CHENGREN GAODENG
JIAOYU CAIJING XINGAINIAN JIAOCAI

成人高等教育财经新概念教材

经济应用数学

辅导用书

屈思敏 / 主编

中国财政经济出版社

成人高等教育财经新概念教材

经济应用数学辅导用书

屈思敏　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学辅导用书/屈思敏主编．—北京：中国财政经济出版社，2007.1

（成人高等教育财经新概念教材/蒙丽珍主编）

ISBN 978-7-5005-9613-4

Ⅰ．经…　Ⅱ．屈…　Ⅲ．经济数学-成人教育：高等教育-教学参考资料　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 002148 号

中国财政经济出版社 出版

URL：http://www.cfeph.cn

E-mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

发行处电话：88190406 财经书店电话：64033436

河北零五印刷厂印刷　各地新华书店经销

850×1168 毫米　32 开　7.875 印张　183 000 字

2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月河北第 1 次印刷

印数：1-15 000　　定价：16.80 元

ISBN 978-7-5005-9613-4/F·8349

（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

本书是《经济应用数学》课程的辅助教材，按照《经济应用数学》财经类专科教学大纲的要求编写。

本书按照《经济应用数学》教材内容的章节顺序编写，以章为单元，由学习指导、例题与例题分析和自测题等三个部分组成，指导和帮助读者理清知识脉络；把握知识重点，理解数学概念，熟练掌握数学计算方法及应用技能。

“学习指导”由内容主线、学习目标、学习内容剖析和思考练习题等构成，包含本章的基本概念、重要定理性质和计算方法、教学目的和要求以及重点与难点。

“例题与例题分析”包括了每章的典型例题、计算方法及应用技能，既有解题分析过程，又有详细解答过程，有助于读者掌握相关的计算方法技巧。

“自测题”主要是读者自己检查对各章的基本概念、基本计算方法的掌握情况，以便了解自己的学习程度。全书还有6套综合测试题。

《经济应用数学》辅助教材由屈思敏担任主编，李静、马铭清参编。具体章节撰写人分别为：马铭清（第一章）；李静（第二、三、五、六章）；屈思敏（第四、七章、综合测试题）。全书由屈思敏统编、修改、定稿。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评和指正。

