

21

世纪高等院校教材

高等数学

(物理类)

下 册

张国玳 徐海燕 肖瑞霞 编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

高等数学

(物理类)

下 册

张国玳 徐海燕 肖瑞霞 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本教材是根据物理类高等数学教学大纲(200学时)编写,分为上、下两册出版.本书为下册,内容包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数和常微分方程.本书总结了编者长期从事高等数学教学的经验,结构严谨、逻辑清晰、难点分散、例题丰富、通俗易懂.各章配有大量与工科相结合的例题和习题,便于教师教学和学生自学使用.

本书可供理工科大学物理类、电类专业的本科生使用,还可供从事高等数学教学的教师和科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:物理类.下册/张国玳,徐海燕,肖瑞霞编. —北京:科学出版社,2007

21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-019291-2

I. 高… II. ①张… ②徐… ③肖… III. 高等数学-高等学校-教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098157 号

责任编辑:赵 靖 杨 然 / 责任校对:李奕莹

责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007 年 7 月第一次印刷 印张:41 1/4

印数:1—4 000 字数:781 000

定价:48.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

目 录

第 8 章 向量代数与空间解析几何	1
8.1 空间坐标系	1
8.1.1 空间直角坐标系	1
8.1.2 柱坐标与球坐标	4
习题 8.1	6
8.2 向量代数	6
8.2.1 向量概念	6
8.2.2 向量的加法与数乘	7
8.2.3 向量的坐标	9
8.2.4 向量的数量积	12
8.2.5 向量的向量积	14
8.2.6 向量的混合积	17
习题 8.2	18
8.3 曲面方程与曲线方程	20
8.3.1 曲面方程	20
8.3.2 空间曲线方程	21
习题 8.3	22
8.4 平面与直线	23
8.4.1 平面	23
8.4.2 直线	27
习题 8.4	35
8.5 常见的二次曲面	37
8.5.1 球面	37
8.5.2 柱面	38
8.5.3 旋转面	40
8.5.4 锥面	41
8.5.5 椭球面	43
8.5.6 双曲面	44
8.5.7 抛物面	45
习题 8.5	47

总习题八	48
第 9 章 多元函数微分学	50
9.1 多元函数	50
9.1.1 平面点集的基本知识	50
9.1.2 多元函数	53
习题 9.1	55
9.2 多元函数的极限与连续	55
9.2.1 多元函数的极限	55
9.2.2 多元函数的连续性	58
习题 9.2	59
9.3 偏导数	59
9.3.1 偏导数的概念和计算	60
9.3.2 二元函数偏导数的几何意义	62
9.3.3 函数的偏导数与函数连续的关系	62
9.3.4 高阶偏导数	63
习题 9.3	64
9.4 全微分	65
9.4.1 全微分的概念	65
9.4.2 函数可微的必要条件及充分条件	66
9.4.3 全微分在近似计算中的应用	70
9.4.4 全微分的几何意义	70
习题 9.4	71
9.5 方向导数与梯度	72
9.5.1 方向导数	72
9.5.2 梯度	73
习题 9.5	75
9.6 复合函数微分法	75
9.6.1 链锁法则	75
9.6.2 一阶全微分形式不变性	81
习题 9.6	82
9.7 隐函数存在定理与隐函数微分法	83
习题 9.7	88
9.8 偏导数的几何应用	89
9.8.1 空间曲线的切线与法平面	89
9.8.2 空间曲面的切平面与法线	90

