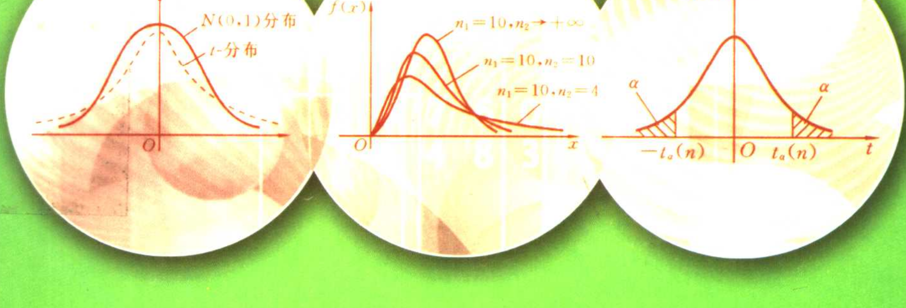
高等院校公共基础课

应用高等数学

（下册）

YINGYONG GAODENG SHUXUE

俞礼钧 王裕民 主编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

应用高等数学

（下册）

YINGYONG
GAODENG
SHUXUE

高等院校公共基础课

应用高等数学(下册)

主　编　俞礼钧　王裕民
副主编　彭祥光　王　力
　　　　赵丽君　陈　铭

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学(下册)/俞礼钧　王裕民　主编
武汉:华中科技大学出版社,2006年11月
ISBN 7-5609-3825-6

Ⅰ.应…
Ⅱ.①俞…　②王…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

应用高等数学(下册)　　　　**俞礼钧　王裕民　主编**

策划编辑:严世圣
责任编辑:曾　光　张　毅　　　　封面设计:刘　卉
责任校对:代晓莺　　　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
　　　　武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

开本:787×960　1/16　　印张:15.5　　字数:280 000
版次:2006年11月第1版　　印次:2006年11月第1次印刷　　定价:35.00元(上、下册)
ISBN 7-5609-3825-6/O·399

前　言

本书分为上、下两册，上册是一元函数微积分学，下册包括线性代数和概率论与数理统计．各章分节附有习题，文后附有习题答案．

本书可作为高等学校三类本科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书．

本书由俞礼钧、王裕民担任主编，彭祥光、王力、赵丽君、陈铭担任副主编．其中，第2章和第7章由俞礼钧负责编写，第5章和第6章由王裕民负责编写，第11章、第12章和第13章由彭祥光负责编写，第1章和第9章由王力负责编写，第3章、第4章、第8章和第10章由赵丽君负责编写．

本书在编写上侧重于应用，对过于复杂的定理证明以及在实际问题中应用较少的都予以省略，不去强调论证的过程．

本书在知识结构、教学内容、体例编写等方面，力求提供丰富的素材，贯彻深入浅出的原则，重视数形结合的方法，强化计算工具的使用．将现实生活和各类专业学习中均有广泛应用的数学基础知识作为必学内容，以保证普通高校基础教学的教学水平．编写过程中，编者注意渗透现代教学的观点和方法，为学生深入学习奠定了较好的基础．

教材编写具有一定的弹性，希望使适用面更为广泛．为了帮助三类本科在内的各种高职高专学校的学生根据实际情况选择不同的内容，教材的编写体现了培养应用型人才的特色．

本书在编写过程中，得到了编者所在学校领导和教务处的有力支持以及有关教师的热情帮助，在此一并表示诚挚的谢意．

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者和从事教学的教师提出批评和建议．

编　者

2006 年 6 月

目 录

第7章 行 列 式

在初等代数中，为了便于求解二元和三元线性方程组，引进二阶行列式和三阶行列式. 为了研究一般的n元线性方程组，需要把二阶、三阶行列式加以推广. 本章将讨论n阶行列式的概念、基本性质及其计算方法，还将介绍一种用行列式解线性方程组的重要方法——克莱姆法则.

7.1 行列式的定义

7.1.1 二阶和三阶行列式

1. 二阶行列式

从求解二元一次方程组入手，设二元一次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{7-1}$$

以a_{22}乘第1个方程，a_{12}乘第2个方程，然后将第1个方程减去第2个方程，消去x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

同理可消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21},$$

当$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}},$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}.$$

为了便于记忆，把$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即有
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}, \tag{7-2}$$
这个符号称为二阶行列式. $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$称为行列式的元素,行列式中横排称为行、纵排称为列. 二阶行列式含有两行两列.

