21 世纪高等院校教材

高等数学

（物理类）

下 册

张国玳 徐海燕 肖瑞霞 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

高等数学

（物理类）

下册

张国玳 徐海燕 肖瑞霞 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材是根据物理类高等数学教学大纲(200 学时)编写,分为上、下两册出版.本书为下册,内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数和常微分方程.本书总结了编者长期从事高等数学教学的经验,结构严谨、逻辑清晰、难点分散、例题丰富、通俗易懂.各章配有大量与工科相结合的例题和习题,便于教师教学和学生自学使用.

本书可供理工科大学物理类、电类专业的本科生使用,还可供从事高等数学教学的教师和科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:物理类.下册/张国玳,徐海燕,肖瑞霞编.—北京:科学出版社,2007
21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-019291-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①张… ②徐… ③肖… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098157 号

责任编辑:赵 靖 杨 然 / 责任校对:李奕萱
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007 年 7 月第一次印刷 印张:41 1/4
印数:1—4 000 字数:781 000

定价:48.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

目　　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

数的基本特征是可以进行运算，而且有运算律，利用这些运算律可以把一些概念、推理变成符号的演算，然而图形之间不能进行演算.

17 世纪初法国哲学、数学家笛卡儿①创造了坐标法：建立坐标系，用有序实数组表示点的位置，用代数方程表示几何图形. 这样，便可用代数方法来研究几何问题，也可通过几何直观来说明方程的代数性质. 这种形数结合的方法开创了一门新的学科——解析几何学，它贯穿在整个高等数学中. 为学习多元函数微积分学作准备，这里介绍空间解析几何.

空间解析几何是平面解析几何的直接推广，但表示空间一点需要三个有序实数，随着空间维数的增加演算无疑要繁杂许多，不便作更深入的研究，因此，处理方式必须适当改进. 向量运算常常能更简便地解决一些几何问题，这就是向量代数在此的作用，它已成为空间解析几何的重要组成部分.

本章主要介绍坐标法、向量代数及常见的空间图形.

8.1　空间坐标系

8.1.1　空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在空间取定点 O，过 O 作三条互相垂直且有相同单位的数轴 Ox，Oy，Oz，这样就构成了空间直角坐标系，记作 $Oxyz$（图 8.1）. 其中 O 称为坐标原点，Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴分别称为横轴、纵轴和立轴，统称坐标轴，每两个坐标轴所决定的平面称为坐标面，分别称为 xy 平面、yz 平面和 zx 平面. 这三个坐标面分空间为八个部分，每一个部分称为一个卦限，其顺序是Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限在 xy 平面的上方，次序同 xy 平面上的象限，而Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限在 xy 平面下方依次对应Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限.

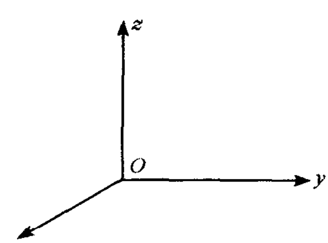

图 8.1

对于空间直角坐标系，若选取三数轴的正向符合右手法则，即右手四指自 Ox

① 笛卡儿（R. Descartes，1596～1650）.

轴正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向 Oy 轴的正向，握拳时拇指的指向就是 Oz 轴的正向，这就构成了一个空间右手直角坐标系(图 8.1). 通常，我们采用右手系.

2. 点的坐标

建立空间直角坐标系后，空间中任一点的位置可由其坐标来表示. 方法如下：

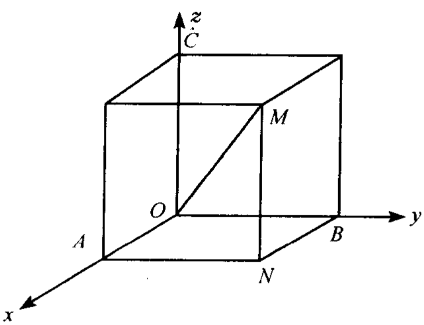

图 8.2

设 M 为空间的一点，过 M 点分别作垂直于 Ox,Oy,Oz 三轴的三个平面，与三轴的交点相应为 A,B,C(图 8.2)，设它们在各自的数轴上的坐标分别为 x,y,z. 这样，给出点 M 就唯一确定了一组有序数组(x,y,z). 反过来，任意给出有序数组(x,y,z)则在三坐标轴上可找到坐标分别为 x,y,z 的三点 A,B,C，过三点分别作坐标轴的垂面，显然，它们只有唯一交点 M. 于是，空间一点 M 与有序三数(x,y,z)建立了一一对应关系，称(x,y,z)为 M 点在此坐标系中的坐标，记作 $M(x,y,z)$. 其中，x,y,z 分别称为 M 点的 x 坐标，y 坐标，z 坐标，或称为横坐标 x，纵坐标 y，立坐标 z.

