



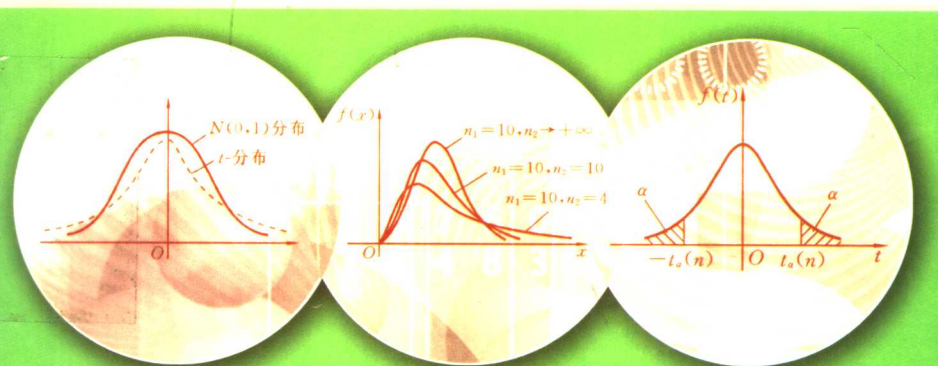
高等院校公共基础课

应用高等数学

(下册)

YINGYONG
GAODENG
SHUXUE

□ 俞礼钧 王裕民 主编



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>



应用数学系列教材

应用高等数学

(下册)

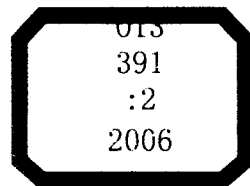
YINGYONG
GAODENG
SHUXUE

□ 应用数学系列教材 □



应用数学系列教材

高等院校公共基础课



应用高等数学(下册)

主 编 俞礼钧 王裕民
副主编 彭祥光 王 力
赵丽君 陈 铭

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学(下册)/俞礼钧 王裕民 主编
武汉:华中科技大学出版社,2006年11月
ISBN 7-5609-3825-6

- I. 应…
II. ①俞… ②王…
III. 高等数学-高等学校 教材
IV. O13

应用高等数学(下册)

俞礼钧 王裕民 主编

策划编辑:严世圣

责任编辑:曾光 张毅

责任校对:代晓莺

封面设计:刘卉

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录排:武汉佳年华科技有限公司

印刷:湖北科学技术出版社黄冈印刷厂

开本:787×960 1/16

印张:15.5

字数:280 000

版次:2006年11月第1版

印次:2006年11月第1次印刷

定价:35.00元(上、下册)

ISBN 7-5609-3825-6/O·399

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

本书分为上、下两册,上册是一元函数微积分学,下册包括线性代数和概率论与数理统计. 各章分节附有习题,文后附有习题答案.

本书可作为高等学校三类本科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书.

本书由俞礼钧、王裕民担任主编,彭祥光、王力、赵丽君、陈铭担任副主编. 其中,第2章和第7章由俞礼钧负责编写,第5章和第6章由王裕民负责编写,第11章、第12章和第13章由彭祥光负责编写,第1章和第9章由王力负责编写,第3章、第4章、第8章和第10章由赵丽君负责编写.

本书在编写上侧重于应用,对过于复杂的定理证明以及在实际问题中应用较少的都予以省略,不去强调论证的过程.

本书在知识结构、教学内容、体例编写等方面,力求提供丰富的素材,贯彻深入浅出、重视数形结合的原则,强化计算工具的使用. 将现实生活和各类专业学习中均有广泛应用的数学基础知识作为必学内容,以保证普通高校基础教学的教学水平. 编写过程中,编者注意渗透现代教学的观点和方法,为学生深入学习奠定了较好的基础.

教材编写具有一定的弹性,希望使适用面更为广泛. 为了帮助三类本科在内的各种高职高专学校的学生根据实际情况选择不同的内容,教材的编写体现了培养应用型人才的特色.

本书在编写过程中,得到了编者所在学校领导和教务处的有力支持以及有关教师的热情帮助,在此一并表示诚挚的谢意.

由于编者水平有限,本书难免存在疏漏之处,敬请广大读者和从事教学的教师提出批评和建议.

