

国防电子信息技术丛书

PEARSON
Prentice
Hall

Spectral Analysis of Signals

现代信号谱分析

[美] Petre Stoica 著
Randolph Moses

吴仁彪 韩 萍 冯 青 等译



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

国防电子信息技术丛书

现代信号谱分析

Spectral Analysis of Signals

[美] Petre Stoica 著
Randolph Moses

吴仁彪 韩 萍 冯 青 等译

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书译自国际著名信号处理大师、IEEE信号处理协会技术成就奖获得者Petre Stoica教授2005年编写的教材 *Spectral Analysis of Signals*。该书介绍了经典谱分析和现代谱分析的基本理论和方法, 主要内容包括谱估计的基本概念(自相关, 能量谱和功率谱), 非参数化谱分析(周期图和相关图, 加窗技术), 有理谱分析(自回归, 滑动平均以及自回归滑动平均方法), 线谱分析(最小二乘估计, Yule-Walker和子空间方法), 滤波器组方法(改进的滤波器组方法, Capon方法, APES方法), 阵列信号处理(波束形成, Capon方法, 参数化波达方向估计), 有关矩阵分析、Cramér-Rao理论和模型阶数选取的主要结论。书中每章包含了大量反映谱分析最新研究成果和当前研究热点的补充内容, 提供了大量有助于读者深入了解各种谱分析方法性能与实现、反映当前研究热点的分析习题和上机习题。该书内容丰富新颖、论述严谨, 是一本信号谱分析领域的高水平教材。

本书适合于信号处理、通信、电子、雷达、导航、自动控制及其相关专业高年级本科生和研究生作为教材使用, 也是相关专业研究人员不可多得的一本参考书。

Authorized translation from the English language edition, entitled *Spectral Analysis of Signals*, 0131139568 by Petre Stoica, Randolph Moses, published by Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright © 2005 Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

Chinese Simplified language edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY Copyright © 2007.

本书中文简体字翻译版由电子工业出版社和Pearson Education培生教育出版亚洲有限公司合作出版。未经出版者预先书面许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有Pearson Education培生教育出版集团激光防伪标签, 无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字: 01-2007-1371

图书在版编目(CIP)数据

现代信号谱分析 / (美) 斯托伊卡 (Stoica, P.) 等著; 吴仁彪等译. - 北京: 电子工业出版社, 2007.11
(国防电子信息技术丛书)

书名原文: *Spectral Analysis of Signals*

ISBN 978-7-121-05242-2

I. 现... II. ①斯... ②吴... III. 信号分析-教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第162925号

责任编辑: 李秦华 特约编辑: 王 崧

印 刷: 北京市顺义兴华印刷厂

装 订: 三河市双峰印刷装订有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编: 100036

开 本: 787 × 1092 1/16 印张: 22 字数: 563千字

印 次: 2007年11月第1次印刷

定 价: 58.00元

凡所购买电子工业出版社的图书有缺损问题, 请向购买书店调换; 若书店售缺, 请与本社发行部联系。联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

译者序

本书第一作者 Petre Stoica 博士现在是瑞典 Uppsala 大学系统与控制系的教授,他是二十多年来享誉国际信号处理界的著名学者。他的研究领域非常广泛,包括雷达信号处理、移动通信中的空间分集、回波相消、阵列信号处理、时间序列分析、谱分析、系统辨识等。迄今为止,他先后与其他学者合著了 11 本著作和 13 本著作的部分章节,合编了 3 本书籍,发表国际刊物论文 347 篇、国际会议论文 228 篇、从事技术报告 100 次。据国际权威科技信息研究所 (ISI) 公布的结果, Petre Stoica 教授 2005 年入选世界工程领域引用率最高的前 250 个研究者之一。鉴于他在统计信号处理及其在时间序列分析、系统辨识、阵列信号处理领域的突出贡献,1996 年 Petre Stoica 教授荣获了 IEEE 信号处理协会的技术成就奖。

我与 Petre Stoica 教授是通过美国 Florida 大学 Jian Li 教授 (知名的美籍华裔学者,作者在本书前言中致谢的第一人) 结识的。Petre Stoica 教授曾多次到 Jian Li 教授领导的谱分析实验室作访问教授,两人一直保持良好的合作关系。我也先后 3 次以博士后与访问教授的身份到 Jian Li 教授的实验室工作。迄今为止,我们三方合作发表了十余篇论文。在合作过程中,我深深体会到了 Petre Stoica 严谨的治学态度和渊博的学识。1997 年,本书的第一版问世。1998 年,我在美国 Florida 大学作博士后期间,旁听了 Jian Li 教授以该书为教材的研究生课程。1999 年回国后,我开始在中国民航大学给研究生讲授这门课程。2005 年,在国家海外杰出青年合作研究基金项目的资助下, Jian Li 教授到我的实验室开展合作研究,给我带来了 Petre Stoica 教授刚刚改版的书籍。我被该书的内容深深吸引,于是决定将其在中国翻译出版。