习题 9.8	93
9.9 二元函数的泰勒公式	94
习题 9.9	98
9.10 多元函数的极值	98
9.10.1 极值	98
9.10.2 条件极值	102
习题 9.10	107
总习题九	108
第 10 章 多元函数积分学	110
10.1 重积分与第一型曲线、曲面积分的概念及其性质	110
10.1.1 重积分与第一型曲线、曲面积分的概念	110
10.1.2 重积分与第一型曲线、曲面积分的性质	113
习题 10.1	115
10.2 二重积分的计算	115
10.2.1 在直角坐标系下计算二重积分	115
10.2.2 在极坐标系下计算二重积分	122
10.2.3 二重积分的换元法	128
习题 10.2	132
10.3 三重积分的计算	134
10.3.1 利用直角坐标计算三重积分	134
10.3.2 利用柱坐标计算三重积分	138
10.3.3 利用球坐标计算三重积分	140
10.3.4 三重积分的变量替换	142
习题 10.3	143
10.4 重积分的应用	145
10.4.1 重积分的几何应用	145
10.4.2 重积分的物理应用	147
习题 10.4	151
10.5 对弧长的曲线积分(第一型曲线积分)及对面积的曲面积分 (第一型曲面积分)	152
10.5.1 对弧长的曲线积分	152
10.5.2 对面积的曲面积分	154
习题 10.5	158
10.6 对坐标的曲线积分(第二型曲线积分)与格林公式	160
10.6.1 第二型曲线积分	160

10.6.2 格林公式	165
习题 10.6	174
10.7 对坐标的曲面积分(第二型曲面积分)	176
10.7.1 有向曲面的概念	176
10.7.2 第二型曲面积分的概念	177
10.7.3 第二型曲面积分的计算	179
习题 10.7	182
10.8 高斯公式与散度	183
10.8.1 高斯公式	183
10.8.2 通量与散度	187
习题 10.8	188
10.9 斯托克斯公式与旋度	189
10.9.1 斯托克斯公式	189
10.9.2 环量与旋度	192
习题 10.9	194
总习题十	194
第 11 章 无穷级数	197
11.1 数项级数的概念和性质	197
11.1.1 基本概念	197
11.1.2 级数的基本性质	199
11.1.3 柯西收敛原理	201
习题 11.1	202
11.2 正项级数及其审敛法	202
11.2.1 比较判别法	203
11.2.2 比值判别法和根值判别法	205
11.2.3 积分判别法	208
习题 11.2	209
11.3 任意项级数的收敛判别法	210
11.3.1 交错级数	210
11.3.2 绝对收敛与条件收敛	212
习题 11.3	214
11.4 函数项级数及其一致收敛性	215
11.4.1 函数项级数及其收敛性	215
11.4.2 函数项级数的一致收敛性	216
11.4.3 一致收敛级数的性质	219

习题 11.4	222
11.5 幂级数	222
11.5.1 幂级数的收敛域和收敛半径	223
11.5.2 幂级数的一致收敛性	226
11.5.3 幂级数的运算性质	227
习题 11.5	230
11.6 函数展开成幂级数	231
11.6.1 泰勒级数	231
11.6.2 函数展开成泰勒级数	233
11.6.3 函数幂级数展开的应用	238
习题 11.6	240
11.7 傅里叶级数	241
11.7.1 三角函数系的正交性	242
11.7.2 函数展开成傅里叶级数	243
11.7.3 正弦级数和余弦级数	248
11.7.4 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	251
11.7.5 傅里叶级数的复数形式	252
习题 11.7	254
总习题十一	255
第 12 章 常微分方程	258
12.1 微分方程的基本概念	258
12.1.1 微分方程	258
12.1.2 微分方程的解	259
习题 12.1	260
12.2 可分离变量的方程	261
12.2.1 可分离变量的方程	261
12.2.2 可化为分离变量方程的几类一阶方程	264
习题 12.2	268
12.3 一阶线性方程	269
12.3.1 线性方程	269
12.3.2 伯努利方程	273
习题 12.3	274
12.4 全微分方程	275
12.4.1 全微分方程	275
12.4.2 积分因子	277