编　者

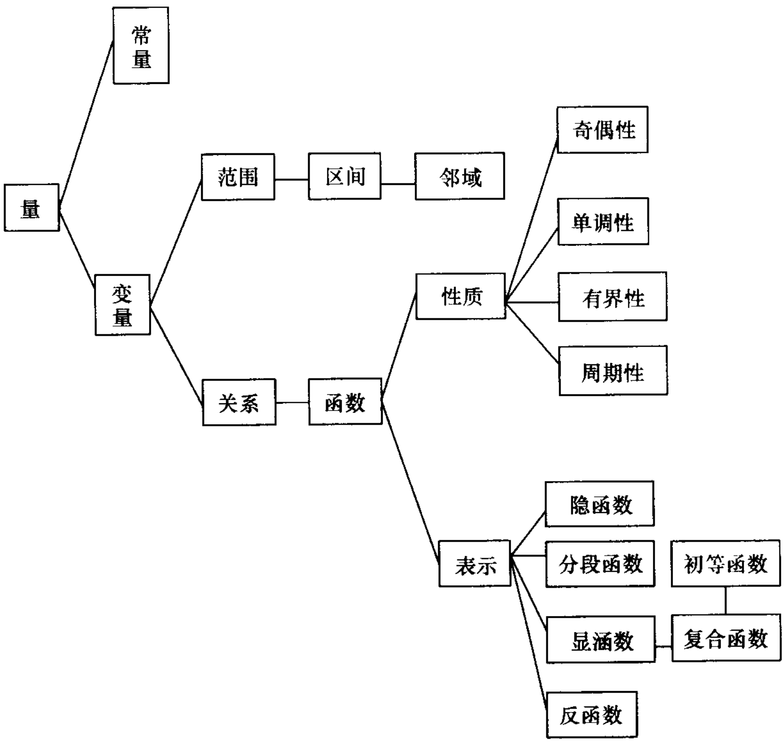
2006年9月

目　录

第一章　函　　数

一、学 习 指 导

(一) 内容主线



(二) 学习目标

1. 理解函数的概念，了解确定函数的要素是定义域和对应关系，能根据这两个要素判别两个函数是否相等。能熟练地求出函数的定义域和函数值。

2. 会求反函数。

3. 熟练掌握六类基本初等函数的定义域、性质和图形。

4. 了解函数的周期性、奇偶性、单调性和有界性，会判断函数的奇偶性。

5. 了解复合函数、初等函数的概念，会分析复合函数的复合过程，能把一个复合函数分解成几个简单函数。

6. 会建立简单的函数关系式。

重点：函数概念，基本初等函数。

难点：建立函数关系。

(三) 学习内容剖析

1. 基本概念

(1) 函数。设 D 与 B 是两个非空实数集，如果对于 D 中的每一个数 x，按照某种对应规则 f，B 中存在惟一的数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数，记为 $y=f(x)$。

D 称为函数的定义域。

函数的定义域常用区间表示。

定义域和对应规则是确定函数的两个要素。

函数的表示法有三种：解析法、图形法、表格法。

(2) 分段函数。在定义域内的不同范围中用不同的解析式表示的函数，称为分段函数。

(3) 基本初等函数。

常数函数 $y=c$ （c 为常数）

幂函数 $y=x^{a}$ （a 为常量）

指数函数 $y=a^{x}$ （$a>0$，$a\neq 1$）

对数函数 $y=\log_{a}x$ （$a>0$，$a\neq 1$）

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

以上六类函数统称为基本初等函数。

(4) 复合函数。若 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$的值域与函数 $f(u)$的定义域的交集非空，则 y 通过 u 也是自变量 x 的函数。我们称 y 是 x 的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$。

其中 u 称为中间变量。

(5) 初等函数。由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算所构成的，并且用一个解析式表示的函数称为初等函数。

分段函数不是初等函数。

(6) 显函数和隐函数。函数的因变量是用自变量表达式表示出来的函数称为显函数。

x 与 y 的函数关系由方程 $F(x, y)=0$ 确定，这种函数关系称为隐函数。

(7) 反函数。函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果 x 与 y 是一一对应的，且当 $x\in D$ 时，$y\in W$，则存在一个定义在 W 上的函数 $x=f^{-1}(y)$称为函数 $y=f(x)$的反函数，也可记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in W$。

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数，它们关于直线 $y=x$ 对称。

2. 重要定理性质和计算方法

（1）函数的几种特性。

函数的奇偶性

偶函数：对任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$。

偶函数图像关于 y 轴对称。

奇函数：对任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$。

奇函数图像关于原点对称。

函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1，x_2。当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则函数 $y=f(x)$在 I 上单调增加；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则函数 $y=f(x)$在 I 上单调减少。

单调函数一定存在反函数，且它们具有相同的增减性。

函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，若存在一个正数 $T\neq 0$，使得对于任意 $x\in D$，必有 $x\pm T\in D$，且使 $f(x\pm T)=f(x)$恒成立，则 $f(x)$为周期函数，T 为函数$f(x)$的周期。

注意，周期函数的周期通常指的是它的最小正周期。

函数的有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果存在一个正数 M，使得对于任意 $x\in I$，都有$|f(x)|\leqslant M$，则 $f(x)$在 I 上有界，$f(x)$是 I 上的有界函数；否则，$f(x)$是 I 上的无界函数。

（2）复合函数的分解。

$y=f[g(x)]$：$y=f(u)$，$u=g(x)$

（3）求函数的定义域。

若有分式，则分母不能为零。

若有偶次根式，则偶次根号下的式子不能为负。

若有对数，则真数必须大于零。

正切符号下的式子不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$；余切符号下的式子不能等于 $k\pi(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$；反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于1。