本书的英文名称是 *Spectral Analysis of Signals*, 直译的名称应该是《信号的谱分析》,但我们决定将书名译为《现代信号谱分析》。大家知道,信号谱分析是一个在许多领域获得了广泛应用的技术,国内外先后出版了不少相关教材。但是,与已有的同类教材相比,本书最大的特点是既有覆盖谱分析经典理论与方法的基本内容,还有大量反映该领域最新研究进展和当前研究热点的补充内容 (达 32 小节之多),其中很多是作者的最新研究成果。以 Capon 波束形成器为例,除了经典的推导方法外,本书给出了 4 种全新的推导方法,让读者对于 Capon 波束形成器的原理能有更深入的了解,在此基础上给出了一种能与导向误差不确定性范围直接对应的稳健 Capon 波束形成方法,还有适用于指数衰减正弦信号谱估计的 Capon 方法,这也是我们在书名中加上“现代”二字的由来。

在本书翻译出版的过程中,本书的两位作者都给我来函,对于我们将该书在中国翻译出版的努力表示感谢,希望该书对于中国在该领域的广大研究者是一个有用的读物 (We hope it will be a useful reading for the many researchers in China working in this area)。感谢 Jian Li 教授在第一时间给我们提供了该书的样本,并且在国家海外杰出青年合作研究基金项目 (60428101) 资助下,多次来我们实验室指导本书的翻译工作。

本书第 1 章和第 2 章由韩萍翻译,第 3 章由石庆研翻译,第 4 章和第 5 章由冯青翻译,第 6 章由卢丹翻译,附录由何炜琨翻译。全书由吴仁彪统一审校。

吴仁彪

2007 年 9 月 9 日于中国民航大学

前 言

谱分析所考虑的问题是,通过非参数化或者参数化的技术从有限测量数据集中确定时间序列的谱内容(即功率随频率的分布情况)。一百多年前,Schuster 对时间序列循环特性检测的研究开创了谱分析这门学科。关于这一领域发展的一个有趣的历史回顾可以在[MARPLE 1987]中找到。此文献指出 spectrum 一词显然是由牛顿在研究白光通过玻璃棱镜时分解成各色光时提出的,这一词是由拉丁文 specter(鬼魂幽灵)演化而来的。在现代英语词汇中,和 specter 具有相同含义的词为 spectre。不管 spectrum 一词的根源是什么,我们希望学生在刚刚开始这门课程中将表现得“非常活跃”。

本书是对 *Introduction to Spectral Analysis* (Prentice Hall, 1997) 的修订和扩充,它可以用做高年级本科生或者一年级研究生谱分析的入门教材。由于此书自成一体,因此对自学者也非常有用。本书设计简洁,要点明确,所以对谱分析经典方法和现代方法的快速评论感兴趣的读者也极具吸引力。

为了尽可能地使本书简洁而又不失严谨性,书中的主要部分没有涉及到谱估计的一些高级课题。然而,在每章最后的补充内容以及附录中则对一些高级课题有所探讨。作为入门课程,读者可以跳过补充内容,并且可以直接参考附录中的结论而不必详细理解其推导过程。

对于高水平读者,本书中的前 3 个附录,以及每章中的补充内容都可供其阅读。其中附录提供了有关线性代数、统计精度界、模型阶数选取等知识的主要技术及结论。补充内容介绍了谱分析中的高级课题,这些课题涉及面广,其中绝大部分内容都是谱分析文献中当前或者近期的研究热点。

在每一章的最后,都包含有一些分析习题和上机习题。这些分析习题或多或少地都是由易而难的顺序排列的,同时也和本章内容的先后顺序相吻合。一些更难的习题探索了谱分析中的高级课题,并且提供了正文中没有给出的结论。部分习题答案可以在附录 D 中获得。上机习题主要是为了验证文中的要点,同时给读者提供关于所考虑的各种谱分析技术性能和特性的第一手信息。另外,上机习题也可以验证各种方法的相对性能,并可用来探究本书未深入分析的其他论题,如统计精确性,分辨率特性等。我们应用 MATLAB^① 程序来简化程序设计并激发读者去“玩”一些其他的例子。我们提供了一套数据产生和谱估计的 MATLAB 函数库,这些函数形成了一套全面的谱估计工具的基础,而这些函数可以从网站 www.prenhall.com/stoica 上获得。

从上述网站上也可获得一些补充阅读材料。同时,我们还准备了一套幻灯片,可以用做谱分析课程的辅助教学。我们相信这些幻灯片不但对授课教师比较有用,同时对其他读者也很有用,因为它们概括了文中的主要方法和结论。对于那些自学的读者,在阅读完每章后再看幻灯片中的要点则是对本章内容的一个很好复习。