坐标原点的坐标为(0,0,0)，在坐标轴 Ox,Oy,Oz 上的点的坐标分别具有形式$(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$，在坐标面 xy,xz,yz 上的点的坐标分别具有形式$(x,y,0)$,$(x,0,z)$,$(0,y,z)$，在八个卦限中的点其坐标的符号分别为

Ⅰ(+,+,+)，　Ⅱ(−,+,+)，　Ⅲ(−,−,+)，　Ⅳ(+,−,+)，
Ⅴ(+,+,−)，　Ⅵ(−,+,−)，　Ⅶ(−,−,−)，　Ⅷ(+,−,−).

3. 有向线段在数轴上的投影

给出数轴 u，设有向线段$\overrightarrow{M_1M_2}$与 u 轴的夹角为 θ(图 8.3).

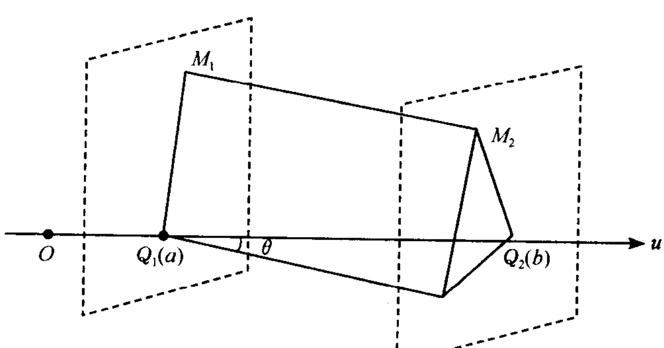

图 8.3

过 M_1, M_2 分别引轴 u 的垂线得垂足 Q_1, Q_2 分别称为点 M_1, M_2 在 u 轴上的投影.

设在数轴 u 上点 Q_1 及 Q_2 的坐标分别为 a 和 b，那么值 $Q_1Q_2=b-a$ 称为有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 u 轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{M_1M_2}$（或 $(\overrightarrow{M_1M_2})_u$），即

$$\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\ \overrightarrow{M_1M_2}=Q_1Q_2=b-a. \tag{8.1.1}$$

有向线段的投影有下列性质：

(1) $\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{M_1M_2}=|M_1M_2|\cos\theta$;

(2) $\mathrm{Prj}_{\vec{u}}(\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M_3})=\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{M_1M_2}+\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{M_2M_3}$;

(3) $\mathrm{Prj}_{\vec{u}}(\lambda\overrightarrow{M_1M_2})=\lambda\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\overrightarrow{M_1M_2}$.

例 已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 及 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，设三点 M_1, M_2, M 在一直线上且 $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$，求定比分点 M 的坐标.

解 设 $M(x,y,z)$ 则 $\overrightarrow{M_1M}$ 及 $\overrightarrow{MM_2}$ 在三条坐标轴上的投影分别为 $x-x_1, y-y_1, z-z_1$ 及 x_2-x, y_2-y, z_2-z.
依题意

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda,\quad \frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda,$$

所以定比分点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{8.1.2}$$

当 $\lambda=1$ 时，得线段 M_1M_2 中点的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right). \tag{8.1.3}$$

4. 两点间的距离

如图 8.2 所示，设 N 是点 M 在 xy 平面上的投影，利用坐标折线 $OANM$，由勾股定理得

$$\begin{aligned}|OM|^2&=|ON|^2+|NM|^2=|OA|^2+|AN|^2+|NM|^2\\&=|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2=x^2+y^2+z^2,\end{aligned}$$

所以两点 $O(0,0,0)$ 及 $M(x,y,z)$ 间的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点. 过 M_1 及 M_2 分别作平行于坐标

面的平面，这六个平面围成的长方体，其三条棱长分别为$|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$. 仍利用坐标折线，由勾股定理得两点间的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{8.1.4}$$

8.1.2　柱坐标与球坐标

确定空间中点的位置，除了直角坐标(x,y,z)外常用的还有柱坐标与球坐标. 类似于平面解析几何，我们将会看到坐标系的恰当选取，将会对问题的讨论带来方便.

1. 柱坐标系

设点 M 的直角坐标为(x,y,z)，从 M 向 xy 平面作垂线，其垂足为 N. 在 xy 平面上点 N 的极坐标为(r,θ).

规定：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$（$\theta$由$Ox$轴正向逆时针至$\overrightarrow{ON}$正向），$0\leqslant r<+\infty$，$-\infty<z<+\infty$. 则 M 点与有序数组(r,θ,z)建立了一一对应关系，称(r,θ,z)为点 M 的柱坐标，记为 $M(r,\theta,z)$.

