha=-1\,050°+k\cdot 360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

由题意得

$-720°\leqslant -1\,050°+k\cdot 360°<720°$，

解得 $\frac{11}{12}\leqslant k<4\frac{11}{12}$.

∵ $k\in\mathbf{Z}$，∴ $k=1,2,3,4$.

将 $k=1,2,3,4$ 依次代入 $-1\,050°+k\cdot 360°$，得所求角为 −690°，−330°，30°，390°.

注意

欲求在某一范围内与 α 角终边相同的角，实质就是确定 k 应取的值.

训练

A 组

1. 与 −456°终边相同的角表示为(　　)

(A) $k\cdot 360°+456°$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(B) $k\cdot 360°+96°$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(C) $k\cdot 360°+264°$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(D) $k\cdot 360°-264°$ $(k\in\mathbf{Z})$.

2. 若角 α 与 β 终边重合，则有(　　)

(A) $\alpha=\beta$.

(B) $\alpha+\beta=180°$.

(C) $\alpha-\beta=k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

(D) $\alpha+\beta=k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

3. 设$A=\{$钝角$\}$，$B=\{$小于 180° 的角$\}$，$C=\{$第二象限角$\}$，$D=\{$大于 90° 而小于 180° 的角$\}$，则下列等式一定成立的是(　　)

(A) $A=C$.　　(B) $A=B$.

(C) $C=D$.　　(D) $A=D$.

4. 下列命题正确的是(　　)

(A) 第一象限角都是锐角.

(B) 终边相同的角一定相等.

(C) 相等的角终边位置相同.

(D) 不相等的角终边位置一定不同.

5. 在 160°，480°，-960°，$-1\,600^\circ$ 这四个角中，是第二象限角的是__________.

6. 写出与角 15° 终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-1\,080^\circ\leqslant\beta<-360^\circ$ 的元素 β 求出来.

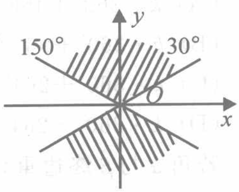
B　组

7. 时钟走过 2 时 15 分，则分针所转过的角的度数为________，时针所经过的角的度数为________.

8. 若 $90^\circ<\beta<\alpha<135^\circ$，则 $\alpha-\beta$ 的范围是______________，$\alpha+\beta$ 的范围是______________.

9. 求终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合.

10. 已知角 α 的终边在如图所示阴影所表示的区域内(含边界)，求角 α 的集合.



(第 10 题)

11. 若角 β 的终边经过点 $Q(-1,-\sqrt{3})$，试写出角 β 的集合 M，并求出 M 中绝对值最小的角.

12. 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度是多少？

课时 2

例说

例 4　写出下列集合中适合不等式 $0^\circ\leqslant\beta<360^\circ$ 的元素 β，并判断它们是哪个象限的角.

(1) $S=\{\beta\mid\beta=45^\circ+(2k+1)\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $M=\{\beta\mid\beta=120^\circ+k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $N=\{\beta\mid\beta=k\cdot 90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

分析　上述角的表述，不是一个角与整数个周角和的一般形式，但逐一赋予 k 以恰当的值，还是可以确定角及其所在的象限.

解　(1) $S=\{\beta\mid\beta=45^\circ+(2k+1)\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$
$=\{\beta\mid\beta=225^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，

S 中适合 $0^\circ\leqslant\beta<360^\circ$ 的元素是

$225^\circ+0\times 360^\circ=225^\circ$，它是第三象限的角.

(2) M 中适合 $0^\circ\leqslant\beta<360^\circ$ 的元素是 $120^\circ+0\times 180^\circ=120^\circ$，$120^\circ+1\times 180^\circ=300^\circ$，

它们分别是第二、第四象限的角.

(3) N 中适合 $0^\circ\leqslant\beta<360^\circ$ 的元素是

0°，90°，180°，270°，它们是终边在坐标轴上的角.