如前所述,本书是对 *Introduction to Spectral Analysis* 的一个修订和扩充。我们保留了原版中

① MATLAB 是 Mathworks 公司的注册商标。

正文的简洁性和可读性,对其修订主要集中在补充内容、附录以及参考文献等方面的扩展上。具体来说,本书对附录 B 进行了扩展,包括了对波达方向估计的 Cramér-Rao 界(Cramér-Rao bound, CRB)的详细讨论。另外,本书中还扩充了关于模型阶数选择的附录 C 的内容,同时增加了有关模型阶数选择的新的上机习题。本书的补充内容多达 32 小节,比原书的两倍还多,这些补充内容中的绝大多数都反映了谱分析的最新成果。此外,我们还扩展了参考文献,使其包含了一些新的研究课题以及一些比较成熟的研究课题的最新成果。

本书的组织结构如下:第 1 章介绍了谱分析问题,阐述了功率谱密度函数的定义,同时回顾了自相关序列和谱密度函数的一些重要性质。第 2 章和第 5 章考虑了非参数化谱估计,其中第 2 章介绍了一些经典的谱估计技术,包括周期图、相关图以及它们的修正算法(这些修正算法主要是为了减小方差)。同时,第 2 章还涵盖了这些谱估计技术的偏差和方差分析,并阐述了这些方法之间的相互联系。第 5 章考虑了非参数化技术的最新滤波器组方法,包括与数据独立和与数据相关的滤波器设计技术。第 3 章和第 4 章考虑了参数化谱估计技术,其中第 3 章主要研究连续谱模型[自回归滑动平均(Autoregressive Moving Average, ARMA)模型以及它们的自回归(AR)和滑动平均(MA)特例],而第 4 章则是研究离散谱模型(有噪正弦波)的谱估计问题。我们之所以将第 5 章的滤波器组方法安排在第 3 章和第 4 章之后,主要是因为 Capon 估计器可以由平均的 AR 谱估计器和线谱模型的匹配滤波器来分别解释,所以我们需要第 3 章和第 4 章的背景知识来诠释。如果需要,5.1 节至 5.4 节中与数据独立的滤波器技术同样也可以直接放在第 2 章后。

第 6 章考虑了与阵列信号处理中的空域谱估计密切相关的问题。其中既考虑了非参数化(波束形成)方法,又考虑了参数化方法,并且将这些方法和第 2 章,第 4 章,以及第 5 章中所考虑的时域谱估计技术联系起来。

参考文献中同时包括现代的和经典的参考文献(以字母顺序和专题内容进行排列),其中也包含了很多历史性的参考文献,以便提供给那些对谱分析的早期发展感兴趣的读者。然而,谱分析是一个融合来自许多不同领域贡献的学科,其中包括电子和机械工程、天文学、生物光谱学、地球物理学、数理统计以及经济学等,总之,不胜枚举。因此,任何对谱分析发展历史的文献试图进行精确归档整理的努力都是注定要失败的。参考文献反映了我们自身的观点、偏见和局限性,因此毫无疑问,其中所列的清单是不全面的,但是我们希望它能使读者领略到谱分析领域的广度和多样性。

阅读本书所要具备的相关背景知识包括:线性代数和离散时间线性系统的基本知识,以及离散时间随机过程(时间序列)的相关介绍。对估计理论的基本知识有所了解也是很有帮助的,但不是必需的。附录 A 中介绍了所需的有关矩阵和线性代数的大多数背景结论,附录 B 给出了 CRB 的导论,附录 C 则给出了有关模型阶数选择的理论,其中还包含了一些所需概念和结论的简洁定义和描述。总之,我们努力使本书能够自成一体。

我们非常感谢 Jian Li 和 Lee Potter 在他们的谱估计课程中采用本书的第一版,以及他们很有价值的反馈意见和为本书其他方面所做的贡献。感谢 Torsten Söderström 最初激励我们准备导致本书问世的讲义,感谢 Hung-Chih Chiang, Peter Händel, Ari Kangas, Erlendur Karlsson 和 Lee Swindlehurst 的仔细校对和注释,以及对于上机习题的草拟和所提出的很多想法。感谢 Mats Bengtsson, Tryphon Georgiou, K. V. S. Hari, Andreas Jakobsson, Erchin Serpedin 和 Andreas Spanias 所提供的评论和建议,从而帮助我们第一版中消除一些疏忽和排版错误。同时,我们还要感谢

Wallace Anderson, Alfred Hero, Ralph Hippenstiel, Louis Scharf 和 Douglas Williams, 他们仔细阅读了本书的第一版并给我们提出了很多宝贵的意见和建议。很高兴和 Prentice Hall 的优秀员工一起工作, 同时我们也特别欣赏 Tom Robbins 和 Scott Disanno 精湛的专业技能。