二阶行列式的值是两项的代数和. 这两项可以按图 7-1 所示来记忆:一项是实线上的两个元素的乘积,取正号;另一项是虚线上的两个元素的乘积,取负号,然后取两项的代数和. 例如,

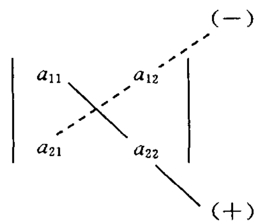


图 7-1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-(-2)\times3=8,$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}=2\times(-6)-3\times4=-24.$$
由于
$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$
利用行列式,二元一次方程组的解可以表示成
$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

分母上的行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$是由式(7-1)中变量$x_1,x_2$的系数按原来次序排列成的,称为方程组的系数行列式,记为Δ(或$\det A$).

行列式$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$是把系数行列式中$x_1$的系数$a_{11},a_{21}$换成式(7-1)右端的常数项$b_1,b_2$而成的行列式,记为$\Delta_1$.

行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$是把系数行列式中$x_2$的系数$a_{12},a_{22}$换成常数项$b_1,b_2$而成的行列式,记为$\Delta_2$.

所以,式(7-1)的解又可表示为
$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\quad(\Delta\neq0), \tag{7-3}$$
其中,式(7-2)等号右边的式子又称为二阶行列式Δ的展开式. 二阶行列式Δ,Δ_1,Δ_2是通过对二元一次方程组中未知量x_1,x_2的系数项和常数项这些元素之间的一种

规定而得到的一个数值.

【例1】 解二元一次方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=7,\\4x_1-5x_2=3.\end{cases}$$

【解】 因为系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & -5\end{vmatrix}=2\times(-5)-4\times3=-22\neq0,$$

所以方程组有解. 且

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7 & 3\\3 & -5\end{vmatrix}=7\times(-5)-3\times3=-44,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\4 & 3\end{vmatrix}=2\times3-4\times7=-22.$$

由式(7-3)得方程组的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-44}{-22}=2,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-22}{-22}=1.$$

2. 三阶行列式

同样,从求解三元一次方程组中引入三阶行列式. 设三元一次方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{7-4}$$

用消元法可得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13}-b_1a_{32}a_{23}-b_2a_{12}a_{33}.\end{aligned}$$

为了便于记忆,把上式中 x_1 的系数记为

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

即

$$\begin{aligned}\Delta&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

这便是三阶行列式,其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为行列式的元素,横排为行、纵排为列.

三阶行列式的计算可按图 7-2 进行:实线上三个元素的连乘积取正号,虚线上三个元素的连乘积取负号.

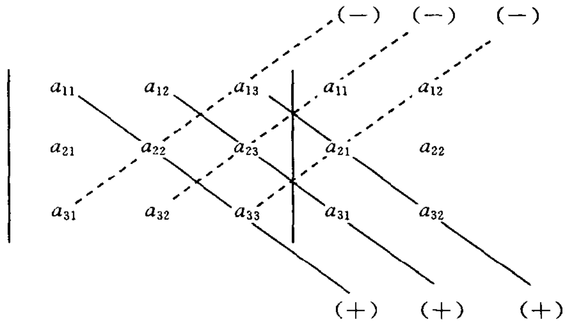


图 7-2

Δ 称为系数行列式. 同样,它表示一个算式,即它是一个数.

利用三阶行列式的概念,当式(7-4)的系数行列式 $\Delta\neq 0$ 时,它的解也可以简单地表示为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{7-5}$$

式中,$\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 是将式(7-4)中的系数行列式 Δ 的第 1,2,3 列分别换成常数列所得到的三阶行列式.

【例 2】 计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}$ 的值.