习题 12.4	280
12.5 可降阶的二阶微分方程	281
12.5.1 $y''=f(x)$ 型的方程	281
12.5.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	282
12.5.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	284
习题 12.5	286
12.6 高阶线性微分方程	287
12.6.1 二阶线性微分方程举例	287
12.6.2 二阶线性微分方程解的结构	288
12.7 常系数线性方程	291
12.7.1 常系数线性齐次方程	291
12.7.2 常系数线性非齐次方程	295
12.7.3 欧拉方程	300
12.7.4 应用举例	302
习题 12.7	305
12.8 微分方程的幂级数解法举例	306
习题 12.8	308
12.9 常系数线性微分方程组解法举例	308
习题 12.9	311
总习题十二	312
习题答案	315

第 8 章 向量代数与空间解析几何

数的基本特征是可以进行运算,而且有运算律,利用这些运算律可以把一些概念、推理变成符号的演算,然而图形之间不能进行演算.

17 世纪初法国哲学、数学家笛卡儿^①创造了坐标法:建立坐标系,用有序实数组表示点的位置,用代数方程表示几何图形.这样,便可用代数方法来研究几何问题,也可通过几何直观来说明方程的代数性质.这种形数结合的方法开创了一门新的学科——解析几何学,它贯穿在整个高等数学中.为学习多元函数微积分学作准备,这里介绍空间解析几何.

空间解析几何是平面解析几何的直接推广,但表示空间一点需要三个有序实数,随着空间维数的增加演算无疑要繁杂许多,不便作更深入的研究,因此,处理方式必须适当改进.向量运算常常能更简便地解决一些几何问题,这就是向量代数在此的作用,它已成为空间解析几何的重要组成部分.

本章主要介绍坐标法、向量代数及常见的空间图形.

8.1 空间坐标系

8.1.1 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

在空间取定点 O ,过 O 作三条互相垂直且有相同单位的数轴 Ox, Oy, Oz ,这样就构成了空间直角坐标系,记作 $Oxyz$ (图 8.1). 其中 O 称为坐标原点, Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴分别称为横轴、纵轴和立轴,统称坐标轴,每两个坐标轴所决定的平面称为坐标面,分别称为 xy 平面、 yz 平面和 zx 平面. 这三个坐标面分空间为八个部分,每一个部分称为一个卦限,其顺序是 I, II, III, IV 卦限在 xy 平面的上方,次序同 xy 平面上的象限,而 V, VI, VII, VIII 卦限在 xy 平面下方依次对应 I, II, III, IV 卦限.

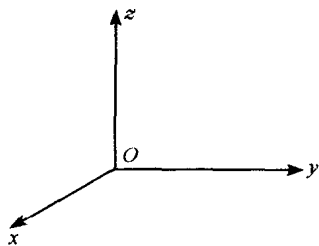


图 8.1

对于空间直角坐标系,若选取三数轴的正向符合右手法则,即右手四指自 Ox

^① 笛卡儿(R. Descartes, 1596~1650).

轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 Oy 轴的正向,握拳时拇指的指向就是 Oz 轴的正向,这就构成了一个空间右手直角坐标系(图 8.1).通常,我们采用右手系.

2. 点的坐标

建立空间直角坐标系后,空间中任一点的位置可由其坐标来表示.方法如下:

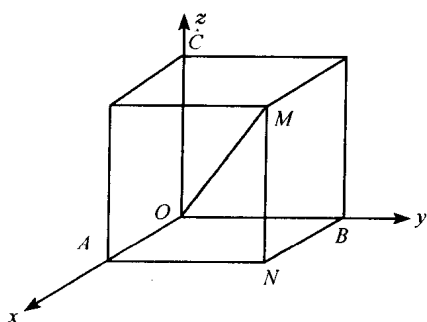


图 8.2

设 M 为空间的一点,过 M 点分别作垂直于 Ox, Oy, Oz 三轴的三个平面,与三轴的交点相应为 A, B, C (图 8.2),设它们在各自的数轴上的坐标分别为 x, y, z .这样,给出点 M 就唯一确定了一组有序数组 (x, y, z) .反过来,任意给出有序数组 (x, y, z) 则在三坐标轴上可找到坐标分别为 x, y, z 的三点 A, B, C ,过三点分别作坐标轴的垂面,显然,它们只有唯一交点 M .于是,空间一点 M 与有序三数 (x, y, z) 建立了一一对应关系,称 (x, y, z) 为

M 点在此坐标系中的坐标,记作 $M(x, y, z)$.其中, x, y, z 分别称为 M 点的 x 坐标, y 坐标, z 坐标,或称为横坐标 x ,纵坐标 y ,立坐标 z .