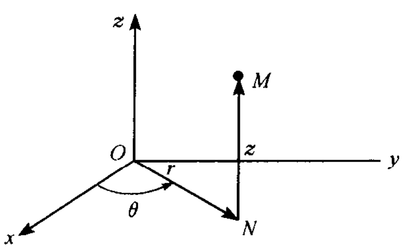

图 8.4

如图 8.4 所示，点 M 的直角坐标与柱坐标的关系为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases} \tag{8.1.5}$$

或

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}, \\ z=z. \end{cases} \tag{8.1.6}$$

在直角坐标系中，每个点 $P(x_0,y_0,z_0)$可视成三张坐标面 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$ 的交点. 同样，在柱坐标系中，每个点 $P(r_0,\theta_0,z_0)$也可视成三张坐标面 $r=r_0$，$\theta=\theta_0$，$z=z_0$ 的交点. 其中：$r=r_0$ 是以 Oz 轴为中心轴，r_0 为半径的圆柱面；$\theta=\theta_0$ 是过 Oz 轴的半平面，它与 xz 平面夹角为 θ_0；$z=z_0$ 是平行于 xy 平面的平面，它在 Oz 轴上截距为 z_0.

2. 球坐标系

设点 M 的直角坐标为(x,y,z)，从 M 点向 xy 平面作垂线其垂足为 N. 记

$|OM|=\rho$,Oz 轴正向与$\overrightarrow{OM}$正向的夹角为φ,Ox 轴正向逆时针至$\overrightarrow{ON}$正向的夹角为θ(图 8.5).

规定:$\rho\geqslant 0, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,则 M 点与有序数组(ρ,θ,φ)建立了一一对应关系,称(ρ,θ,φ)为点 M 的球坐标,记为 $M(\rho,\theta,\varphi)$.

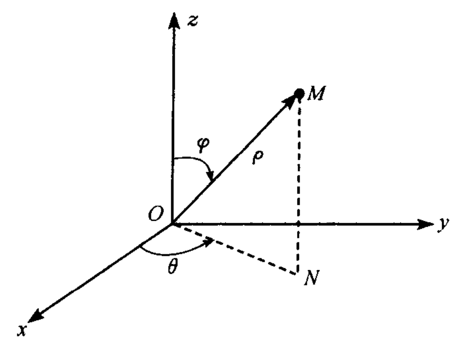

图 8.5

如图 8.5 所示,点 M 的直角坐标与球坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \tag{8.1.7}$$

或

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases} \tag{8.1.8}$$

在球坐标系中,每个点 $P(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$也可视为三张坐标面 $\rho=\rho_0, \theta=\theta_0, \varphi=\varphi_0$ 的交点. 其中,$\rho=\rho_0$ 是以 $O(0,0,0)$为中心,ρ_0 为半径的球面;$\theta=\theta_0$ 是过 Oz 轴的半平面,它与 xz 平面夹角为θ_0;$\varphi=\varphi_0$ 是以 $O(0,0,0)$为顶点,以 Oz 轴为中心轴,半顶角为 φ_0 的正圆锥面.

例如,在球坐标系中,球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的方程为 $\rho=a$. 而球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 所占有域 Ω,可用球坐标系中的不等式表示为

$$\Omega:\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ 0\leqslant\rho\leqslant a. \end{cases}$$

又如,方程 $x^2+y^2=a^2$ 在平面上表示圆周. 在空间它就表示母线平行于 z 轴的圆柱面. 在柱坐标系中,圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 的方程为 $r=a$. 而圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 且$|z|\leqslant b$ 所占有域Ω,可用柱坐标系中的不等式表示为

$$\Omega:\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ 0\leqslant r\leqslant a, \\ -b\leqslant z\leqslant b. \end{cases}$$

习　题　8.1

1. 在空间直角坐标系中，找出下列点的位置：$A(1,2,3)$，$B(3,4,0)$，$C(2,0,0)$，$D(-2,-2,-3)$，$E(2,-2,3)$.

2. 求点 $P(x,y,z)$关于各坐标面和各坐标轴的对称点的坐标.

3. 给出点 $A(2,3,4)$，$B(2,-2,4)$.

(1) 若$\overrightarrow{AB}$与 $\vec{u}$ 夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，求 $\mathrm{Prj}_{\vec{u}}\,\overrightarrow{AB}$；

(2) 求 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{Oy}}\overrightarrow{AB}$及 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{Oz}}\overrightarrow{AB}$.

