数学问答

第 1 辑

上海人民出版社

数 学 问 答

第 一 辑

施 树 群 编

上海人民出版社

数 学 问 答

第 一 辑

施 树 群 编

上海人民出版社出版

（上海绍兴路5号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 4.875　字数 105,000

1973年12月第1版　1973年12月第1次印刷

印数 1—100,000

统一书号：13171·63　　定价：0.30元

目　录

1. 点和数是建立怎样的对应关系？

我们在中小学数学里，已经接触到了一系列"数"和"形"的问题．应当指出，"数"和"形"是存在于客观事物中的两个不同侧面，两者之间存在着内在的、不可分割的联系．

从数学发展的历史来看，对"数"的认识与对"形"的认识之间，常常是互相渗透、互相促进的．例如，最初人们测量长度，先是把一个"标准长度"依次相接地放到被测量的对象上去，再"数一数"放了几次．这里既是"数"的问题，又是"形"的问题．后来，为了对"数"和"形"分别作比较深入的研究，于是"几何"和"算术"被分了开来，又形成了"代数"等分科．但是，在"数"和"形"发展过程中，又常常是相互联系、相互促进的，例如"三角学"就是在"数""形"结合的实践活动中发展起来的．

在我们今天的中小学数学中，也经常碰到用"数"以精确地刻划"形"，用"形"以直观地表示"数"的情形．例如，各种简单图形的面积和体积的计算，三角形边角关系的定量研究等，都是说明用"数"刻划"形"的．反之，因为事物的数量关系有时比较抽象，较难以理解和把握，因而也常常要借助于"形"的直观表示．例如小学生开始做加减法要借助于手指头，理解分数概念可借助于图形，多项式的乘法公式

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

也可借助于图形面积之间的直观形象来得到说明．

人们在认识"数"与"形"的长期实践中，终于出现了坐标

系. 坐标系建立了“点”与“数”之间的对应关系，给出了“数”和“形”结合的一种重要形式. 在坐标系里,与常数对应的,是确定的点;而与变数对应的，是动点. 这样，运用坐标方法不仅可以用来画图、确定位置，而更重要的是，对于变数反映运动来说,坐标系也有着重要的作用.

我们在中学一年级数学课程中学过的“数轴”，正是最简单的、最基本的坐标系,称为“一维坐标系”. 无论是平面上的直角坐标系、极坐标系,或是空间的直角坐标系、柱面坐标系、球面坐标系,都要以数轴作为基础. 我们知道,数轴就是具有原点和单位长度的有向直线，它建立了数和直线上的点之间的一一对应关系.

那末，和直线上的点一一对应的数，究竟包括哪一些数呢？在数与点之间,建立怎样的对应关系呢?

首先,如果和直线上的点对应的数仅仅是全体整数:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots$$

那末,这些点在数轴上是分布得很“稀疏”的(图 1). 因此,固然每一个整数可以用数轴上的一个点来表示，但并非数轴上的每一个点都代表整数. 这样的对应关系，只有我们在小学数学的“统计图”中用到过,它只能反映极简单的“形”.

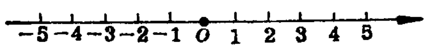

图 1

如果把和直线上的点对应的数,扩大到全体有理数,情况就不同了. 对于任意两个不同的有理数 a 与 b(设 $a<b$)，总存在有理数 r 介于它们之间: $a<r<b$，譬如取 $r=\dfrac{a+b}{2}$ 即是. 由此可以推出:任意两个不同的有理数之间,存在着无限

多个有理数．这就是所谓有理数的“稠密性”．反映到数轴上，就是全体有理数在数轴上的对应点，是“无限密布”的．

既然全体有理数在数轴上的对应点是无限密布的，那末我们能不能在全体有理数和数轴上的点之间建立“一一对应”关系呢？也就是下面三个条件是否都成立：

（1）每一个有理数，都对应了数轴上的一个点；

（2）不同的有理数，对应了数轴上的不同的点；

（3）对于数轴上的每一个点，都是某一个有理数的对应点．

当然，上面的第(3)点是不成立的，数轴上的每一个点并不是都表示有理数．下面通过几个简单的例子来加以说明．

在数轴上作一个边长为 1 的正方形，并截取 OA 等于这个正方形对角线的长(图 2)，那末数轴上的点 A 就不可能是任何一个有理数的对应点．因为，根据勾股定理，边长为 1 的正方形中，对角线的长等于$\sqrt{2}$．但$\sqrt{2}$不是有理数(这一点我们在中学数学课里曾提到过，也可采用反证法加以证明)，所以数轴上的点 A 就不能是某一个有理数的对应点．容易想象，数轴上这样的点是很多的，例如$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$……都不是有理数，$\sqrt{2}+1$、$3\sqrt{2}$、$\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$……也都不是有理数，但它们在数轴上都有其对应的点．