坐标原点的坐标为 $(0, 0, 0)$,在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的点的坐标分别具有形式 $(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)$,在坐标面 xy, xz, yz 上的点的坐标分别具有形式 $(x, y, 0), (x, 0, z), (0, y, z)$,在八个卦限中的点其坐标的符号分别为

I $(+, +, +)$, II $(-, +, +)$, III $(-, -, +)$, IV $(+, -, +)$,
V $(+, +, -)$, VI $(-, +, -)$, VII $(-, -, -)$, VIII $(+, -, -)$.

3. 有向线段在数轴上的投影

给出数轴 u ,设有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 u 轴的夹角为 θ (图 8.3).

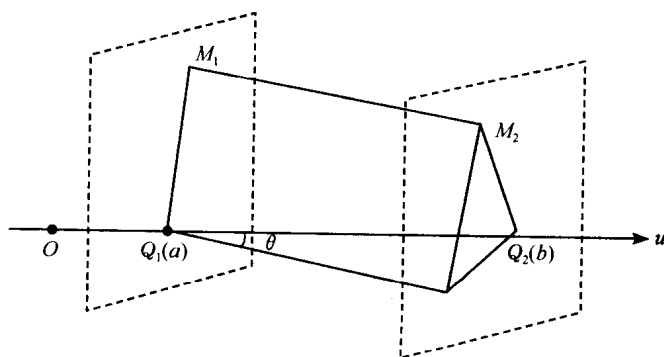


图 8.3

过 M_1, M_2 分别引轴 u 的垂线得垂足 Q_1, Q_2 分别称为点 M_1, M_2 在 u 轴上的投影.

设在数轴 u 上点 Q_1 及 Q_2 的坐标分别为 a 和 b , 那么值 $Q_1Q_2 = b - a$ 称为有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 u 轴上的投影, 记为 $\text{Prj}_{\vec{u}} \overrightarrow{M_1M_2}$ (或 $(\overrightarrow{M_1M_2})_u$), 即

$$\text{Prj}_{\vec{u}} \overrightarrow{M_1M_2} = Q_1Q_2 = b - a. \quad (8.1.1)$$

有向线段的投影有下列性质:

$$(1) \text{Prj}_{\vec{u}} \overrightarrow{M_1M_2} = |\overrightarrow{M_1M_2}| \cos \theta;$$

$$(2) \text{Prj}_{\vec{u}} (\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3}) = \text{Prj}_{\vec{u}} \overrightarrow{M_1M_2} + \text{Prj}_{\vec{u}} \overrightarrow{M_2M_3};$$

$$(3) \text{Prj}_{\vec{u}} (\lambda \overrightarrow{M_1M_2}) = \lambda \text{Prj}_{\vec{u}} \overrightarrow{M_1M_2}.$$

例 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 设三点 M_1, M_2, M 在一直线上且 $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, 求定比分点 M 的坐标.

解 设 $M(x, y, z)$ 则 $\overrightarrow{M_1M}$ 及 $\overrightarrow{MM_2}$ 在三条坐标轴上的投影分别为 $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ 及 $x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z$.