若函数式含有多种运算或若干项，应先按各种运算的要求或按各项分别确定各自的变化范围，再取公共部分。

分段函数的定义域是各段自变量取值范围的并集。

有实际背景的函数式的定义域还要考虑自变量的实际意义。

(4) 求函数值。

(5) 判别函数的奇偶性。

(6) 求反函数。

(7) 复合函数的构成与分解。

(四) 思考练习题

1. 简答题。

(1) 单调增函数是否一定无界？为什么？

(2) 是否任何函数都能与奇、偶函数联系起来？

(3) 如何将一个初等函数分解为基本初等函数的四则运算或复合函数？

2. 选择题。

(1) 下列各对函数中，相同的是(　　)

(A) $f(x)=(\sqrt{x})^2$，$g(x)=x$

(B) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

(C) $f(x)=\ln x^3$，$g(x)=3\ln x$

(D) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$

(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，则函数 $f(x)-$

$f(-x)$的图形关于(　　)对称。

(A) $y=x$　　(B) x 轴

(C) y 轴　　(D) 坐标原点

(3) 设函数 $f(x)$的定义域是全体实数，则函数 $f(x)\cdot f(-x)$ 是(　　)

(A) 单调减函数　　(B) 有界函数

(C) 偶函数　　(D) 周期函数

(4) 设 $y=f(\lg x)$的定义域为$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$，则 $y=f(x)$的定义域为(　　)

(A) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$　　(B) $[\sqrt{10}, 100]$

(C) $[-\lg 2, \lg 2]$　　(D) $[0, 1]$

(5) 设 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$，则 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=$(　　)

(A) $\frac{1}{x^2+2}$　　(B) $\frac{1}{1+(x^2+1)^2}$

(C) x^2+1　　(D) $1+(x^2+1)^2$

3. 填空题。

(1) 设 $f(x-1)=x^2-2x$，则 $f(x)=$ ________

(2) 函数 $y=\frac{1}{\ln(x-2)}+\sqrt{4-x}$的定义域是________

(3) 设 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，则 $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=$ ________

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 2\\ 1, & |x|>2\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ________

(5) 设 $f(x)$是以 3 为周期的奇函数，且 $f(-1)=-1$，则 $f(7)=$ ________

思考练习题参考答案

1.(1) 单调增函数不一定无界。例如，$f(x)=\arctan x$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$上是单调增加，但$|f(x)|=|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，即有界。当然也有单调增函数是无界的例子，如函数 $f(x)=-\frac{1}{x}$在$(0, +\infty)$内增加，但在$(0, +\infty)$内无界。

(2) 并非每一个函数都具有奇偶性，但是，任何一个定义在对称区间$[-a, a]$上的函数 $f(x)$都能表示成一个奇函数与一个偶函数的和。事实上，令 $f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $f_1(x)$为偶函数，$f_2(x)$为奇函数，并且有$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$。

(3) 因为初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算或复合而得，所以任何一个初等函数都可以分解成基本初等函数的四则运算或复合运算。方法是先从最外层考察，如果是四则运算，就将运算的每一项设一个中间变量，然后再考察每个中间变量；如果不是四则运算，则最外层就是某类基本初等函数。此时将这个基本初等函数自变量位置处的表达式设一个中间变量，再考察这个中间变量。如此向内层反复使用。

2.(1) A，B，D 三个选项中的每对函数的定义域都不同，而选项 C 中的函数定义域相等，且对应关系相同，故选项 C 正确。

(2) 设 $F(x)=f(x)-f(-x)$，则对任意 x 有

$$F(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)$$
$$=-(f(x)-f(-x))=-F(x)$$

即 $F(x)$是奇函数，故图形关于原点对称，选项 D 正确。

(3) A，B，D 三个选项都不一定满足。设 $F(x)=f(x)\cdot f(-x)$，则对任意 x 有

$F(-x)=f(-x)\cdot f(-(-x))=f(-x)\cdot f(x)=f(x)\cdot f(-x)=F(x)$，即 $F(x)$是偶函数，故选项 C 正确。