本书中所涉及到的很多论题都是我们有关统计信号和阵列处理方面的研究成果, 所以同时要感谢这些研究的资助者: 瑞典战略研究基金会 (Swedish Foundation for Strategic Research), 瑞典研究会 (Swedish Research Council), 瑞典研究所 (Swedish Institute), 美国陆军研究实验室 (U.S. Army Research Laboratory), 美国空军研究实验室 (U.S. Air Force Research Laboratory), 美国国防高级研究项目管理部 (U.S. Defense Advanced Research Projects Administration)。最后, 我们要向长期以来支持和理解本项目的 Anca, Liz, Laura 和 Daniel 表示深深的谢意。

PETRE STOICA
Uppsala University
RANDOLPH MOSES
The Ohio State University

目 录

第 1 章 基本概念	1
1.1 引言	1
1.2 确定信号的能量谱密度	2
1.3 随机信号的功率谱密度	3
1.4 功率谱密度的性质	7
1.5 谱估计问题	9
1.6 补充内容	10
1.7 习题	12
第 2 章 非参数化方法	18
2.1 引言	18
2.2 周期图和相关图方法	18
2.3 用 FFT 计算周期图	20
2.4 周期图法的性质	23
2.5 Blackman-Tukey 方法	30
2.6 窗函数设计中需考虑的问题	32
2.7 其他改进的周期图方法	39
2.8 补充内容	44
2.9 习题	58
第 3 章 有理谱估计的参数化方法	69
3.1 引言	69
3.2 有理谱信号	69
3.3 ARMA 过程的协方差结构	71
3.4 AR 信号	72
3.5 Yule-Walker 方程的阶递推解法	76
3.6 MA 信号	81
3.7 ARMA 信号	82
3.8 多变量 ARMA 信号	87
3.9 补充内容	94
3.10 习题	104
第 4 章 线谱估计的参数化方法	116
4.1 引言	116
4.2 噪声中的正弦信号模型	119

4.3	非线性最小二乘方法	121
4.4	高阶 Yule-Walker 方法	125
4.5	Pisarenko 和 MUSIC 方法	129
4.6	最小模方法	133
4.7	ESPRIT 方法	135
4.8	前向-后向方法	136
4.9	补充内容	138
4.10	习题	163
第 5 章	滤波器组方法	170
5.1	引言	170
5.2	周期图的滤波器组解释	172
5.3	改进的滤波器组方法	174
5.4	Capon 方法	182
5.5	用滤波器组进一步解释周期图	189
5.6	补充内容	193
5.7	习题	211
第 6 章	空域方法	217
6.1	引言	217
6.2	阵列模型	218
6.3	非参数化方法	225
6.4	参数化方法	231
6.5	补充内容	235
6.6	习题	263
附录 A	线性代数和矩阵分析工具	270
附录 B	Cramér-Rao 界分析工具	293
附录 C	模型阶数选择方法	311
附录 D	部分习题答案	329
参考文献		331

第1章 基本概念

1.1 引言

谱估计问题的实质可以用下面这句话来表述:

对一个有限长平稳序列,估计其在整个频率域内的功率分布。

(1.1.1)

谱分析在许多领域都有应用。例如:在振动监测中,通过测量信号的频谱来检测机器零件磨损情况及其他特性。在经济学、气象学、天文学等领域中,谱分析能够揭示出待研究数据隐含的周期性,这种周期性与周期性活动或重复出现的过程有关。在语音信号分析中,声音信号的频谱模型可以帮助人们很好地理解语音产生的过程,还可以用于语音合成(或压缩)和语音识别。在雷达和声呐系统中,根据接收信号的频谱来对观测范围内的声源(或目标)进行定位。在医学方面,医生通过分析对病人测得的各种信号的频谱(如心电图或脑电图)来诊断病情。在地震学中,将地震(或火山爆发)前和地震期间记录下来的信号进行频谱分析能够获得一些与地震(或火山爆发)相关的地壳运动的有用信息,有助于预测地震或火山爆发等地壳运动现象。在油气勘探中还可利用地震学中的信号谱估计方法预测地表结构。在控制系统中,谱分析方法可以用来分析系统的动态特性,从而对该系统合成一个控制器。上述列举的谱分析应用及未提到的其他应用领域可参阅参考文献[KAY 1988; MARPLE 1987; BLOOMFIELD 1976; BRACEWELL 1986; HAYKIN 1991; HAYKIN 1995; HAYES III 1996; KOOPMANS 1974; PRIESTLEY 1981; PERCIVAL AND WALDEN 1993; PORAT 1994; SCHARF 1991; THERRIEN 1992; PROAKIS, RADER, LING, AND NIKIAS 1992]。[MARPLE 1987]中还介绍了谱估计的发展历史,很值得一读。[CHILDERS 1978; KESLER 1986]中转载了许多有关谱分析的经典文章,包括理论和应用方面,这些再版的内容很值得参考。