编 者

2006年6月

目 录

第7章 行列式	(1)
7.1 行列式的定义	(1)
7.1.1 二阶和三阶行列式	(1)
7.1.2 n 阶行列式	(6)
7.1.3 几种特殊的行列式	(9)
习题7.1	(11)
7.2 行列式的性质	(12)
7.2.1 n 阶行列式的性质	(12)
7.2.2 行列式性质的应用	(17)
习题7.2	(18)
7.3 行列式的计算	(19)
7.3.1 计算行列式的基本方法之一	(19)
7.3.2 计算行列式的基本方法之二	(21)
习题7.3	(24)
7.4 克莱姆法则	(25)
习题7.4	(28)
第8章 矩阵	(29)
8.1 矩阵的概念	(29)
8.1.1 矩阵的概念引入	(29)
8.1.2 几种特殊矩阵	(31)
8.2 矩阵的运算及其性质	(32)
8.2.1 矩阵的加法	(32)
8.2.2 数与矩阵的乘法(数乘)	(33)
8.2.3 矩阵的乘法	(33)
8.2.4 矩阵的幂运算	(35)
8.2.5 矩阵的转置	(36)
习题8.2	(36)
8.3 逆矩阵的性质及其运算	(38)

8.3.1	逆矩阵的定义	(38)
8.3.2	逆矩阵的性质	(39)
8.3.3	逆矩阵的求法	(39)
8.3.4	矩阵方程的解法	(42)
习题8.3		(43)
8.4	矩阵的初等行变换	(43)
8.4.1	矩阵的初等行变换定义	(44)
8.4.2	初等矩阵	(44)
8.4.3	运用初等行变换求逆矩阵	(45)
习题8.4		(47)
8.5	矩阵的秩	(48)
8.5.1	矩阵的秩的概念	(48)
8.5.2	用初等行变换法求矩阵的秩	(49)
8.5.3	矩阵的秩的性质	(51)
习题8.5		(51)
第9章	线性方程组	(52)
9.1	利用矩阵的初等行变换解线性方程组	(52)
习题9.1		(58)
9.2	线性方程组解的情况判定	(58)
习题9.2		(62)
9.3	n 维向量及其相关性	(63)
9.3.1	n 维向量的概念	(63)
9.3.2	向量的运算	(64)
9.3.3	向量的线性关系	(65)
习题9.3		(68)
9.4	向量组的秩	(68)
习题9.4		(70)
9.5	线性方程组解的结构	(71)
9.5.1	齐次线性方程组解的结构	(71)
9.5.2	非齐次线性方程组解的结构	(74)
习题9.5		(75)
9.6	投入产出模型简介	(76)
9.6.1	投入产出模型	(76)

9.6.2	直接消耗系数	(77)
9.6.3	平衡方程组的解	(79)
9.6.4	完全消耗系数	(81)
9.6.5	投入产出表的编制	(83)
习题 9.6		(85)
第 10 章	随机事件与概率	(87)
10.1	随机试验与随机事件	(87)
10.1.1	随机试验	(87)
10.1.2	随机事件的概念	(87)
10.1.3	随机事件的关系和运算	(88)
习题 10.1		(90)
10.2	随机事件的概率	(90)
10.2.1	概率的统计定义	(91)
10.2.2	古典概型	(92)
10.2.3	加法公式	(93)
习题 10.2		(94)
10.3	条件概率与乘法法则	(94)
10.3.1	条件概率	(94)
10.3.2	概率乘法公式	(95)
10.3.3	全概率公式	(96)
习题 10.3		(97)
10.4	事件的独立性和伯努利概型	(98)
10.4.1	事件的独立性	(98)
10.4.2	伯努利概型	(100)
习题 10.4		(101)
第 11 章	随机变量及其数字特征	(103)
11.1	随机变量及其分布	(103)
11.1.1	随机变量的概念	(103)
11.1.2	分布密度	(104)
11.1.3	分布函数	(107)
习题 11.1		(110)
11.2	几种重要的随机变量的分布	(111)

11.2.1	离散型随机变量的分布	(111)
11.2.2	连续型随机变量的分布	(113)
11.2.3	常见的不同分布间的近似关系	(121)
11.2.4	随机变量函数的分布	(122)
习题 11.2		(125)
11.3	随机变量的数字特征	(127)
11.3.1	数学期望	(128)
11.3.2	方差	(130)
11.3.3	数学期望和方差的性质	(131)
11.3.4	常见概率分布的数学期望与方差	(133)
11.3.5	随机变量的矩	(136)
习题 11.3		(138)
第 12 章	统计推断	(141)
12.1	数理统计中的几个基本概念	(141)
12.1.1	总体与样本	(141)
12.1.2	统计量	(142)
12.2	抽样分布	(144)
12.2.1	样本均值的分布	(144)
12.2.2	χ^2 -分布	(146)
12.2.3	t -分布	(149)
12.2.4	F -分布	(151)
习题 12.2		(153)
12.3	参数估计	(154)
12.3.1	参数的点估计	(154)
12.3.2	估计量的评价标准	(160)
12.3.3	区间估计	(163)
习题 12.3		(166)
12.4	假设检验	(168)
12.4.1	假设检验的基本思路	(169)
12.4.2	检验方法的设计	(171)
12.4.3	单个正态总体参数的假设检验	(172)
12.4.4	两个正态总体参数的假设检验	(175)
12.4.5	假设检验中可能出现的两类错误	(178)