(4) C。因为在$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$上，$\lg\frac{1}{2}\leqslant \lg x\leqslant \lg 2$

(5) B。因为 $\frac{1}{f(x)}=x^2+1$，$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f(x^2+1)=\frac{1}{1+(x^2+1)^2}$

3.(1) 设 $x-1=t$，则 $x=t+1$，得 $f(t)=(t+1)^2-2(t+1)=t^2-1$

因此 $f(x)=x^2-1$

(2) 对函数的第一项，要求 $x-2>0$ 且 $\ln(x-2)\neq 0$，即 $x>2$ 且 $x\neq 3$；对函数的第二项，要求 $4-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 4$，取公共部分，得函数定义域为$(2, 3)\cup(3, 4]$

(3) 3。设 $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=l$，则 $f(l)=\frac{1}{2}$，即$\frac{l-1}{l+1}=\frac{1}{2}$，$l=3$

(4) 2。因为 $f[f(x)]=\begin{cases}2, & |f(x)|\leqslant 2\\ 1, & |f(x)|>2\end{cases}$，而由条件知 $|f(x)|\leqslant 2$，所以 $f[f(x)]=2$

(5) 1。$f(7)=f(1+2\times 3)=f(1)=-f(-1)=1$

二、例题与例题分析

例 1 求 $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)}$的定义域。

解：要使函数有意义，必须$\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ \ln(1+x)\neq 0\\ 1+x>0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\leqslant 1\\ x\neq 0\\ x>-1\end{cases}$

因而所求函数的定义域是 $-1<x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$

例 2 若函数 $f(x+2)=\sin 2x$，求 $f(x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$。

解：设 $x+2=t$，则 $x=t-2$

将 $x=t-2$ 代入 $f(x+2)=\sin 2x$ 中，即有

$$f(t)=f(x+2)=\sin 2x=\sin 2(t-2)$$

令 $t=x$，则有 $f(x)=\sin 2(x-2)$

令 $t=\dfrac{1}{x}$，则有 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sin 2\left(\dfrac{1}{x}-2\right)$

例 3 设 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$，求 $f(3)$。

解：令 $1-2x=t$，则 $x=\dfrac{1-t}{2}$，由 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$得$f(t)$

$$=1-\frac{2}{\frac{1-t}{2}}=1-\frac{4}{1-t}$$

所以 $f(3)=1-\dfrac{4}{1-3}=3$

例 4 求函数 $y=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x^2-4, & 0<x<2\end{cases}$的反函数。

解：因为当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=x^2$，$x=-\sqrt{y}$，$0\leqslant y\leqslant 4$

当 $0<x<2$ 时，$y=x^2-4$，$x=\sqrt{y+4}$，$-4<y<0$

因此所求反函数为 $y=\begin{cases}-\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x+4}, & -4<x<0\end{cases}$

例 5　设 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 与 $g(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称，求 $g(x)$。

解：因为 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称，所以 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 的反函数

由 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 解得，$x=\dfrac{1+y}{2-y}$

因而 $g(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$

例 6　下列函数中，哪个函数是奇函数？

(1) $f(x)=\sin(1+x^2)$　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(3) $f(x)=x+\cos x$　　(4) $f(x)=x\sin x$

解：(2) 满足 $f(-x)=-f(x)$，因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\frac{(\sqrt{(-x)^2+1})^2-x^2}{(\sqrt{(-x)^2+1}+x)}$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$=-f(x)$$

故此函数是奇函数。

其中(1)和(4)是偶函数，(3)既不是奇函数也不是偶函数。

例 7　将下列函数分解成简单函数。

(1) $y=\sqrt{3x-1}$　　(2) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

(3) $y=a\sqrt[3]{1+x}$　　(4) $y=\lg^2\arccos x^3$