谱分析方法主要有两种。其一为经典谱分析方法(非参数化方法),该方法的基本思想直接源于定义式(1.1.1):将信号通过一个窄带滤波器,该滤波器对感兴趣频带内的信号进行滤波,则用滤波器的输出功率除以滤波器的带宽表示对输入信号频谱的一种度量。详细内容参见第2章和第5章(第2章所提及方法可以用滤波器组的概念来解释,看过第5章就会清楚了)。其二,称为参数化方法,该方法假定所给信号符合某一数学模型,再用参数化方法分析信号的频谱,它将谱估计问题简化为数学模型中的参数估计问题。本书第3章,第4章和第6章将分别讲解参数化谱分析方法。当信号确实满足上述方法假设的某种模型时,参数化方法要比非参数化方法得到的谱估计结果更精确。但是,多数情况下信号不一定完全符合假设模型,由于参数化方法对模型误差敏感,非参数化方法有时优于参数化方法。这一事实又重新激发了人们对非参数化方法的兴趣。

现实世界中,从观测者的角度看许多信号都是随机的,也就是说在观测区间外,信号的变化不能精确确定,只能用统计平均的概念来描述,本书将研究随机信号的谱估计问题。尽管如此,仍有必要从确定性信号的谱分析(参见1.2节)开始研究,以便更好地研究随机信号。本书

研究的信号全部为离散信号(或数字序列),这类信号通常是在时间域或空间域对连续(时域或空域)信号取样得到,之所以研究离散信号是因为谱估计问题通常是在计算机或数字电路中实现的。本书第2章到第5章研究离散时间信号,第6章研究离散空间信号。

为简单起见,书中用到的离散时间变量 t 以取样间隔为单位。空间信号变量也采用同样的描述,都是均匀取样。因此,频率的单位为每个取样间隔内的周期数。

本书涉及到的信号是复值的。在信号处理和谱估计应用中都会用到复信号,例如复解调过程(详见第6章)。值得一提的是,实际应用中,对复信号的处理并非总要比对实信号的分析更通用或困难得多。如本书第4章将讲到的正弦信号 $\alpha \cos(\omega t + \varphi)$,它是一个实值信号,可以表示成两个复指数信号的线性组合, $\alpha_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + \alpha_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$,其中参数之间的约束关系为 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$, $i = \sqrt{-1}$ 。可见,在处理一个不受约束的实正弦信号时,实际上是在处理两个有约束条件的复信号,也就是说,处理实正弦信号比复信号更复杂!好在所研究的信号中同相分量和正交分量通常都有用,这就使得复信号处理在实际中更常遇到,详细内容请参见6.2节。

1.2 确定信号的能量谱密度

设 $\{y(t); t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 表示确定的离散时间序列。通常情况下, $\{y(t)\}$ 是通过对连续时间信号取样得到的。为表示方便,时间变量 t 以取样间隔为单位,即 $y(t) = y_c(t \cdot T_s)$,其中 $y_c(\cdot)$ 表示连续时间信号, T_s 表示取样间隔。

假设 $\{y(t)\}$ 能量有限,即:

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 < \infty \quad (1.2.1)$$

则在某些附加的正则性条件下,序列 $\{y(t)\}$ 的离散时间傅里叶变换(discrete-time Fourier Transform, DTFT)存在,其定义如下:

$$Y(\omega) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} \quad (\text{DTFT}) \quad (1.2.2)$$

本书中用 $Y(\omega)$ 替代 $Y(e^{i\omega})$ 来表示序列的 DTFT,其方便之处将在式(1.4.6)中说明。

序列的逆离散时间傅里叶变换为:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{逆 DTFT}) \quad (1.2.3)$$

将式(1.2.3)代入式(1.2.2)即可得到证明。(角)频率 ω 用单位取样间隔内的弧度表示,它与物理频率 $\bar{\omega} = \omega/T_s$ (rad/s)之间的换算关系可以直接计算得到,参见习题1.1。

令

$$S(\omega) = |Y(\omega)|^2 \quad (\text{能量谱密度}) \quad (1.2.4)$$

经过直接计算可得:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} y(t) y^*(s) e^{-i\omega(t-s)} d\omega \\
 &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} y(t) y^*(s) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega(t-s)} d\omega \right] \\
 &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} |y(t)|^2
 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

在推导式(1.2.5)的最后一个等式时,用到了 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega(t-s)} d\omega = \delta_{t,s}$ (Kronecker δ)。在本书中,符号 $(\cdot)^*$ 表示标量的复共轭或矢量(矩阵)的共轭转置。式(1.2.5)还可写为:

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega \quad (1.2.6)$$

上式称为 Parseval 定理。 $S(\omega)$ 表示序列的能量分布,它是频率的函数。所以, $S(\omega)$ 称为能量谱密度。

前面对 $S(\omega)$ 的解释也可以这样描述:式(1.2.3)表示序列 $\{y(t)\}$ 是正交序列 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t}\}$ ($\omega \in [-\pi, \pi]$) 的加权“和”(实际上是积分),其权值为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Y(\omega)$ 。这样, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |Y(\omega)|$ 度量的是 $\{y(t)\}$ 在每一个基序列上投影的长度。宽松地说, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |Y(\omega)|$ 可以“理解”为:对于给定的 ω , 序列 $\{y(t)\}$ 中含有正交序列 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t}\}$ 的多少。