4. 已知 $A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$求 xy 平面分线段 AB 之比，并求分点坐标.

5. 求点 $P(x,y,z)$在 xy 平面上投影点的坐标和在 Oy 轴上投影点的坐标.

6. 求证点 $A(-3,2,-7)$，$B(2,2,-3)$，$C(-3,6,-2)$是等腰三角形的三个顶点，求此三角形的重心.

7. 给出两点 $A(0,1,2)$及 $B(-4,1,3)$.

(1) 求点 A 到原点、到各坐标轴、到各坐标面的距离；

(2) 在 Oz 轴上求一点，使它到 A，B 等距离；

(3) 求到 A，B 等距离的点的轨迹.

8. 求到 Oz 轴的距离与到 xy 平面距离之比为 2 的点的轨迹方程.

8.2　向 量 代 数

本节主要研究向量的代数运算.

8.2.1　向量概念

在实际问题中，有些量只有大小，如质量、密度、温度、时间等，它们在取定一个单位后，可以用一个数来表示. 这种量称为数量，也称为标量或纯量. 还有一些量既有大小，又有方向，如力、位移、速度、加速度等，这种量称为向量，也称为矢量.

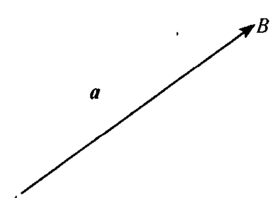

图 8.6

几何上，用空间的一个有向线段表示向量(图 8.6). 在长度单位选定后，这个有向线段的长度代表向量的大小，其方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量，记为$\overrightarrow{AB}$. 有时也用粗体字母或用一个上面加箭头的字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$ 等.

以坐标原点 O 为起点，点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 的向径(也称矢径)，记为 $\vec{r}$，即

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}.$$

向量的大小叫做向量的模，记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$或$|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 与非零向量 $\vec{a}$ 同向的单位向量记为$\vec{a}^0$. 模等于零的向量叫做**零向量**，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的. $\vec{0}$ 在图形上退缩为一点.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 它们大小相等，且方向相同，我们就说它们**相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，这就是说，经过平移后能完全重合的向量是相等的.

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关(称这种向量为自由向量)，数学上，我们只研究自由向量.

与 $\boldsymbol{a}$ 模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$. 依向量相等的定义有

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}.$$

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量**平行**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 可以认为 $\mathbf{0}$ 与任何向量都平行.

若一组向量平行于同一条直线，则称它们是**共线的**. 平行向量是共线向量. 而平行于同一平面的向量称为**共面向量**.

8.2.2 向量的加法与数乘

1. 加法

力是向量的物理原型，力的合成遵循平行四边形法则，因此，向量的加法也应遵循同样的法则.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为边作一平行四边形 $ABCD$(图 8.7)，则对角线向量$\overrightarrow{AC}\triangleq\boldsymbol{c}$ 即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种作向量之和的方法叫做向量相加的平行四边形法则.

在图 8.7 中，有$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，由此可知，若将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量$\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 这一法则叫做三角形法则.

向量加法可以推广到任意有限个向量的情形. 这只需将第一个向量放置好，然后将其余向量依次首尾相接，则以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点的向量即为这些向量的和(图 8.8).

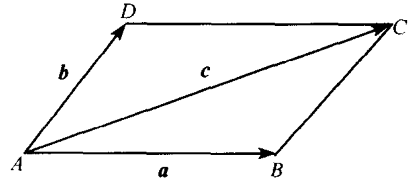

图 8.7

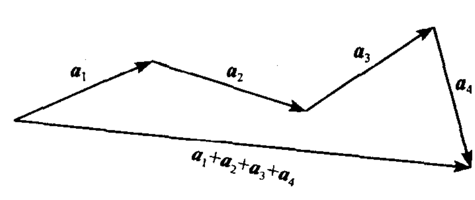

图 8.8

由上述法则知向量加法满足：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律)；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

2. 减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

从图 8.7 可以看出 $\overrightarrow{DB}=(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由三角形两边之和大于第三边的原理知：任意两个向量之间，满足三角不等式，即有

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

又，由于

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,$$
$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|,$$

故有

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \tag{8.2.1}$$

3. 数乘

定义　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 其大小等于数 λ 的绝对值与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的乘积，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 其方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 规定 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

向量的数乘遵循下列运算规律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$(结合律)；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(向量与数的分配律)；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(数与向量的分配律).

这里 λ,μ 为任意实数，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为任意向量. 前两个规律可从数乘定义推得，第三个规律可以用相似三角形来证明，这里从略.

有了数乘的概念，则任何向量可表示为其长度与单位向量的乘积

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

从而

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{8.2.2}$$