【解】 如图 7-3 所示,有

$$\begin{aligned}\Delta &=1\times(-3)\times(-2)+2\times1\times3+3\times2\times1\\ &\quad -3\times(-3)\times3-1\times1\times1-(-2)\times2\times2=52.\end{aligned}$$

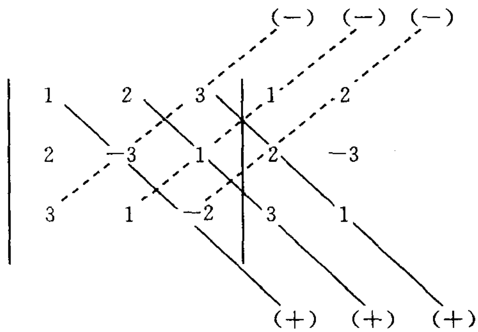


图 7-3

为了更为方便地计算三阶行列式,引进记号

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其中，$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$是原三阶行列式$\Delta$中划去元素$a_{11}$所在的第1行、第2列后剩下的元素按原来的顺序组成的二阶行列式，称它为元素a_{11}的余子式，记为M_{11}，即

$$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

类似地，记

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

并且令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\quad(i,j=1,2,3)$$

称为元素a_{ij}的代数余子式.

因此，三阶行列式也可以表示为

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}.$$

这样，三阶行列式值的求解可以转化为二阶行列式的计算.

例如，例2中的行列式可依如下方法计算.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-3&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-3&1\\1&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&1\\3&-2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&-3\\3&1\end{vmatrix}$$
$$=1\times5-2\times(-7)+3\times11=52.$$

这与前面计算的结果相同，但运算更加简洁.

运用三阶行列式可以求解式(7-4). 若分别记三阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$
$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}.$$

当式(7-4)的系数行列式$\Delta\neq0$时,则方程组有唯一解,其解可以简单地表示为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

在式(7-5)中,$x_i(i=1,2,3)$的分母均为式(7-4)的系数行列式Δ,x_i的分子是把系数行列式Δ的第i列换成常数列,其余各列不动所得的行列式,可简记为$\Delta_i(i=1,2,3)$.

【例3】 解三元一次方程组

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2+x_3=7,\\ x_1+x_2-x_3=-4,\\ -3x_1+x_2+2x_3=1.\end{cases}$$

【解】 利用式(7-5)求解,先计算系数行列式

$$\begin{aligned}\Delta&=\begin{vmatrix}-2&-3&1\\1&1&-1\\-3&1&2\end{vmatrix}\\&=(-2)\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times(-3)\begin{vmatrix}1&-1\\-3&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\-3&1\end{vmatrix}\\&=-5\neq0.\end{aligned}$$

而且

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}7&-3&1\\-4&1&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=-5,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-2&7&1\\1&-4&-1\\-3&1&2\end{vmatrix}=10,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-2&-3&7\\1&1&-4\\-3&1&1\end{vmatrix}=-15.$$

所以方程的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-2,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=3.$$

7.1.2 n阶行列式

前面介绍了在系数行列式不为0时用二阶、三阶行列式求解二元、三元线性方程组的方法. 下面将二阶、三阶行列式的概念推广到n阶行列式,并用n阶行列式来解n元线性方程组,其中n为任意的正整数.

【定义】 将n^2个元素(或数)排列成n行n列(横的称行,竖的称列),并在左、右两侧各加一条竖线的算式,记为Δ_n

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为n阶行列式，它代表一个由确定的运算关系所得到的数. Δ_n的下标n表示行列式的阶数.

行列式中任意一个元素a_{ij}表示Δ_n中的第i行、第j列的元素($i,j=1,2,\cdots,n$).

当$n=2$时，

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

当$n>2$时，定义

$$\Delta_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中，数a_{1j}称为第1行、第j列的元素；$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$称为a_{1j}的代数余子式；M_{1j}为由Δ_n去掉第1行和第j列后余下的元素构成的$n-1$阶行列式. 即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

称M_{1j}为a_{1j}的余子式.

数a_{ij}的代数余子式为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

数a_{ij}的余子式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为由Δ_n去掉第i行和第j列后余下的元素构成的$n-1$阶行列式.

【例4】 写出四阶行列式

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 11 \\ -6 & 8 & -1 & 10 \\ 9 & -4 & -8 & 15 \\ -3 & -2 & 5 & 18 \end{vmatrix}$$