定义:

$$\rho(k) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t) y^*(t-k) \quad (1.2.7)$$

可以证明:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) e^{-i\omega k} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t) y^*(t-k) e^{-i\omega t} e^{i\omega(t-k)} \\
 &= \left[\sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} \right] \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} y(s) e^{-i\omega s} \right]^* \\
 &= S(\omega)
 \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

上式说明 $S(\omega)$ 可以通过计算能量有限序列 $\{y(t)\}$ 自相关序列的 DTFT 得到[参见式(1.2.7)]。

在本书后面的各章节中,上述定义可以直接推广到随机信号中。实际上,本节讨论确定信号的目的是为分析随机信号提供一些类似的定义。因此,本节讨论的内容比较简短,对上述定义的意义和性质更深入的研究将在下节中讲述随机信号时再详细讨论。

1.3 随机信号的功率谱密度

实际应用中遇到的信号大多数是随机信号,其未来时刻的值不能精确确定,因此用概率的观点描述其未来时刻的值。描述这类信号的数学模型是随机序列,它包括了某个事件的全部

可能实现,每次实现都以某一概率出现。当然,对所有可能的实现来说,实验者通常只能观测到信号的一次实现。于是可以认为上一节中有关对确定信号的定义可以不加修改地用到随机信号中。然而,这是不可能的,因为随机信号的每一次实现都可以看做是离散时间序列,其能量并不是有限的,因此其 DTFT 不存在。随机信号通常具有有限的平均功率,因此可以用平均功率谱密度来描述。为了简便性,以后称其为功率谱密度(Power Spectral Density, PSD)。

假设离散时间信号 $\{y(t); t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是一个零均值的随机变量序列,即:

$$E\{y(t)\} = 0, \quad \text{对于所有的 } t \quad (1.3.1)$$

以后,用 $E\{\cdot\}$ 表示期望运算(对所有可能的实现取平均值)。 $y(t)$ 的自协方差序列(Auto-Covariance Sequence, ACS)或协方差函数定义为:

$$r(k) = E\{y(t)y^*(t-k)\} \quad (1.3.2)$$

并且假设其仅与被平均的两个样本间的相对时延有关。式(1.3.1)和式(1.3.2)的假设表明 $\{y(t)\}$ 是一个二阶平稳序列。当需要区分几个信号的 ACS 时,对协方差序列加上相应信号的下标,如 $r_y(k)$ 所示。

ACS $r(k)$ 有一些简单却很有用的性质:

$$r(k) = r^*(-k) \quad (1.3.3)$$

和

$$r(0) \geq |r(k)|, \quad \text{对于所有的 } k \quad (1.3.4)$$

根据式(1.3.2)的定义和平稳的假设条件,可以直接得出式(1.3.3);式(1.3.4)可由 $\{y(t)\}$ 的协方差矩阵得到,该协方差矩阵的定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= \begin{bmatrix} r(0) & r^*(1) & \dots & r^*(m-1) \\ r(1) & r(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r^*(1) \\ r(m-1) & \dots & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \\ &= E \left\{ \begin{bmatrix} y^*(t-1) \\ \vdots \\ y^*(t-m) \end{bmatrix} [y(t-1) \cdots y(t-m)] \right\} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

该矩阵对任何 m 都是半正定的。我们知道 Hermitian 矩阵 $\mathbf{M}$ 在满足下述条件时是半正定的,即:对每一矢量 $\mathbf{a}$, 都有 $\mathbf{a}^* \mathbf{M} \mathbf{a} \geq 0$ 。详细内容请参见附录 A.5。又:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* \mathbf{R}_m \mathbf{a} &= \mathbf{a}^* E \left\{ \begin{bmatrix} y^*(t-1) \\ \vdots \\ y^*(t-m) \end{bmatrix} [y(t-1) \cdots y(t-m)] \right\} \mathbf{a} \\ &= E \{ z^*(t) z(t) \} = E \{ |z(t)|^2 \} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

其中:

$$z(t) = [y(t-1) \cdots y(t-m)]a$$

由此可见,对于每一个 m , R_m 确实是半正定的。这样,根据半正定矩阵的性质即可得出式(1.3.4)(参见附录 A 中的定义 D11 和习题 1.5)。

1.3.1 功率谱密度的第一种定义

将样本协方差序列的 DTFT 定义为功率谱密度 PSD,即:

$$\phi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)e^{-i\omega k} \quad (\text{功率谱密度}) \quad (1.3.7)$$