注意

终边在坐标轴上的角的集合 $S=\{\beta|\beta=k\cdot 90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，终边在 x 轴上的角的集合 $S_1=\{\beta|\beta=k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，终边在 y 轴上的角的集合 $S_2=\{\beta|\beta=90^\circ+k\cdot 180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$. 易证 $S=S_1\cup S_2$.

例 5 若集合 $A=\{\alpha|k\cdot 180^\circ+30^\circ<\alpha<k\cdot 180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{\beta|k\cdot 360^\circ-45^\circ<\beta<k\cdot 360^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$.

分析 求两个角集合的交集，可以在直角坐标平面内，分别画出集合 A 和集合 B 中角的终边所在的区域(如图 4－1)，终边在这两个区域公共部分内的角的集合，就是 $A\cap B$.

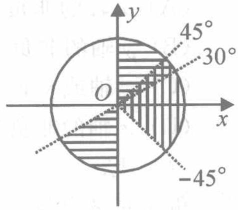


图 4－1

解 集合 A 中的角的终边在横线所表示的阴影内，集合 B 中的角的终边在竖线所表示的阴影内，因此集合 $A\cap B$ 中的角的终边在这两部分阴影的重叠部分内. 故

$A\cap B=\{\alpha\mid 30^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<45^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

注意

借助于数学式子所反映的几何意义，利用图形的直观性来解题，是学习三角函数时经常采用的一种方法.

例 6 已知 α 是第二象限角，那么 $2\alpha,\frac{\alpha}{2}$ 和 $\frac{\alpha}{3}$ 各是第几象限的角？

分析 由 α 是第二象限角，得 $90^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，从而得出 $2\alpha,\frac{\alpha}{2}$ 和 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围，再推出其所在象限.

解 ∵ α 是第二象限角，

∴ $90^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot 360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴ $180^\circ+2k\cdot 360^\circ<2\alpha<360^\circ+2k\cdot 360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，

∴ 2α 为第三或第四象限角或终边落在 y 轴的负半轴上.

又由 $45^\circ+k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+k\cdot 180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 k 为偶数，即 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时，$45^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+n\cdot 360^\circ,n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角，且位于第一象限角平分线与 y 轴正半轴所围成的区域内(如图4－2，不包含边界).

当 k 为奇数，即 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时，$225^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<270^\circ+n\cdot 360^\circ,n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角，且位于第三象限的角平分线与 y 轴负半轴所围成的区域内(如图 4－2，不包含边界).

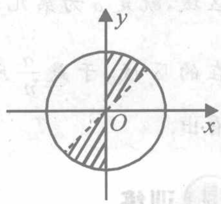


图 4－2

仿以上解法，可进一步推导出各个象限角的半角范围如图 4－3 所示，图中标号 1，2，3，4 所在区域分别表示第一，二，三，四象限角的半角范围.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

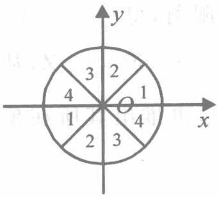


图 4－3

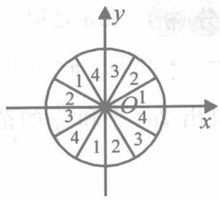


图 4－4

依次类推，如图 4－4 所示，当 α 是第二象限角时，$\frac{\alpha}{3}\in(30^\circ+k\cdot360^\circ,60^\circ+k\cdot360^\circ)\cup(150^\circ+k\cdot360^\circ,180^\circ+k\cdot360^\circ)\cup(270^\circ+k\cdot360^\circ,300^\circ+k\cdot360^\circ)$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\frac{\alpha}{3}$ 为第一，第二或第四象限角.