习题 12.4	(179)
第 13 章 方差分析与回归分析	(181)
13.1 方差分析.....	(181)
13.1.1 方差分析的假定条件.....	(181)
13.1.2 几个基本概念.....	(181)
13.1.3 方差分析的基本思路.....	(182)
13.1.4 方差分析的计算.....	(185)
习题 13.1	(189)
13.2 一元线性回归分析.....	(191)
13.2.1 相关分析与回归分析.....	(191)
13.2.2 一元线性回归模型的建立和估计.....	(192)
13.2.3 一元线性回归模型的检验和预测.....	(197)
13.2.4 可化为线性的回归.....	(202)
习题 13.2	(205)
习题答案.....	(207)
附表 1 标准正态分布表	(215)
附表 2 泊松分布表	(217)
附表 3 χ^2 分布表	(219)
附表 4 t 分布表	(222)
附表 5 F 分布表	(224)

第7章 行列式

在初等代数中,为了便于求解二元和三元线性方程组,引进二阶行列式和三阶行列式.为了研究一般的 n 元线性方程组,需要把二阶、三阶行列式加以推广.本章将讨论 n 阶行列式的概念、基本性质及其计算方法,还将介绍一种用行列式解线性方程组的重要方法——克莱姆法则.

7.1 行列式的定义

7.1.1 二阶和三阶行列式

1. 二阶行列式

从求解二元一次方程组入手,设二元一次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (7-1)$$

以 a_{22} 乘第1个方程, a_{12} 乘第2个方程,然后将第1个方程减去第2个方程,消去 x_2 ,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

同理可消去 x_1 ,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时,方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$
$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

为了便于记忆,把 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即有
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \quad (7-2)$$

这个符号称为二阶行列式. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素, 行列式中横排称为行、纵排称为列. 二阶行列式含有两行两列.

二阶行列式的值是两项的代数和. 这两项可以按图 7-1 所示来记忆: 一项是实线上的两个元素的乘积, 取正号; 另一项是虚线上的两个元素的乘积, 取负号, 然后取两项的代数和. 例如,

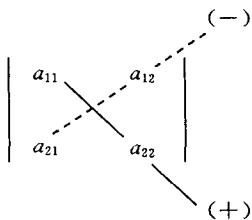


图 7-1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-2) \times 3 = 8,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 2 \times (-6) - 3 \times 4 = -24.$$

由于

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

利用行列式, 二元一次方程组的解可以表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

分母上的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 是由式(7-1)中变量 x_1, x_2 的系数按原来次序排列成的, 称为方程组的系数行列式, 记为 Δ (或 $\det A$).

行列式 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 是把系数行列式中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 换成式(7-1)右端的常数项 b_1, b_2 而成的行列式, 记为 Δ_1 .

行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ 是把系数行列式中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 换成常数项 b_1, b_2 而成的行列式, 记为 Δ_2 .

所以, 式(7-1)的解又可表示为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (\Delta \neq 0), \quad (7-3)$$

其中, 式(7-2)等号右边的式子又称为二阶行列式 Δ 的展开式. 二阶行列式 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ 是通过对二元一次方程组中未知量 x_1, x_2 的系数项和常数项这些元素之间的一种

规定而得到的一个数值.

【例1】 解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 = 3. \end{cases}$$

【解】 因为系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (-5) - 4 \times 3 = -22 \neq 0,$$

所以方程组有解. 且

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 7 \times (-5) - 3 \times 3 = -44,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 7 = -22.$$

由式(7-3)得方程组的解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1.$$

2. 三阶行列式

同样, 从求解三元一次方程组中引入三阶行列式. 设三元一次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (7-4)$$

用消元法可得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ & = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13} - b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33}. \end{aligned}$$

为了便于记忆, 把上式中 x_1 的系数记为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\text{即 } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

这便是三阶行列式, 其中 a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 称为行列式的元素, 横排为行、纵排为列.

三阶行列式的计算可按图 7-2 进行: 实线上三个元素的连乘积取正号, 虚线上三个元素的连乘积取负号.