可以看到, $\phi(\omega)$ 的定义式(1.3.7)与确定性信号情况下的定义式(1.2.8)相类似。由给定的 $\phi(\omega)$ 求解 $\{r(k)\}$ 的过程称为逆变换,其表达式为:

$$r(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega)e^{i\omega k} d\omega \quad (1.3.8)$$

可以证明:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega)e^{i\omega k} d\omega = \sum_{p=-\infty}^{\infty} r(p) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-p)} d\omega \right] = r(k)$$

可见式(1.3.8)是式(1.3.7)的逆变换。需要说明的是上式证明过程中应保证积分与求和的顺序可交换,这一要求在弱条件下是可以满足的,例如,当 $\phi(\omega)$ 平方可积时即可满足, [PRIESTLEY 1981] 中的第 4 章有关于此方面的详细论述。

由式(1.3.8)可得:

$$r(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\omega) d\omega \quad (1.3.9)$$

因为 $r(0) = E\{|y(t)|^2\}$ 描述的是 $\{y(t)\}$ 的(平均)功率,所以式(1.3.9)说明 $\phi(\omega)$ 确实能够定义为 PSD,它描述了信号在整个频域内的平均功率分布。从式(1.3.9)还可以看出, $\phi(\omega)d\omega/2\pi$ 在 $(\omega - d\omega/2, \omega + d\omega/2)$ 区间内的功率为无穷小量,信号的总功率是对这些无穷小量的积分。称 $\phi(\omega)$ 为 PSD 的另一个原因由下一节所述的第二种定义给出,该定义与确定性情况下的定义式(1.2.2)和式(1.2.4)相类似。

1.3.2 功率谱密度的第二种定义

$\phi(\omega)$ 的第二种定义是:

$$\phi(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t)e^{-i\omega t} \right|^2 \right\} \quad (1.3.10)$$

在自协方差序列 $\{r(k)\}$ 满足式(1.3.11)的假设条件下,上述第二种定义与式(1.3.7)等价。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N}^N |k| |r(k)| = 0 \quad (1.3.11)$$

式(1.3.7)与式(1.3.10)的等价性证明如下:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N E \{ y(t) y^*(s) \} e^{-i\omega(t-s)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} (N - |\tau|) r(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-i\omega\tau} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} |\tau| r(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= \phi(\omega) \end{aligned}$$

习题 1.6 中给出了上面第二个等式的证明过程,最后一步用到了式(1.3.11)。

上面给出的 $\phi(\omega)$ 的第二种定义类似于确定性情况下的能量谱密度[参见式(1.2.4)]。二者的主要区别是:式(1.3.10)中有乘积因子 $1/N$ 和数学期望运算;式(1.3.10)中的“离散时间”变量取值为正整数只是为了方便,与式(1.2.2)相比,并没有本质区别。尽管有这些不同,但式(1.2.4)和式(1.3.10)的相似性更进一步说明了称 $\phi(\omega)$ 为 PSD 的原因。第 2 章和第 5 章中讨论用非参数化方法估计 PSD 的问题时,该定义会非常有用。

可以看出,无论哪种定义, $\phi(\omega)$ 都是周期函数,周期为 2π 。因此, $\phi(\omega)$ 完全可以通过它在区间

$$\omega \in [-\pi, \pi] \quad (\text{每单位取样间隔的弧度数}) \quad (1.3.12)$$

内的变化描述。另外,PSD 还可以看做是频率的函数。

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{每单位取样间隔的周期数}) \quad (1.3.13)$$

根据式(1.3.12),可得频率的取值区间为:

$$f \in [-1/2, 1/2] \quad (1.3.14)$$

为了简便起见,通常将 PSD 写为 ω 的函数形式。

如前所述,离散时间序列 $\{y(t)\}$ 通常是由连续时间信号的取样而得,为了避免因取样而造成的频谱混叠效应,连续信号应该(至少近似)在频域内是频带有限的。要保证这一点,就需要在取样之前将连续信号通过一个低通滤波器。设 F_0 表示连续信号频谱的最高(有效的)频率分量(可能是滤波后的), F_s 表示取样频率,根据奈奎斯特取样定理(有时也称 Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon 取样定理),在满足

$$F_s > 2F_0 \quad (1.3.15)$$

时,连续信号可以由它的取样信号 $y(t)$ 精确重构。当式(1.3.15)成立时,不会产生频率混叠现象(参见[OPPENHEIM AND SCHAFER 1989])。描述连续时间信号的频率变量 F 与 f 之间的关系

可用等式

$$F = f \cdot F_s \quad (1.3.16)$$

表示,因此相应于式(1.3.14), F 的取值区间为:

$$F \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2} \right] \quad (\text{周期数/秒}) \quad (1.3.17)$$