注意

一般地，要确定 $\frac{\alpha}{n}$ 所在的象限，可以作出 n 等分各个象限的从原点出发的射线，它们与坐标轴把周角分成 $4n$ 个区域. 从 x 轴的正半轴起，按逆时针方向将这 $4n$ 个区域依次重复标上 1，2，3，4，则标号是 n 的区域，就是 α 为第几象限的角时，$\frac{\alpha}{n}$ 终边所在的区域，于是 $\frac{\alpha}{n}$ 所在象限即可直观地看出.

训练

A 组

13. 若角 α 与 β 的终边关于原点对称，那么(　　)
(A) $\alpha-\beta=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.
(B) $\alpha+\beta=180^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.
(C) $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.
(D) $\alpha-\beta=180^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$.

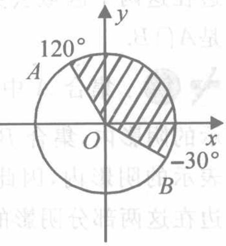
14. 若 α 是第三象限角，则 $180^\circ-\alpha$ 是(　　)
(A) 第一象限角.　(B) 第二象限角.
(C) 第三象限角.　(D) 第四象限角.

15. 若 $0^\circ<\alpha<360^\circ$，且 6α 的终边与 x 轴的非负半轴重合，则这样的角有(　　)
(A) 2 个.　(B) 3 个.
(C) 4 个.　(D) 5 个.

16. 集合 $M=\{\alpha\mid\alpha=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$ 中各角的终边都在(　　)
(A) x 轴的非负半轴上.
(B) y 轴的非负半轴上.
(C) x 轴或 y 轴上.
(D) x 轴的非负半轴或 y 轴的非负半轴上.

17. 角 α 的终边与 -40° 角的终边相互垂直，则角 α 的集合可表示为______.

18. 如图所示，终边落在 OA 和 OB 位置时，角的集合分别为________，________. 终边落在图示阴影部分（包括边界）和非阴影部分（不包括边界）时，角的集合分别为________，________.



（第 18 题）

B 组

19. 已知角 α 和 β 的终边相同，那么 $\alpha-\beta$ 的终边在(　　)
(A) x 轴的非负半轴上.
(B) y 轴的非负半轴上.
(C) x 轴的非正半轴上.

(D) y 轴的非正半轴上.

20. 集合 $M=\{x\mid x=k\cdot 90°\pm 45°,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=k\cdot 45°,k\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是(　　)

(A) $M\subsetneqq N$.　　(B) $M\supsetneqq N$.

(C) $M=N$.　　(D) $M\cap N=\varnothing$.

21. 设角 α 的终边与 $240°$ 角的终边关于 y 轴对称，$\beta=\frac{\alpha}{2}$，且 β 在 $360°\sim 720°$ 之间，求 β.

22. 将时钟上的时针作为角的始边，分针作为终边，求 8 点 5 分时，时针与分针所成的角度.

23. 若 α 是第一象限角，求 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角.

24. 已知集合 $M=\{x\mid 60°+k\cdot 180°\leqslant x<90°+k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$

$N=\{x\mid 45°+k\cdot 360°<x\leqslant 135°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，求 $M\cap N$.

4.2 弧度制

课时 1

例说

例 1 用弧度制将终边落在如图 4－5 所示阴影部分(包含边界)的角用集合表示出来.

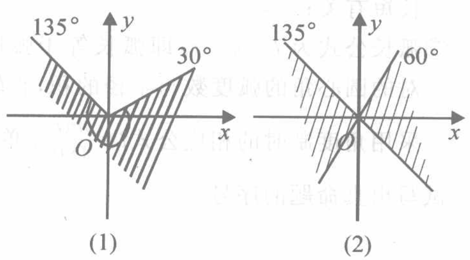


图 4－5

解 (1) ∵ $135°$ 与 $-225°$ 终边相同，$-225°=-\frac{5}{4}\pi$，$30°=\frac{\pi}{6}$，

∴ 该阴影部分可用集合表示为

$\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi-\frac{5}{4}\pi\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) ∵ 阴影的左边和右边部分(含边界)可用集合分别表示为 $S_1=\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\frac{3}{4}\pi\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{4}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ 和 $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