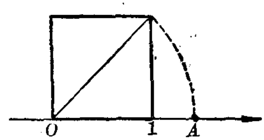

图 2

如果有理数的全体，再加上一切类似上述用不尽方根表示的数，这样能不能和数轴上的点建立起一一对应呢？还是不能．例如直径为 1 的圆(图 3)，我们把它看成是可以展开的，如把这圆周在点 O 剪断，并拉直放

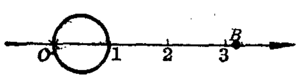

图 3

到数轴上．这样，端点B所对应的数同样不是有理数，但它并不是用不尽方根表示的数．

这就是说，还有一些数，如π、$\sin 23^\circ$、$\lg 3$、e 以及上述这些形式都包括不了的种种非有理数，在数轴上也有它们对应的点．事实上，数轴上的诸如上述种种不是有理数的数，都可以表示成无限不循环小数的形式．我们把这样的数，称为“无理数”．在数轴上对应有理数的点称为有理点，而把数轴上不是对应有理数的点称为无理点．

有理数和无理数统称为“实数”．既然无理数把所有的无限不循环小数都包括进来了，我们便不再可能象上面那样，在数轴上找到一个点没有某一实数和它对应．这样，数轴上的点和实数全体之间，是可以建立起一一对应关系了．也就是说，实数和数轴上的点之间，能够相互表示．正由于实数是在有理数的基础上又把所有的无限不循环小数都包括进来了，它和有理数的稠密性有了本质的不同，我们把实数的这种特性称为实数的连续性．从上面的例子中看出，即使象边长为1的正方形的对角线、直径为1的圆的周长这样简单的“形”，在有理数范围内还反映不了．这就说明，客观现实世界中的数量，大量的是在实数范围内存在和变化的．

如果把直线推广到平面，那末数轴就推广到“平面直角坐标系”(或者其他形式的二维坐标系)．在这样的坐标系里，就可使平面上的所有点与全体有序实数对(x,y)之间，建立一一对应关系．基于这种对应关系，就可进一步把平面上的某一个图形(曲线)和某一个含x、y的代数式建立起对应关系．这样，一方面可采用代数或解析的方法，通过研究代数式或解析式的属性，来获得与它相应的图形的性质．在“解析几何”里，就是采用代数的方法来研究直线和圆锥曲线等图形性质的．

另一方面，也可以从对图形性质的研究，来促使某些数量关系问题的解决，例如研究拓扑学中的问题，推动了代数学（主要是群论）的发展；又如借助于图形的研究，来获得高次代数方程的近似解；甚至有些数量关系，可以由图象表示出来.

从上面的讨论，可以看出：坐标系给出了“数”“形”结合的一种重要方法，它是以数轴上的点和实数“一一对应”为基础的. 有了坐标系这一工具，为对客观世界“数”、“形”问题的深入研究创造了条件.

2. 无理数能通过两个整数相除得到吗？

在上面“点和数是建立怎样的对应关系？”一文中，我们已经讲到：数轴上不仅有表示有理数的点，而且有表示无理数的点．无理数是指一切无限不循环小数，它可以是不尽方根的形式，如$\sqrt{2}$等，也可以是π、$\sin 23°$、$\lg 3$、e之类，当然，也有些无理数是上述诸种形式都包括不了的．那末，如果两个整数相除，会不会一直除不尽，得到的商数会是无限不循环小数？

这里先来看几个例子：

$$493 \div 17 = 29,$$
$$31 \div 125 = 0.248,$$
$$5 \div 11 = 0.454545\cdots\cdots$$
$$11 \div 75 = 0.146666\cdots\cdots$$

当然，还可以再举出一些．这些例子说明了一个问题．原来两个整数相除，商数必然或是整数，或是有限小数，或是无限循环小数．那末，商数为什么不会是无限不循环小数呢？

为了说明这个问题，我们从下面的一个具体除法入手，譬如 $4 \div 21$，这里把除法的过程写成直式，并把运算过程中相应的被除数、除数、商数、余数这四者的关系式写在直式的右边．

可以看出，在下面的除法过程中，第六步得到的余数是 4，它和除法开始时的被除数相等．可以想象，这一步之后的除法过程，将和前面的过程完全一样，商数和余数都将开始循

$$
\begin{array}{rl}
\begin{array}{r}
.190476\cdots\cdots \\
21\overline{)4.000000\cdots\cdots} \\
\underline{21} \\
190 \\
\underline{189} \\
10 \\
\underline{0} \\
100 \\
\underline{84} \\
160 \\
\underline{147} \\
130 \\
\underline{126} \\
4\cdots\cdots
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\text{被除数}\quad\text{商数}\ \text{除数}\quad\text{余数} \\
4\times10=1\times21+19 \\
\\
19\times10=9\times21+1 \\
\\
1\times10=0\times21+10 \\
\\
10\times10=4\times21+16 \\
\\
16\times10=7\times21+13 \\
\\
13\times10=6\times21+4 \\
\\
4\times10=1\times21+19 \\
\cdots\cdots
\end{array}
\end{array}
$$