依题意

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda,$$

所以定比分点 M 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (8.1.2)$$

当 $\lambda = 1$ 时, 得线段 M_1M_2 中点的坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right). \quad (8.1.3)$$

4. 两点间的距离

如图 8.2 所示, 设 N 是点 M 在 xy 平面上的投影, 利用坐标折线 $OANM$, 由勾股定理得

$$\begin{aligned} |OM|^2 &= |ON|^2 + |NM|^2 = |OA|^2 + |AN|^2 + |NM|^2 \\ &= |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

所以两点 $O(0, 0, 0)$ 及 $M(x, y, z)$ 间的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点. 过 M_1 及 M_2 分别作平行于坐标

面的平面,这六个平面围成的长方体,其三条棱长分别为 $|x_2 - x_1|$ 、 $|y_2 - y_1|$ 、 $|z_2 - z_1|$. 仍利用坐标折线,由勾股定理得两点间的距离公式为

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (8.1.4)$$

8.1.2 柱坐标与球坐标

确定空间中点的位置,除了直角坐标 (x, y, z) 外常用的还有柱坐标与球坐标. 类似于平面解析几何,我们将会看到坐标系的恰当选取,将会对问题的讨论带来方便.

1. 柱坐标系

设点 M 的直角坐标为 (x, y, z) ,从 M 向 xy 平面作垂线,其垂足为 N . 在 xy 平面上点 N 的极坐标为 (r, θ) .

规定: $0 \leq \theta < 2\pi$ (θ 由 Ox 轴正向逆时针至 ON 正向), $0 \leq r < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$.

则 M 点与有序数组 (r, θ, z) 建立了一一对应关系,称 (r, θ, z) 为点 M 的柱坐标,记为 $M(r, \theta, z)$.

如图8.4所示,点 M 的直角坐标与柱坐标的关系为

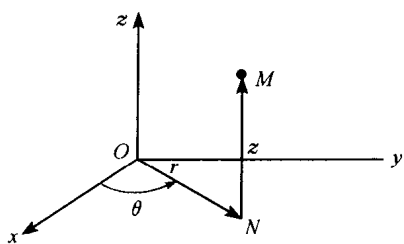


图 8.4

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z \end{cases} \quad (8.1.5)$$

或

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases} \quad (8.1.6)$$

在直角坐标系中,每个点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 可视成三张坐标面 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 的交点. 同样,在柱坐标系中,每个点 $P(r_0, \theta_0, z_0)$ 也可视成三张坐标面 $r=r_0$, $\theta=\theta_0$, $z=z_0$ 的交点. 其中: $r=r_0$ 是以 Oz 轴为中心轴, r_0 为半径的圆柱面; $\theta=\theta_0$ 是过 Oz 轴的半平面,它与 xz 平面夹角为 θ_0 ; $z=z_0$ 是平行于 xy 平面的平面,它在 Oz 轴上截距为 z_0 .

2. 球坐标系

设点 M 的直角坐标为 (x, y, z) ,从 M 点向 xy 平面作垂线其垂足为 N . 记

$|OM| = \rho$, Oz 轴正向与 $\overrightarrow{OM}$ 正向的夹角为 φ , Ox 轴正向逆时针至 $\overrightarrow{ON}$ 正向的夹角为 θ (图 8.5).

规定: $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则 M 点与有序数组 (ρ, θ, φ) 建立了一一对应关系, 称 (ρ, θ, φ) 为点 M 的球坐标, 记为 $M(\rho, \theta, \varphi)$.

如图 8.5 所示, 点 M 的直角坐标与球坐标的关系为

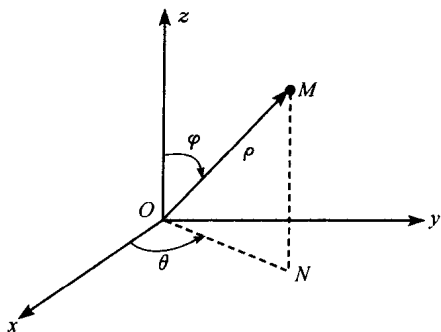


图 8.5

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (8.1.7)$$

或

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}, \\ \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{cases} \quad (8.1.8)$$

在球坐标系中, 每个点 $P(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ 也可视为三张坐标面 $\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ 的交点. 其中, $\rho = \rho_0$ 是以 $O(0, 0, 0)$ 为中心, ρ_0 为半径的球面; $\theta = \theta_0$ 是过 Oz 轴的半平面, 它与 xz 平面夹角为 θ_0 ; $\varphi = \varphi_0$ 是以 $O(0, 0, 0)$ 为顶点, 以 Oz 轴为中心轴, 半顶角为 φ_0 的正圆锥面.