∴ 整个阴影部分(含边界)可表示为 $S_1\cup S_2$. 而 $S_1=\left\{\alpha\,\middle|\,(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

∴ $S_1\cup S_2=\left\{\alpha\,\middle|\,n\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant n\pi+\frac{\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

注意

用集合表示这些区域，不等式中各部分单位必须统一，即根据条件统一使用弧度制或角度制，在未指明要求时可酌情选用. 其次在 $2k\pi+\theta_1\leqslant\theta\leqslant 2k\pi+\theta_2,k\in\mathbf{Z}$ 中必须有 $\theta_1<\theta_2$，如在上述(1)中不能写成 $2k\pi+\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，为此，有时需将 θ_1,θ_2 中的一个化为终边相同的角，如在(1)中将 $135°$ 化成 $-225°=-\frac{5}{4}\pi$.

例 2 已知集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\right.$

$k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则 (　　)

(A) $M=N$.　　(B) $M\supsetneqq N$.

(C) $M\subsetneqq N$.　　(D) $M\cap N=\varnothing$.

解法1　对于集合 M，由于

$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=2n$ 时，有 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$，$n\in\mathbf{Z}$.

当 $k=2n+1$ 时，有 $x=n\pi+\frac{3\pi}{4}$，$n\in\mathbf{Z}$.

这说明 M 可表示终边在各象限角平分线上的角的集合.

对于集合 N，由于 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=4n$ 时，有 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$.

当 $k=4n+1$ 时，有 $x=n\pi+\frac{3\pi}{4}$，$n\in\mathbf{Z}$.

当 $k=4n+2$ 时，有 $x=n\pi+\pi$，$n\in\mathbf{Z}$.

当 $k=4n+3$ 时，有 $x=n\pi+\frac{5\pi}{4}$，$n\in\mathbf{Z}$.

这说明 N 可表示终边在各象限角平分线和坐标轴上的角的集合.

$\therefore$ $M\subsetneqq N$，故正确选项是(C).

解法2　如图4-6所示，数轴上的点表示集合 M，数轴上方的小圈点表示集合 N，显然有 $M\subsetneqq N$.

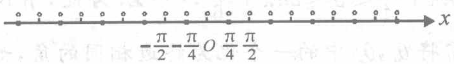


图 4-6

例3　在1点 20 分时，时钟的时针和分针所成的角 θ 是多少弧度？($0\leqslant\theta<2\pi$)

分析　时针的刻度把圆周 12 等分，而分针的刻度把圆周 60 等分.

解　时钟相邻的两个刻度间的夹角是 $\frac{2}{12}\pi=\frac{\pi}{6}$，所以刻度 12 与 4 间的夹角为 $\frac{4}{6}\pi=\frac{2\pi}{3}$，而时针应在 1 与 2 之间靠近 1 的 $\frac{1}{3}$ 的位置上，即时针与 12 间的夹角为 $1\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{2}{9}\pi$. 于是在 1 点 20 分时，时钟的时针和分针所成的角 $\theta=\frac{2}{3}\pi-\frac{2}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$.

训练

A　组

1. 有下列命题：

①一弧度是长度为半径的弧；

②弧度是角的一种度量单位，长度等于半径的弧所对的圆心角叫做一弧度的角；

③一度的角是周角的 $\frac{1}{360}$，一弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$；

④与用角度制度量角不同，用弧度制度量角则与以该角作为圆心角的圆的半径长短有关；

⑤弧长公式为 $l=\alpha\cdot r$. 即弧长等于弧所对的圆心角的弧度数与半径的积，它较采用角度制时的相应公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$ 简单.

试写出真命题的序号____________.