环．所以，除法 $4\div21$ 的商，是一个无限循环小数，记为：

$$4\div21=0.\dot{1}9047\dot{6}.$$

一般地，对于两个整数 a 和 b，$b\neq0$，不妨假设它们都是正整数①，那末除法 $a\div b$ 的过程可以用下面的式子来表示：

$$
\begin{array}{ll}
a=q_1b+r_1, & \text{式中 } 0\leqslant r_1<b,\ 0\leqslant q_1\leqslant a \\
10r_1=q_2b+r_2, & \text{式中 } 0\leqslant r_2<b,\ 0\leqslant q_2\leqslant 9 \\
10r_2=q_3b+r_3, & \text{式中 } 0\leqslant r_3<b,\ 0\leqslant q_3\leqslant 9 \\
10r_3=q_4b+r_4, & \text{式中 } 0\leqslant r_4<b,\ 0\leqslant q_4\leqslant 9 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

这里 q_1、q_2、……为除法过程中每一步所得的商数，r_1、r_2、……为每一步的余数．显然，q_1、q_2、……和 r_1、r_2、……都是非负的整数．

① 至于 a 和 b 两整数中有负整数的情况，我们可暂按正整数考虑，只须在最后结果时添上相应符号就可以了．

可以看出，上面的除法过程，必然只有如下两种可能：

(1) 在某一步，余数等于 0．譬如 $r_4=0$，那末除法的过程即到此结束①．这时，除法 $a\div b$ 的商就是一个有限小数，可以写成：

$$a\div b=q_1+0.1\times q_2+0.01\times q_3+0.001\times q_4.$$

(2) 每一步的余数都不等于 0．这时，除法的过程将无穷无尽地进行下去．而每除一步，也就有一个余数，所以所得到的余数也有无穷多个．我们知道，任一余数必然要比除数小．这里，除数 b 和各余数 r_1、r_2、……都是正整数．而小于 b 的正整数只有 $(b-1)$ 个，那末这无穷多个余数中只能取有限个数的值．譬如上例的 $4\div 21$ 中，无穷多个余数却只能取 1、2、……、20 中的一个值．所以，总有些余数取相等的值．如果第 j 步 $(j\leqslant b-1)$ 除法的余数开始和第 i $(i<j)$ 步的余数相等(即 $r_j=r_i$)，那末从这一步起，继续进行除法所得到的商和余数，将和第 i 步起的过程完全一样，循环便从此开始．并且，每进行 $(j-i)$ 步除法，就循环一次．这时，除法 $a\div b$ 的商就是一个无限循环小数．

通过对上面除法过程的分析，说明了下面的事实：两个整数相除，商数必然或是整数，或是有限小数，或是无限循环小数，绝不会是无限不循环小数．

既然两整数相除的商绝不会是无限不循环小数，所以无理数是不能表示成分数 $\dfrac{p}{q}$ 形式的(这里 p、q 都是整数，$q\neq 0$)，而可以把有理数看作能表成 $\dfrac{p}{q}$ 形式的数．

可以看出，两个有理数的和、差、积、商(除数不为零)仍是

① 如果 $r_1=0$，这时 b 整除 a，除法 $a\div b$ 的商就是一个整数，即 $a\div b=q_1$.

有理数，即在有理数范围内对这四种代数运算是封闭的．当然，实数范围内也具有这一性质．但是，对于一串有理数构成的无穷数列，如果极限存在的话，它的极限就不一定是有理数．例如，$\sqrt{2}$的精确到 1,0.1,0.01,……的不足近似值和过剩近似值所组成的两个数列是：

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots\cdots$$

$$2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, \cdots\cdots$$

可以看出，这两个有理数列的极限就不是有理数．也就是说，在这两个数列之间，越是后面的项就越接近，但无论怎样趋近，$\sqrt{2}$总是介于这两个数列之间．在这两个数列的无穷变化过程中，越来越趋近的一个无限不循环小数，即$\sqrt{2}$，就成了这两个数列极限．其实，对于任何无理数，都可以采用这样的方法，或是其他方法，通过一串有理数组成的无穷数列的极限形式来表示．这样，对于上例中的$\sqrt{2}$，就可想象成它把这两串有理数连起来了：

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots\cdots, \sqrt{2}, \cdots\cdots 1.415, 1.42, 1.5, 2.$$