由式(1.3.15)很自然能得到上述结论。

1.4 功率谱密度的性质

既然 $\phi(\omega)$ 表示功率谱密度,那么它应该是实的而且是非负的。由 $\phi(\omega)$ 的定义式(1.3.10)也能得出此结论。因此:

$$\phi(\omega) \geq 0, \quad \text{对于所有 } \omega \quad (1.4.1)$$

由式(1.3.3)和式(1.3.7)得:

$$\phi(\omega) = r(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}\{r(k)e^{-i\omega k}\}$$

其中, $\text{Re}\{\cdot\}$ 表示取实部运算。若 $y(t)$ 是实的,则 $r(k)$ 也是实的,于是有:

$$\phi(\omega) = r(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r(k) \cos(\omega k) \quad (1.4.2)$$

此时, $\phi(\omega)$ 是一个偶函数。但当信号是复信号时, $\phi(\omega)$ 就不一定关于 $\omega = 0$ 轴对称。因此:

$$\begin{aligned} &\text{对实信号:} \\ &\quad \phi(\omega) = \phi(-\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi] \\ &\text{对复信号:} \\ &\quad \text{一般地, } \phi(\omega) \neq \phi(-\omega), \quad \omega \in [-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

注释:读者或许感到奇怪,为什么不将 ACS 定义为:

$$c(k) = E \{y(t)y^*(t+k)\}$$

对比本书中使用的 ACS $\{r(k)\}$ [参见式(1.3.2)], 可以看出 $c(k) = r(-k)$ 。所以,对应于 $\{c(k)\}$ 和 $\{r(k)\}$ [参见式(1.3.7)] 的 PSD 之间的关系为:

$$\psi(\omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k)e^{i\omega k} = \phi(-\omega)$$

至于选择哪个 ACS 定义(以及相应的 PSD 定义)似乎是任意的,从数学上看两种定义方式中的任一种都可使用,但从实际角度出发更倾向于使用 $r(k)$,其原因如下:

首先,应该强调一点,如式(1.3.7)所示,PSD 描述的是 ACS 的频谱。 $\phi(\omega)$ 有时可以理解信号在 ω 点处的(无穷小)功率,但从严格意义上讲,这并不完全正确。如果 PSD 表示的是

信号本身的功率,那么应该有 $\psi(\omega) = \phi(\omega)$,这是因为信号所含频谱分量并不取决于 ACS 的定义。但是,如前所述,在一般的复值情况下, $\psi(\omega) = \phi(-\omega) \neq \phi(\omega)$,这表明将 PSD 解释为信号的功率并不(总)是正确的。确实,PSD“度量”的是信号的 ACS 在频率 ω 处的功率。

另外,正如 PSD 的第二种定义式(1.3.10)所示,频谱分析的目的是描述信号在频率 ω 处的平均功率。假如用 $c(k)$ 表示 ACS,其相应的 PSD 的第二种定义为:

$$\psi(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{+i\omega t} \right|^2 \right\}$$

它表示 $y(t)$ 在 $-\omega$ 处的平均功率。很清楚地看到,相应于 $r(k)$ 的 PSD 的第二种定义与引入平均功率这个概念的目的一致,而不对应于 $c(k)$;因而使用 $r(k)$ 作为 ACS 的定义。

下面给出渐近稳定线性系统的输入与输出 PSD 之间的转换关系。设:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} \quad (1.4.4)$$

表示一个渐近稳定线性时不变系统。符号 z^{-1} 表示单位延迟算子,定义为 $z^{-1}y(t) = y(t-1)$ 。又设 $e(t)$ 表示系统稳定的输入, $y(t)$ 表示相应的输出,如图 1.1 所示。则 $\{y(t)\}$ 和 $\{e(t)\}$ 的关系可用下面的卷积和表示:

$$y(t) = H(z)e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e(t-k) \quad (1.4.5)$$

滤波器的传输函数为:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\omega k} \quad (1.4.6)$$

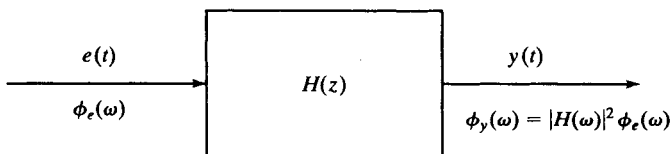


图 1.1 线性系统的输入与输出 PSD 之间的关系

在本书中,用 $H(z)$ 表示线性系统的卷积算子及其 Z 变换,用 $H(\omega)$ 表示传输函数,将 $z = e^{i\omega}$ 代入 $H(z)$ 可得传输函数 $H(\omega)$,即:

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{i\omega}}$$

这里,用符号 $H(\omega)$ 代替 $H(e^{i\omega})$,用 z 同时表示算子和复变量,这些表示方法在符号上有些混乱,但可以简化表示。

由式(1.4.5)和式(1.3.2)得:

$$\begin{aligned} r_y(k) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p h_m^* E \{ e(t-p) e^*(t-m-k) \} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p h_m^* r_e(m+k-p) \end{aligned} \quad (1.4.7)$$