2. 将角度化为弧度填入表内：

角　度	弧　度
0°	
15°	
30°	
45°	
60°	
75°	
90°	
120°	
135°	
150°	
180°	
210°	
225°	
240°	
270°	
300°	
315°	
330°	
360°	

3. $\frac{8}{5}\pi=$________度；

$-\frac{5}{3}\pi=$________度；

$-75°=$________ rad；

$-380°=$________ rad；

$-1\ 485°=$________ rad；

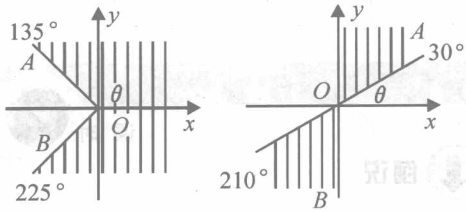
$\frac{27}{4}\pi=$________度.

4. 若一圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长，则其圆心角的弧度数是（　　）

(A) $\frac{\pi}{3}$.　　(B) $\frac{2\pi}{3}$.

(C) $\sqrt{3}$.　　(D) 2.

5. 用弧度表示终边落在如图所示阴影部分（包含边界）内的角的集合.



（第 5 题）

6. 半径为 0.7 m 的飞轮，每时按逆时针方向旋转 24 000 转，求：

(1) 飞轮每 1 s 转过的弧度数；

(2) 轮周上一点每 1 s 所转过的弧长；

(3) 轮周上一点转动 2 000° 所经过的弧长.

B　组

7. 已知集合 $Q=\left\{x \middle| x=\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$，下列集合中，与 Q 相等的是（　　）

(A) $\left\{x \middle| x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$.

(B) $\left\{x \middle| x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$.

(C) $\left\{x \middle| x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$.

(D) $\left\{x \middle| x=k\pi \text{ 或 } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$.

8. 已知 2 弧度的圆心角所对的弦长为 2，那么这个圆心角所对的弧长是（　　）

(A) 2.　　(B) $\sin 2$.

(C) $\dfrac{2}{\sin 1}$.　　(D) $2\sin 1$.

9. 求 6 点 45 分时,时钟的时针和分针所成的角 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$.

10. 已知集合 $M=\left\{x \middle| k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$, $N=\{x|x^2-4\leqslant 0\}$,求 $M\cap N$.

课时 2

例说

例 4 已知 $\dfrac{\pi}{3}<\alpha+\beta<\dfrac{4\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}<\alpha-\beta<-\dfrac{\pi}{3}$,求 $2\alpha-\beta$ 的范围,并指出它所在的象限.

解 设 $2\alpha-\beta=m(\alpha+\beta)+n(\alpha-\beta)$,则有

$$2\alpha-\beta=(m+n)\alpha+(m-n)\beta.$$

由此得 $\begin{cases}m+n=2,\\ m-n=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{2},\\ n=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

$\therefore\ 2\alpha-\beta=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\dfrac{3}{2}(\alpha-\beta)$.

由已知推得 $\dfrac{1}{6}\pi<\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)<\dfrac{2\pi}{3}$,

$-\pi<\dfrac{3}{2}(\alpha-\beta)<-\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore\ -\dfrac{5}{6}\pi<\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\dfrac{3}{2}(\alpha-\beta)<\dfrac{\pi}{6}$,

即 $-\dfrac{5}{6}\pi<2\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{6}$.

$\therefore$ $2\alpha-\beta$ 是第一、三、四象限或终边在 y 轴非正半轴或 x 轴非负半轴上.

注意

设 $2\alpha-\beta=m(\alpha+\beta)+n(\alpha-\beta)$,求 m,n 这是待定系数法的一种运用(将 m,n 视为 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha-\beta$ 的系数).还可用以下方法:

$\because\ \alpha=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

$\beta=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

$\therefore\ 2\alpha-\beta=[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]-\dfrac{1}{2}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\dfrac{3}{2}(\alpha-\beta)$.