也就是说，本来这两串有理数尽管可以无限趋近，但最后总有“空洞”，引进了无理数就把所有这样的“空洞”填满了，这就形象地理解了实数的连续性．

3. 开平方时，为什么要从小数点起每隔两位分节撇开？

在小学数学里，我们已经学会了平方根表的查法. 在中学数学里，我们又学会了利用对数计算尺来求一数的平方根①. 有的读者可能还会用笔算的方法对一数进行开平方. 另外，在手摇计算机上也可以进行开平方. 尽管这几种计算工具依据的原理不尽相同，但实际上总有这样的问题：一数开平方时，总是先要从小数点起每隔两位分节撇开. 这是为什么呢？

这里先来考察正整数开平方的问题. 下面分别列出最小的和最大的一位数、二位数……的平方数：

$$1^2=1, \qquad 9^2=81;$$
$$10^2=100, \qquad 99^2=9801;$$
$$100^2=10000, \qquad 999^2=998001;$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

从这里可以看出：

一位数或二位数的平方根是一位数；

三位数或四位数的平方根是二位数；

五位数或六位数的平方根是三位数；

……

因此，我们可以把一个正整数自个位起向左每隔两位分成几节，所得的节数就是这个数的平方根的整数位数. 例如求

① 为了简化叙述，本文所谈到的“平方根”，都是指正数的正平方根.

$\sqrt{784}$，从个位起每隔两位分节撇开，即 7′84，所以$\sqrt{784}$有两位整数，即：

$$10<\sqrt{784}<100.$$

这只是初步确定了$\sqrt{784}$的范围．进一步，我们作如下的分析：因为 $28^2=784$，而

$$\begin{aligned}28^2&=(20+8)^2=20^2+2\times20\times8+8^2\\&=20^2+8(2\times20+8).\end{aligned}$$

从上面的式子可以看出：$\sqrt{784}$的十位数的数字（即“2”），完全是由 7′84 的百位数所在那一节的数字（即“7”）决定的（即：$2<\sqrt{7}<2+1$）．于是：

$$20<\sqrt{784}<30,$$

这就进一步确定了$\sqrt{784}$的范围．其实，这种通过不断确定一数平方根的范围，也给出了一种简便的开方方法．

事实上，上面对 784 先进行分节：7′84，再把 784 看成是：

$$784=20^2+8(2\times20+8),$$

这正是我们通常的笔算开平方的依据．而在手摇计算机上，也和上式的道理差不多，不过这两项表现为另一种形式，它是通过累减来达到的，即：

$784-100-300$　　（反摇 2 次）

$-41-43-45-47-49-51-53-55$　（反摇 8 次）

$=0.$　　（转数记录栏得到答数 28）

这里，当手摇计算机上减去 100 和 300（即减去 20^2）后，也是两位一移的（即置数器向右移一位，移动部分向左移一位），接着才能进行下一位数字的计算．

解决了整数开平方的问题，小数开平方的问题也相应解决了．这是因为，求一个小数的平方根，可以利用求整数的平

方根的方法来计算. 例如，求$\sqrt{701.7201}$. 可以先把701.7201扩大10^4倍，成为7017201；再按照整数开平方的方法，求出$\sqrt{7017201}=2649$；然后把所得的结果缩小10^2倍，就得到26.49. 用算式来表示，就是:

$$\begin{aligned}\sqrt{701.7201}&=\sqrt{7017201\times10^{-4}}=\sqrt{7017201}\times10^{-2}\\&=2649\times10^{-2}=26.49.\end{aligned}$$

由此可知，一小数开平方时，除了须确定小数点的位置外，小数开平方的方法和整数开平方的方法是一致的. 如在上例中，整数7017201开平方时必须先进行分节：7′01′72′01. 因此，对小数701.7201开平方时进行相应的分节是7′01.72′01. 即从小数点起整数部分向左、小数部分向右，每两位用撇号分开.

这里还要说明的是，在小数开平方的运算中，对小数部分进行分节时，从小数点起向右每两位一节，如果最后一节只有一位，就要加写一个0. 例如，求$\sqrt{144.701}$. 先进行分节：1′44.70′10，即可把开平方的过程看成是:

$$\begin{CD}\boxed{\sqrt{144.701}} @>{\text{扩大 }10^2\text{ 倍}}>> \boxed{\sqrt{1447010}}\\ @| @VV{\text{开平方}}V\\ \boxed{12.02} @<{\text{缩小 }10^2\text{ 倍}}<< \boxed{1202}\end{CD}$$

所以

$$\sqrt{144.701}\approx12.02.$$

至于应用平方根表或对数计算尺时，上面讲的从小数点起每隔两位分节撇开的问题，实际上是两位两位地移动小数点，使被开方数成为表内可以查到的数(或计算尺上可以读出的数)的问题，而定位问题也就相应解决了. 例如求6084的平