例如, 在球坐标系中, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的方程为 $\rho = a$. 而球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 所占有域 Ω , 可用球坐标系中的不等式表示为

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq \rho \leq a. \end{cases}$$

又如, 方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 在平面上表示圆周. 在空间它就表示母线平行于 z 轴的圆柱面. 在柱坐标系中, 圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 的方程为 $r = a$. 而圆柱体 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 且 $|z| \leq b$ 所占有域 Ω , 可用柱坐标系中的不等式表示为

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq a, \\ -b \leq z \leq b. \end{cases}$$

习 题 8.1

1. 在空间直角坐标系中,找出下列点的位置: $A(1,2,3), B(3,4,0), C(2,0,0), D(-2,-2,-3), E(2,-2,3)$.
2. 求点 $P(x,y,z)$ 关于各坐标面和各坐标轴的对称点的坐标.
3. 给出点 $A(2,3,4), B(2,-2,4)$.
 - (1) 若 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 求 $\text{Prj}_x \overrightarrow{AB}$;
 - (2) 求 $\text{Prj}_{xy} \overrightarrow{AB}$ 及 $\text{Prj}_{yz} \overrightarrow{AB}$.
4. 已知 $A(2,-1,7), B(4,5,-2)$ 求 xy 平面分线段 AB 之比,并求分点坐标.
5. 求点 $P(x,y,z)$ 在 xy 平面上投影点的坐标和在 Oy 轴上投影点的坐标.
6. 求证点 $A(-3,2,-7), B(2,2,-3), C(-3,6,-2)$ 是等腰三角形的三个顶点,求此三角形的重心.
7. 给出两点 $A(0,1,2)$ 及 $B(-4,1,3)$.
 - (1) 求点 A 到原点、到各坐标轴、到各坐标面的距离;
 - (2) 在 Oz 轴上求一点,使它到 A, B 等距离;
 - (3) 求到 A, B 等距离的点的轨迹.
8. 求到 Oz 轴的距离与到 xy 平面距离之比为 2 的点的轨迹方程.

8.2 向量代数

本节主要研究向量的代数运算.

8.2.1 向量概念

在实际问题中,有些量只有大小,如质量、密度、温度、时间等,它们在取定一个单位后,可以用一个数来表示.这种量称为数量,也称为标量或纯量.还有一些量既有大小,又有方向,如力、位移、速度、加速度等,这种量称为向量,也称为矢量.

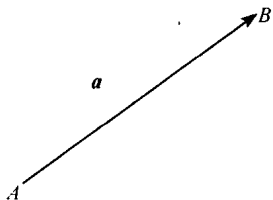


图 8.6

几何上,用空间的一个有向线段表示向量(图 8.6).在长度单位选定后,这个有向线段的长度代表向量的大小,其方向表示向量的方向.以 A 为起点、 B 为终点的有向线段所表示的向量,记为 $\overrightarrow{AB}$.有时也用粗体字母或用一个小上面加箭头的字母来表示向量,如 $\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{v}, \mathbf{F}$ 或 $\vec{a}, \vec{i}, \vec{v}, \vec{F}$ 等.

以坐标原点 O 为起点,点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的向径(也称矢径),记为 $\vec{r}$,即

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$

向量的大小叫做向量的模,记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|a|$ 或 $|\vec{a}|$.模等于1的向量叫做单位向量.与非零向量 $\vec{a}$ 同向的单位向量记为 $\vec{a}^0$.模等于零的向量叫做零向量,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$.零向量的方向可以看作是任意的. $\vec{0}$ 在图形上退缩为一点.