例 5 已知扇形的面积为 S,当扇形的中心角为多少弧度时,扇形的周长最小?试求出此最小值.

分析 将扇形的周长表示为半径 r 的函数,转化为求函数的最小值问题.

解 由扇形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}lr$,得 $l=\dfrac{2S}{r}$.

设扇形周长为 C. 则 $C=2r+l=2r+\dfrac{2S}{r}$,

即 $2r^2-Cr+2S=0(*)$.

由题意 r 必存在,故方程$(*)$必有解.

因此有 $\Delta=C^2-16S\geqslant 0$,即 $C\geqslant 4\sqrt{S}$.

$\therefore$ 周长 C 的最小值为 $4\sqrt{S}$,代入$(*)$有 $2r^2-4\sqrt{S}r+2S=0$,得 $r=\sqrt{S}$.

又由 $S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$,

得 $|\alpha|=\dfrac{2S}{r^2}=2$ rad.

所以当扇形的中心角为 2 rad 时,扇形的周长最小,最小值为 $4\sqrt{S}$.

注意

也可将扇形周长表示为弧长 l 的函数来求解，不妨一试.

例 6 设半径为12 cm，弧长为 4π cm 的弧所对圆心角为 α，$\alpha\in(0,2\pi)$. 求出与角 α 终边相同的角的集合 A，并判断 A 是否为 $B=\left\{\theta\middle|\theta=\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 的真子集.

分析 利用弧长公式求出 α，然后写出与 α 终边相同的角的集合 A，再根据真子集的定义作出判断.

解 由 $|\alpha|=\frac{l}{r}$，得 $\alpha=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}\in(0,2\pi)$，

∴ 与 α 终边相同的角的集合 $A=\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

又∵ $B=\left\{\theta\middle|\theta=\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$，令 $k=4m+1$，$m\in\mathbf{Z}$，则 $\theta=\frac{1}{2}(4m+1)\pi-\frac{\pi}{6}=2m\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=2m\pi+\frac{\pi}{3}$，$m\in\mathbf{Z}$.

∴ $A\subseteq B$，即 A 是 B 的子集.

取 $\theta_0=-\frac{\pi}{6}\in B$，显然 $\theta_0\notin A$，

∴ $A\subsetneqq B$，即 A 为 B 的真子集.

训练

A 组

11. 与 $-\frac{13}{6}\pi$ 的终边相同的角的集合是 (　　)

(A) $\left\{\theta\middle|\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(B) $\left\{\theta\middle|\theta=\frac{10}{6}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(C) $\left\{\theta\middle|\theta=\frac{11}{6}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(D) $\left\{\theta\middle|\theta=-\frac{7}{6}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

12. 终边在直线 $y=x$ 上的角的集合是 (　　)

(A) $\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(B) $\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{3}{4}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(C) $\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(D) $\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

13. 集合 $\left\{\beta\middle|\beta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{5},k\in\mathbf{Z}\right\}\cap\{\beta|-\pi<\beta<\pi\}=$ ________________________.

14. 先在 $(0,2\pi)$ 内求出与下列各角终边相同以弧度表示的角 θ，再写出与 θ 终边相同的角的集合.

(1) $-30°$；(2) $1\ 460°$；(3) -5π.

15. 设两角的差为 $1°$，两角的和为 1 弧度，则这两个角各为多少弧度？

16. 已知一个扇形半径为 5 cm，圆心角为 1.3 弧度，求这个扇形的弧长和面积.

B 组

17. $\alpha=1$，$\beta=45°$，$\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\delta=-\frac{\pi}{3}$，试比较这四个角的大小.

18. 设 $\frac{\pi}{3}<\alpha+\beta<\frac{4}{3}\pi$，$-\frac{2}{3}\pi<\alpha-\beta<-\frac{\pi}{3}$，求 $2\alpha-3\beta$ 的范围.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com