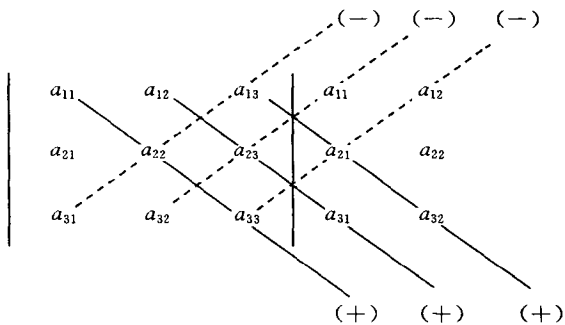


图 7-2

Δ 称为系数行列式. 同样, 它表示一个算式, 即它是一个数.

利用三阶行列式的概念, 当式(7-4)的系数行列式 $\Delta \neq 0$ 时, 它的解也可以简单地表示为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (7-5)$$

式中, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 是将式(7-4)中的系数行列式 Δ 的第 1, 2, 3 列分别换成常数列所得到的三阶行列式.

【例 2】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 的值.

【解】 如图 7-3 所示, 有

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 \times (-3) \times (-2) + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 \\ &\quad - 3 \times (-3) \times 3 - 1 \times 1 \times 1 - (-2) \times 2 \times 2 = 52. \end{aligned}$$

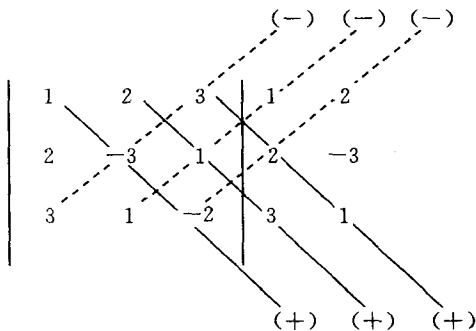


图 7-3

为了更为方便地计算三阶行列式, 引进记号

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

其中, $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是原三阶行列式 Δ 中划去元素 a_{11} 所在的第1行、第2列后剩下的元素按原来的顺序组成的二阶行列式, 称它为元素 a_{11} 的余子式, 记为 M_{11} , 即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

类似地, 记

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

并且令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

因此, 三阶行列式也可以表示为

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j}.$$

这样, 三阶行列式值的求解可以转化为二阶行列式的计算.

例如, 例2中的行列式可依如下方法计算.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 5 - 2 \times (-7) + 3 \times 11 = 52. \end{aligned}$$

这与前面计算的结果相同, 但运算更加简洁.

运用三阶行列式可以求解式(7-4). 若分别记三阶行列式

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, & \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

当式(7-4)的系数行列式 $\Delta \neq 0$ 时,则方程组有唯一解,其解可以简单地表示为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

在式(7-5)中, $x_i (i=1, 2, 3)$ 的分母均为式(7-4)的系数行列式 Δ , x_i 的分子是把系数行列式 Δ 的第 i 列换成常数列,其余各列不动所得的行列式,可简记为 $\Delta_i (i=1, 2, 3)$.

【例3】 解三元一次方程组

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

【解】 利用式(7-5)求解,先计算系数行列式

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \neq 0. \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15. \end{aligned}$$

所以方程的解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

7.1.2 n 阶行列式

前面介绍了在系数行列式不为0时用二阶、三阶行列式求解二元、三元线性方程组的方法.下面将二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式,并用 n 阶行列式来解 n 元线性方程组,其中 n 为任意的正整数.

【定义】 将 n^2 个元素(或数)排列成 n 行 n 列(横的称行,竖的称列),并在左、右两侧各加一条竖线的算式,记为 Δ_n .

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式,它代表一个由确定的运算关系所得到的数. Δ_n 的下标 n 表示行列式的阶数.

行列式中任意一个元素 a_{ij} 表示 Δ_n 中的第 i 行、第 j 列的元素($i, j=1, 2, \dots, n$).

当 $n=2$ 时,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

当 $n>2$ 时,定义

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j},$$

其中,数 a_{1j} 称为第1行、第 j 列的元素; $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}$ 称为 a_{1j} 的代数余子式; M_{1j} 为由 Δ_n 去掉第1行和第 j 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式. 即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

称 M_{1j} 为 a_{1j} 的余子式.

数 a_{ij} 的代数余子式为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

数 a_{ij} 的余子式

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为由 Δ_n 去掉第 i 行和第 j 列后余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式.

【例4】 写出四阶行列式

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 11 \\ -6 & 8 & -1 & 10 \\ 9 & -4 & -8 & 15 \\ -3 & -2 & 5 & 18 \end{vmatrix}$$