如果两个向量 a 和 b 它们大小相等,且方向相同,我们就说它们相等,记为 $a=b$,这就是说,经过平移后能完全重合的向量是相等的.

在实际问题中,有些向量与其起点有关,有些向量与其起点无关(称这种向量为自由向量),数学上,我们只研究自由向量.

与 a 模相等而方向相反的向量称为 a 的反向量,记为 $-a$.依向量相等的定义有

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量平行.向量 a 与 b 平行,记作 $a \parallel b$.可以认为 $\mathbf{0}$ 与任何向量都平行.

若一组向量平行于同一条直线,则称它们是共线的.平行向量是共线向量.而平行于同一平面的向量称为共面向量.

8.2.2 向量的加法与数乘

1. 加法

力是向量的物理原型,力的合成遵循平行四边形法则,因此,向量的加法也应遵循同样的法则.

当向量 a 与 b 不平行时,作 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$,以 AB,AD 为边作一平行四边形 $ABCD$ (图 8.7),则对角线向量 $\overrightarrow{AC} \triangleq c$ 即为 a 与 b 的和: $c=a+b$.

这种作向量之和的方法叫做向量相加的平行四边形法则.

在图 8.7 中,有 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,所以 $c=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,由此可知,若将向量 b 平移,使其起点与 a 的终点重合,则以 a 的起点为起点,以 b 的终点为终点的向量 c 称为向量 a 与 b 的和.这一法则叫做三角形法则.

向量加法可以推广到任意有限个向量的情形.这只需将第一个向量放置好,然后将其余向量依次首尾相接,则以第一个向量的起点为起点,以最后一个向量的终点为终点的向量即为这些向量的和(图 8.8).

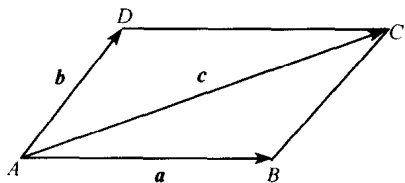


图 8.7

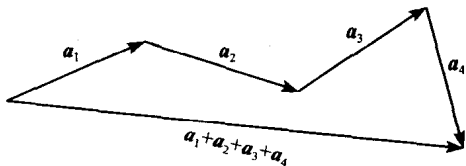


图 8.8

由上述法则知向量加法满足:

- (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (交换律);
- (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (结合律);
- (3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
- (4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

2. 减法

向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的反向量 $-\mathbf{b}$ 之和, 称为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的差, 记作 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}),$$

从图 8.7 可以看出 $\overrightarrow{DB} = (-\mathbf{b}) + \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

由三角形两边之和大于第三边的原理知: 任意两个向量之间, 满足三角不等式, 即有

$$|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

又, 由于

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| &= |\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{b}|, \\ |\mathbf{a}| &= |\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| + |\mathbf{b}|, \end{aligned}$$

故有

$$|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} \pm \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|. \quad (8.2.1)$$

3. 数乘

定义 实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\mathbf{a}$. 其大小等于数 λ 的绝对值与向量 $\mathbf{a}$ 的模的乘积, 即 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$. 其方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 同向, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\mathbf{a}$ 反向. 规定 $0\mathbf{a} = \mathbf{0}, \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

向量的数乘遵循下列运算规律:

- (1) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu(\lambda\mathbf{a})$ (结合律);
- (2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (向量与数的分配律);
- (3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (数与向量的分配律).

这里 λ, μ 为任意实数, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为任意向量. 前两个规律可从数乘定义推得, 第三个规律可以用相似三角形来证明, 这里从略.

有了数乘的概念, 则任何向量可表示为其长度与单位向量的乘积

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}^0,$$

从而

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \quad (8.2.2)$$